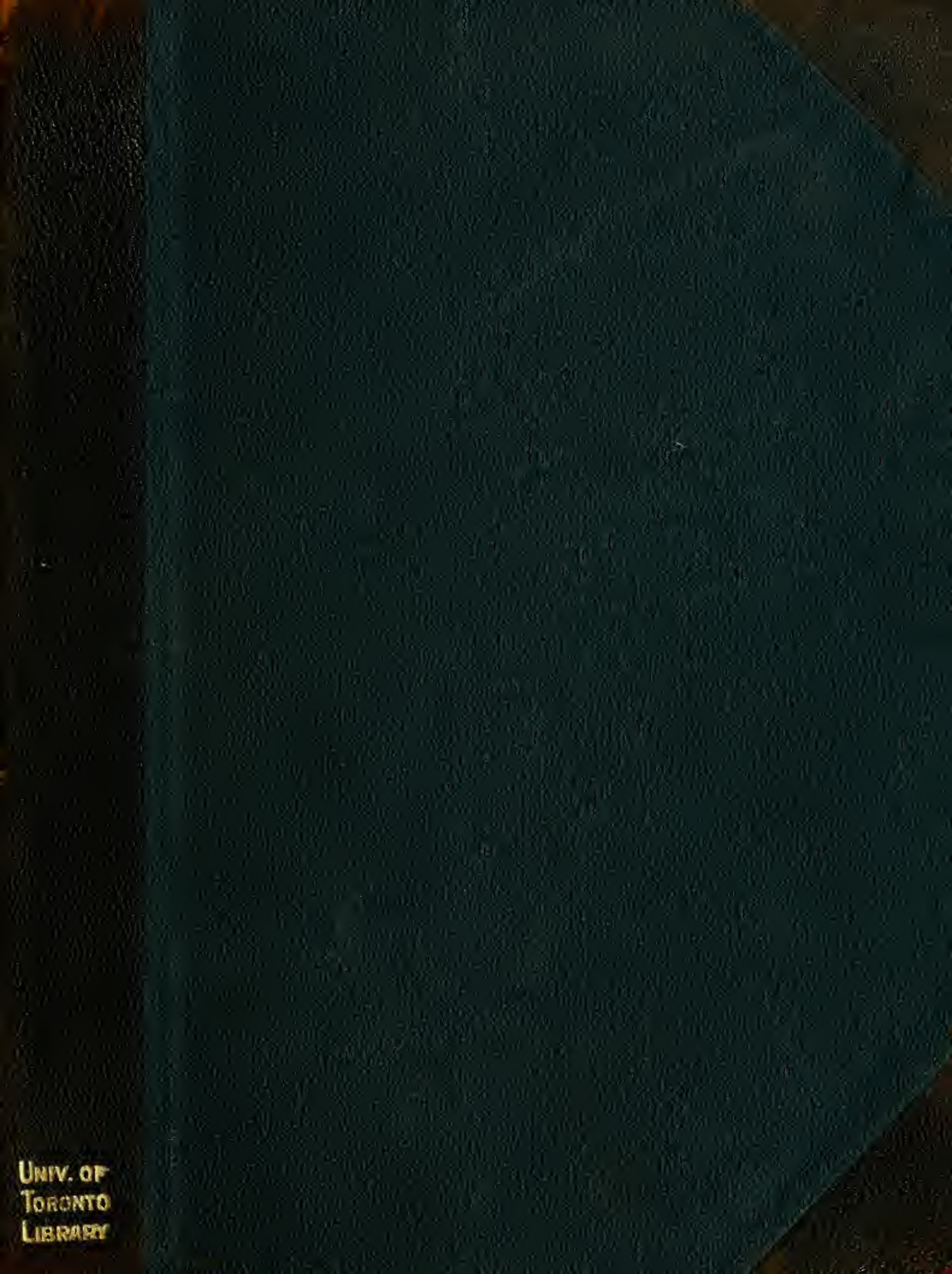

UNIV. OF
TORONTO
LIBRARY

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.


ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES,

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE.

PUBLIÉ DE 1875 A 1884

PAR H. RESAL.

SIXIÈME SÉRIE,

PUBLIÉE

PAR CAMILLE JORDAN,

AVEC LA COLLABORATION DE

G. HUMBERT, M. LÉVY, E. PICARD, H. POINCARÉ.

TOME SIXIÈME. — ANNÉE 1910.

(75e Volume de la Collection.)

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1910

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Sur les produits canoniques d'ordre infini;

PAR M. ARNAUD DENJOY.

Depuis que M. Poincaré a énoncé son célèbre théorème sur la possibilité d'exprimer simultanément deux variables dont la correspondance est analytique par des fonctions uniformes et analytiques d'une même troisième, l'étude de la fonction multiforme la plus générale se trouve réduite à celle de deux types de fonctions particulièrement simples : les fonctions uniformes et les fonctions inverses de fonctions uniformes.

Ce n'est pas ici le lieu d'expliquer à quels problèmes précis se réduit l'étude simultanée d'une fonction uniforme y et de sa fonction inverse x. Qu'il me suffise de dire que ces problèmes, résolus au voisinage des points réguliers ou polaires relativement à y, ont leur solution presque inexistante si x est voisin d'un point essentiel, même isolé pour y.

Cependant, des résultats très importants ont été obtenus touchant le système des nombres x_0 correspondant à une même valeur de y_0, quand $y(x)$ ne possède qu'un point singulier essentiel qu'on peut supposer situé à l'infini. On a démontré dans ce dernier cas, relativement aux modules des nombres x_0, que la suite, supposée croissante, de ces modules a un ordre sensiblement indépendant de y_0.

C'est une propriété bien simple à établir que, si l'ensemble de toutes les singularités possibles d'une fonction multiforme ne morcelle pas le plan ([1]), le nombre des déterminations de la fonction est le même en tous les points réguliers pour chaque branche, si ce nombre est borné. Les points singuliers de la fonction x inverse de la fonction y supposée entière sont d'une part des points critiques algébriques en infinité dénombrable (comme ceux de toute fonction multiforme), et des points singuliers transcendants qui sont les valeurs vers lesquelles peut tendre la fonction entière y, quand la variable x suit un chemin convenablement choisi s'éloignant à l'infini. Si ces valeurs sont en infinité dénombrable, comme on tend à le penser, la fonction $x(y)$ multiforme est de celles dont toutes les singularités réunies ne morcellent pas le plan. Peut-on déduire de ceci, malgré l'infinité des branches de $x(y)$, une raison de la fréquence constante des valeurs x_0 correspondant à un nombre arbitraire y_0? Il est permis d'espérer que l'on trouvera par cette voie une lumineuse explication de ce fait remarquable. Je n'ai cependant pas engagé ma recherche dans cette direction, jugeant son succès douteux en l'état actuel de nos connaissances.

Désireux de préciser les résultats déjà connus sur cette question, j'ai utilisé le détour qui consiste à relier le plus étroitement possible la croissance du nombre n des zéros intérieurs à un cercle concentrique à l'origine, à celle du module maximum de la fonction sur ce même cercle. La croissance du module maximum de $y-y_0$ étant évidemment indépendante de y_0, la croissance du nombre n relatif à y_0 sera déterminée et indépendante de y_0 dans la mesure où la croissance d'une fonction entière détermine celle de ses zéros.

Le problème direct : *Connaissant le module r_n du $n^{\text{ième}}$ zéro a_n d'une fonction entière, en déduire les limites du module maximum de cette fonction*, a été résolu par MM. Boutroux et Lindelöf avec une extrême précision dans le cas où la suite r_n est de genre fini, où la série $\frac{1}{r_n^{p+1}}$ est convergente pour une certaine valeur entière de p. Je

---

([1]) Je dis qu'un ensemble ne morcelle pas le plan, si deux points quelconques n'appartenant pas à l'ensemble peuvent être joints par une ligne dont aucun point n'appartient à l'ensemble. Les ensembles dénombrables ne morcellent pas le plan.

me suis proposé d'atteindre la même précision dans le cas où la suite r_n est d'ordre infini, et j'y suis parvenu dans des cas très généraux.

La difficulté essentielle consistait à définir ce qu'il faut entendre par produits canoniques d'ordre infini, si l'on veut que de tels produits possèdent les propriétés essentielles des produits canoniques d'ordre fini. Voici la définition que j'ai proposée. Un produit

$$F(z) = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \dots + \frac{1}{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{p_n}} = \prod_1^\infty E\left(\frac{z}{a_n}, p_n\right)$$

sera dit *canonique* si, $e^{\varphi\left(\frac{r}{r_n}, p_n\right)}$ étant le maximum du module du $n^{\text{ième}}$ facteur sur le cercle $|z| = r$, la série

$$\sum_1^\infty \varphi\left(\frac{r}{r_n}, p_n\right) = P(r)$$

est une fonction de r telle qu'il n'y ait pas possibilité de la rendre moins croissante par un autre choix de l'exposant p_n, fonction de n.

La seule arbitraire dans un produit du type précédent étant p_n, il faut que la condition précédente détermine le choix de p_n.

J'ai tout d'abord (Chap. I) procédé à une étude minutieuse de la fonction $\varphi(u, p)$. J'ai ainsi déterminé successivement pour le facteur primaire $E(x, p)$, ou plutôt pour le logarithme de son module, la répartition de ses divers maxima et minima sur tout cercle $|x| = u$, l'expression exacte de chacun d'eux par une intégrale curviligne, leur classement par ordre de valeurs absolues et, comme conséquence, le maximum et le minimum absolus; enfin, des expressions approchées et simples de ces deux dernières fonctions, restant avec elles dans des rapports finis, *quels que soient u et p* (¹).

Cette étude terminée, il me devenait facile de résoudre le problème du choix de l'exposant canonique p_n grâce à la remarque suivante (²): Le module maximum du facteur primaire $E(x, p)$, sur un cercle fixe $|x| = u$, croît avec p, si $u > 1$, décroît si $u < 1$, tend vers une limite si $u = 1$. Les deux premières assertions sont d'ailleurs légèrement inexactes, mais de telle façon que la conséquence suivante ne soit

(¹) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 29 juin 1908.

(²) *Id.*, 13 janvier 1908.

pas altérée : si je divise le produit $\prod_1^\infty E\left(\frac{x}{a_n}, p_n\right)$ en deux autres $\prod_1^h$ et $\prod_{h+1}^\infty$, h étant défini par $r_h \leqq r < r_{h+1}$, si

$$e^{P_1} = \prod_1^h e^{\varphi\left(\frac{r}{r_n}, p_n\right)}, \qquad e^{P_2} = \prod_{h+1}^\infty e^{\varphi\left(\frac{r}{r_n}, p_n\right)}$$

si, partant d'une fonction p_n arbitraire, je la remplace par une fonction plus croissante, P_1, qui est comme P_2 une fonction de r, augmente, P_2 diminue. Si je remplace p_n par une fonction moins croissante, P_2 augmente, P_1 diminue. Si donc je détermine l'*exposant p_n par lequel* P_1 *et* P_2 *sont du même ordre de grandeur*, le choix d'un exposant, soit plus croissant, soit moins croissant, ne pourra qu'augmenter l'ordre de $P = P_1 + P_2$.

J'ai pu déterminer dans des cas étendus la valeur de p_n et calculer avec une erreur relative infiniment petite la valeur de $P(r)$. L'exposant de convergence p_n et la fonction correspondante P sont tels que : 1° en modifiant les arguments des zéros a_n de toutes les façons possibles, sans changer leurs modules ni la loi qui donne p_n, je suis certain qu'à partir d'une certaine valeur de r, calculée une fois pour toutes connaissant α et la suite r_n, le module maximum de la fonction F est inférieur à $e^{(1+\alpha)P(r)}$, α étant positif fixe, arbitrairement petit; 2° en conservant la loi qui me donne p_n ou en la remplaçant par une autre arbitraire il me sera possible de choisir une répartition convenable des arguments des a_n telle que, pour une infinité de valeurs croissantes de r, le module maximum de F soit supérieur à $e^{(1-\alpha)P(r)}$.

Je cite entre autres résultats que, moyennant des hypothèses très larges, si, par exemple, la fonction n de r_n interpolée pour toutes les valeurs de r_n a sa dérivée toujours croissante, on peut prendre sensiblement $p = \frac{d \log n}{d \log r_n}$, et l'on a

$$\frac{n}{p} < \text{Max.} \log |F(z)| < 2n\,\mathrm{L}\,p,$$

n étant le nombre des zéros intérieurs au cercle $|z| = r$ et p l'exposant de convergence des zéros les plus voisins de ce cercle.

Pour ne pas allonger outre mesure ce Mémoire, j'ai dû me borner au choix de p et au calcul de P dans deux cas de régularité [1] de la croissance de n en fonction de r_n. En tout cas, il n'est jamais question dans ce travail de limiter la croissance de n dans le sens de la rapidité, il n'est question que de sa régularité.

Dans le premier cas, que j'appelle *cas de moyenne régularité*, j'ai admis sur la fonction $r(n)$ [ou plutôt sur $n(r_n)$] les hypothèses qui me permettaient commodément le choix de p et la limitation supérieure de $P(r)$. Ces hypothèses sont d'ailleurs moins particulières que celles dont on use habituellement.

Dans le second cas, j'ai cherché des conditions telles que $P(r)$ puisse être calculé asymptotiquement d'une façon exacte.

La première famille de fonctions $r(n)$ comprend celles où, dans une succession de grands intervalles, la répartition des modules des zéros conviendrait à des fonctions d'ordre fini. Il y a entre les produits de cette famille, pour lesquels la formule trouvée donne de loin en loin une expression exacte, et ceux qui sont évalués asymptotiquement par la formule du second cas, une différence qui se ramène à celle de deux fonctions de croissance arbitrairement rapide, mais dont la première est représentée par une ligne brisée où chaque côté a une longueur très grande relativement à celle du côté précédent, et une pente beaucoup plus forte, et dont la seconde aurait au contraire à sa courbe représentative une tangente dont le coefficient angulaire croît uniformément sans gravir une succession de paliers.

J'ai été le plus possible avare d'hypothèses gratuitement imposées à n et à $r(n)$, parce que je désirais, *une fois mis en possession des formules* valables dans les cas de moyenne ou d'extrême régularité, *déterminer le champ d'application de ces formules*, je veux dire les conditions nécessaires et suffisantes que doivent remplir n et $r(n)$ pour qu'elles soient exactes. Je renvoie, pour la solution de ce problème, à un prochain Mémoire où je traite également le cas des croissances irrégulières, et le problème inverse : *De la croissance de la fonction déduire la croissance des zéros* dont la solution

---

(1) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 13 juillet 1908.

consiste à étudier et à préciser la généralisation du théorème de M. Picard, donnée par M. Borel.

4. A ma connaissance, trois Mémoires contiennent les propriétés essentielles des fonctions d'ordre infini connues au moment où j'ai publié mes premiers résultats.

Le premier est le célèbre Mémoire de M. Borel où se trouve notamment la démonstration élémentaire du théorème de M. Picard, et où sont jetées les bases de la théorie qui nous occupe. Le second, par ordre chronologique, est dû à M. Kraft, élève de M. Blumenthal (¹), qui s'est essentiellement donné pour but de reprendre par le détail le Mémoire précédent, afin d'en donner un exposé parfaitement clair et didactique. Ce travail renferme une excellente mise au point de la question en l'état où il la prend et en l'état où il la porte, et il m'a été de la plus grande utilité. Enfin, la thèse de M. Boutroux consacre aux produits de genre infini quelques pages, où l'auteur fait preuve de sa pénétration habituelle en déterminant, dans un cas particulier, la valeur optima de l'exposant de convergence.

Ai-je besoin de dire que tous les perfectionnements apportés à la théorie des fonctions de genre fini retentissent sur celle des fonctions de genre infini, et qu'à ce titre je dois citer encore, comme m'ayant apporté un réel secours, le travail de M. Lindelöf?

Une théorie plusieurs fois étudiée, et où d'elles-mêmes s'imposent les questions et la manière de les traiter, serait bien difficile à renouveler au point de ne pas éveiller de réminiscences dans l'esprit du lecteur. Augmenter le plus possible la précision et la généralité des résultats, afin de les rendre immédiatement applicables, alléger les calculs sans sacrifier la rigueur, je n'ai pas recherché d'autre but.

(¹) M. Blumenthal a repris la question dans un Livre de la Collection de monographies sur la théorie des fonctions : *Leçons sur les fonctions entières d'ordre infini,* qui est encore sous presse au moment où j'écris ces lignes.

CHAPITRE I.

LA VARIATION DU MODULE D'UN FACTEUR PRIMAIRE.

Nous étudierons successivement la répartition, l'évaluation et le classement des maxima et minima du module d'un facteur primaire; leurs valeurs, quand le degré de l'exponentielle contenue dans ce facteur devient infiniment grand; enfin, des expressions approchées et simples de ces nombres.

Répartition des maxima et minima du module.

1. Selon la notation habituelle, nous écrivons

$$\mathrm{E}(x, p) = (1 - x)e^{x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^p}{p}}.$$

Nous nous proposons de chercher les points d'un cercle $|x| = u$ où $|\mathrm{E}(x, p)|$ passe par un maximum ou un minimum quand le point représentatif de la variable $x = ue^{i\theta}$ décrit ce cercle. Posons

$$\log \mathrm{E}(x, p) = \mathrm{U}(u, \vartheta) + i\,\mathrm{V}(u, \vartheta).$$

D'après $\mathrm{U} = \log|\mathrm{E}|$, nous cherchons les points où $\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \vartheta} = 0$.

Pour calculer $\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \vartheta}$, nous remarquons que la dérivée de $\log \mathrm{E}$, en un point x_0, est la même, quelle que soit la façon dont x tend vers x_0. Si x se déplace suivant le cercle $|x| = u$, on a $dx = ix\,d\theta$ et

$$ix \frac{d \log \mathrm{E}}{dx} = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \vartheta} + i \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \vartheta}.$$

Pour un déplacement normal à ce cercle, $dx = \frac{x}{u}\,du$, et

$$\frac{x}{u} \frac{d \log \mathrm{E}}{dx} = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial u} + i \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial u}.$$

En égalant dans les deux relations les parties réelles et les parties imaginaires, en remarquant que $\dfrac{d \log E}{dx} = -\dfrac{x^p}{1-x}$, on trouve

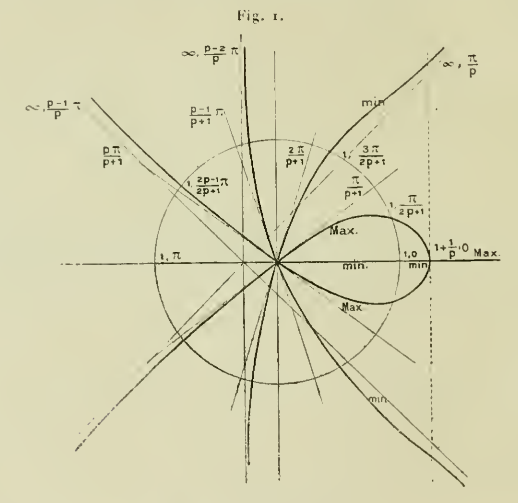
$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = u^{p+1} \frac{\sin(p+1)\theta - u \sin p\theta}{1 - 2u\cos\theta + u^2},$$

$$\frac{\partial U}{\partial u} = u^p \frac{u \cos p\theta - \cos(p+1)\theta}{1 - 2u\cos\theta + u^2}.$$

Nous ne nous intéresserons qu'à $\dfrac{\partial U}{\partial \theta}$.

L'équation $\dfrac{\partial U}{\partial \theta} = 0$ qui nous donne les maxima et minima de U sur le cercle $|x| = u$, se réduit à $\sin(p+1)\theta - u \sin p\theta = 0$. Elle est vérifiée pour $\theta = 0$ et $\theta = \pi$ (nous nous bornons au champ $-\pi \leqq \theta \leqq +\pi$).

Fig. 1.



Pour une valeur quelconque de θ différant de celles-là et n'annulant pas $\sin p\theta$, on a

$$u = \frac{\sin(p+1)\theta}{\sin p\theta}.$$

C'est l'équation polaire d'une courbe que nous allons construire.

2. Le changement de θ en $\theta+\pi$ change u en $-u$ et redonne le même point. Donc, sur une droite arbitraire passant par l'origine, il n'y a qu'un point de la courbe. Nous l'obtiendrons toute en faisant varier θ de o à π.

La courbe possède à l'origine un point multiple d'ordre p, dont les tangentes sont données par

$$\theta = \frac{h\pi}{p+1} \qquad (h = 1, 2, \ldots, p).$$

Elle a $p-1$ directions asymptotiques $\theta = \frac{h\pi}{p}$, $h = 1, 2, \ldots, p-1$. Ces dernières valeurs de θ alternent avec les précédentes. On a

$$\frac{h\pi}{p} < \frac{h+1}{p+1}\pi < \frac{h+1}{p}\pi < \frac{h+2}{p+1}\pi \ldots,$$

u est positif pour $\frac{h-1}{p}\pi < \theta < \frac{h}{p+1}\pi$ et négatif pour $\frac{h}{p+1}\pi < \theta < \frac{h}{p}\pi$, h étant l'un des nombres $1, 2, \ldots, p$.

Cherchons les maxima et minima de u,

$$\frac{du}{d\theta} = u\left[\frac{p+1}{\operatorname{tang}(p+1)\theta} - \frac{p}{\operatorname{tang} p\theta}\right].$$

En étudiant par le théorème de Rolle l'équation

$$\frac{1}{p}\operatorname{tang} p\theta = \frac{1}{p+1}\operatorname{tang}(p+1)\theta,$$

on constate que la fonction $\frac{du}{d\theta}$ s'annule seulement pour $\theta = h\pi$, et qu'elle change de signe pour ces valeurs. Elle devient infinie sans changer de signe pour $p\theta = h\pi$ $(h = 1, 2, \ldots, p-1)$. Elle a donc un signe constant pour $0 < \theta < \pi$. Ce signe est le signe *moins*.

La branche de courbe correspondant à θ très petit et positif tend vers le point $\theta = 0$, $u = 1 + \frac{1}{p}$, qui est le seul où la courbe possède une tangente perpendiculaire au rayon vecteur.

Pour achever la construction de la courbe, on peut remarquer qu'elle possède $p-1$ asymptotes, passant par le point $\left(\frac{1}{p}, \pi\right)$. Il peut être utile d'avoir ses points d'inflexion, puisqu'à partir du dernier point

de cette sorte une branche de courbe se rapproche constamment de son asymptote.

Les points d'inflexion sont donnés par

$$\tan g(p+1)\theta = (p+1)\tan g\,\theta.$$

Ils se trouvent par suite aux points de rencontre de la courbe avec la tangente

$$u\cos\theta = 1 + \frac{1}{p}.$$

Enfin, elle passe par les points

$$u = 1, \qquad \theta = \frac{2h+1}{2p+1}\pi$$
$$(h = 1, 2, \ldots, p-1).$$

J'ai construit cette courbe ([1]) dans l'hypothèse $p = 4$.

Valeurs des maxima et minima.

3. La courbe $\frac{\partial U}{\partial \theta} = 0$ étant construite, voici les résultats qu'elle nous fournit. Pour une valeur positive de u, désignons par Θ_i l'argument compris entre $-\pi$ et $+\pi$ d'un point du cercle $|x| = u$, où U passe par un maximum; par θ_i l'argument correspondant à un minimum. On a maximum ou minimum selon le signe de $\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}$ ou de $\frac{\partial}{\partial \theta}\overline{\sin(p+1)\theta - u\sin p\theta}$. Ce signe est celui de $\sin p\theta$, si $\theta \neq h\pi$.

([1]) Cette courbe paraît être intéressante à d'autres titres. Ajoutons-lui les demi-droites $\theta = 0$ et $\theta = \pi$; puis supprimons d'une entre autres les branches infinies, en commençant par $\theta = 0$. Nous conservons encore la branche en forme de boucle. Alors, l'équation $1 - x + ax^{p+1} = 0$ où $p \geq 1$ a une racine et une seule dans chacune des $(p+1)$ régions en lesquelles nous nous trouvons avoir divisé le plan. En particulier, l'une des racines a son module inférieur à $1 + \frac{1}{p}$, et *par suite à* 2, *quel que soit* $p \geq 1$ (propriété démontrée par M. Landau dans *Vierteljahrschrift der N. G. in Zürich*, t. LI, p. 316; *voir* aussi *Annales de l'École Normale*, 3e série, t. XXIV, mai 1907).

Sur une même branche de la courbe on a constamment soit un maximum, soit un minimum. Les branches à maximum alternent avec les branches à minimum. On a

$$0 < \Theta_1 < \frac{\pi}{p+1} \quad \text{pour} \quad u < 1 + \frac{1}{p}, \qquad \Theta_1 = 0 \quad \text{pour} \quad u > 1 + \frac{1}{p},$$

$$\frac{2\pi}{p} < \Theta_2 < \frac{3\pi}{p+1}, \qquad \ldots, \qquad \frac{2i\pi}{p} < \Theta_i < \frac{2i+1}{p+1}\pi, \qquad \ldots$$

$$\left[p \text{ pair} : \Theta_{\frac{p}{2}} = \pi;\ p \text{ impair} : i = \frac{p-1}{2}\right].$$

Le changement de θ en $-\theta$ pour une même valeur de u nous donnant la même valeur pour $U(u, \theta)$, on aura des maxima pour les arguments $\Theta_{-i} = -\Theta_i$, qui sont compris dans les intervalles symétriques des précédents par rapport à 0 :

$$-\frac{2i\pi}{p} > \Theta_{-i} > -\frac{2i+1}{p+1}\pi.$$

De même

$$\theta_1 = 0 \qquad \text{pour} \qquad u < 1 + \frac{1}{p};$$

et

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{2h-1}{p}\pi < \theta_h < \dfrac{2h}{p+1}\pi \\ -\dfrac{2h-1}{p}\pi > \theta_{-h} > -\dfrac{2h}{p+1}\pi \end{array}\right\} \quad \left\{\begin{array}{l} p \text{ pair} : h = 1, 2, \ldots, \dfrac{p}{2} \\ p \text{ impair} : \theta_{\frac{p+1}{2}} = \pi \end{array}\right\}.$$

Ainsi pour $j = 1, 2, \ldots, p$ il n'y a ni maximum ni minimum dans les angles formés de demi-droites

$$\frac{j\pi}{p+1} < \theta < \frac{j\pi}{p} \qquad \text{ou} \qquad -\frac{j\pi}{p+1} > \theta > -\frac{j\pi}{p}.$$

Enfin, quand u croît, les valeurs positives de θ_i ou Θ_i décroissent toujours.

Nous désignerons par $M_i(u)$ le nombre $U(u, \theta)$ où θ est remplacé par la fonction Θ_i de u. De même, nous posons

$$m_i(u) = U(u, \theta_i).$$

On a

$$M_i = M_{-i}$$

et

$$m_i = m_{-i}.$$

Dans ce qui suivra, nous ne considérerons que les valeurs de θ telles que $0 \leqq \theta \leqq \pi$.

4. Cherchons les expressions de M_i et de m_i. Quelle que soit la fonction $\theta(u)$, on a

$$\frac{d}{du}U(u, \theta) = \frac{\partial U}{\partial u} + \frac{\partial U}{\partial \theta}\frac{d\theta}{du}.$$

Si $U(u, \theta) = \mu(u)$, μ étant un maximum ou un minimum, comme $\frac{\partial U}{\partial \theta} = 0$, il reste

$$\frac{d\mu(u)}{du} = \frac{\partial U}{\partial u} = u^p \frac{u\cos p\theta - \cos(p+1)\theta}{1 - 2u\cos\theta + u^2}.$$

Supposons $\theta \neq 0$ et $\theta \neq \pi$. Remplaçons, dans cette fraction, u par $\frac{\sin(p+1)\theta}{\sin p\theta}$. Le numérateur devient $\frac{\sin\theta}{\sin p\theta}$. Le dénominateur multiplié par $\sin^2 p\theta$ est le carré du troisième côté d'un triangle dont les deux autres côtés sont $\sin p\theta$ et $\sin(p+1)\theta$, l'angle compris étant θ. Une construction simple dans le cercle trigonométrique (ou le calcul direct) montre que le troisième côté est $\sin\theta$. Toutes réductions faites, il vient

$$\frac{d\mu(u)}{du} = u^p \frac{\sin p\theta}{\sin\theta},$$

$$\mu(u) = \int_0^u u^p \frac{\sin p\theta}{\sin\theta} du,$$

où θ est l'une des fonctions Θ_i ou θ_i différentes de 0 et de π. $\mu(u)$ *se trouve donc mis sous la forme d'une intégrale curviligne prise le long de la branche correspondante de la courbe construite au paragraphe* 2.

Si $\theta = \pi$,

$$U(u, \pi) = -u + \frac{u^2}{2} + \ldots + (-1)^p \frac{u^p}{p} + L(u+1);$$

$$\frac{\partial U(u, \pi)}{\partial u} = (-1)^p \frac{u^p}{1+u}.$$

Donc, $\mu(u)$ pour $\theta = \pi$ est égal à

$$(-1)^p \int_0^u \frac{u^p}{1+u} du.$$

Si $\theta = 0$,

$$U(u, 0) = u + \frac{u^2}{2} + \ldots + \frac{u^p}{p} + L(1-u);$$

$$\frac{\partial U}{\partial u} = \frac{u^p}{u-1}.$$

Donc, si $u < 1$,

$$m_1(u) = -\int_0^u \frac{u^p}{1-u}\,du$$

pour

$$1 < u < 1 + \frac{1}{p}, \qquad m_1(u) = \int_A^u \frac{u^p}{u-1}\,du,$$

A étant la racine de $U(u, 0) = 0$, elle-même comprise entre 1 et $1 + \frac{1}{p}$. Pour $u \geqq 1 + \frac{1}{p}$, on a

$$\int_A^u \frac{u^p}{u-1}\,du = M_1(u),$$

tandis que

$$M_1(u) = \int_0^u u^p \frac{\sin p\Theta_1}{\sin\Theta_1}\,du \qquad \text{pour} \qquad u < 1 + \frac{1}{p}.$$

Relations de grandeur des différents maxima et minima.

5. Réservons momentanément les cas $\theta = 0$ et $\theta = \pi$. Je dis que, pour une même valeur de u, deux maxima ou minima quelconques ne peuvent être égaux en valeur absolue si $u = 0$.

Nous allons montrer que, θ et θ' étant deux fonctions de u distinctes et satisfaisant à l'équation $\frac{\partial U}{\partial \theta} = 0$, il est impossible que les *coefficients différentiels des fonctions* $\mu(u)$ *et* $\mu'(u)$ *correspondantes soient jamais égaux en valeur absolue* pour $u > 0$. Nous en conclurons que celui qui est le plus grand en valeur absolue au départ le restera toujours. D'ailleurs, le signe de chacun de ces coefficients différentiels est invariable, puisque c'est celui de $\sin p\theta$ ou de $\sin p\theta'$ et que θ et θ' restent chacun compris entre deux multiples consécutifs fixes de $\frac{\pi}{p}$. Donc les valeurs absolues des fonctions $\mu(u)$ correspondantes resteront dans le même ordre relatif de grandeur.

Il s'agit de montrer l'impossibilité de

$$\frac{\sin p\theta}{\sin\theta} = \pm \frac{\sin p\theta'}{\sin\theta'},$$

θ et θ' correspondant à une même valeur de u.

Nous sommes amenés à étudier les équations

$$\varepsilon\frac{\sin\theta}{\sin\theta'} = \frac{\sin p\theta}{\sin p\theta'} = \frac{\sin(p+1)\theta}{\sin(p+1)\theta'}, \qquad \varepsilon^2 = 1.$$

Nous supposons que chacun des termes de ces fractions soit différent de zéro, car nous excluons

$$u = 0, \qquad u = \infty, \qquad \theta \text{ ou } \theta' = 0, \qquad \theta \text{ ou } \theta' = \pi.$$

Nous allons montrer plus simplement que par le calcul l'impossibilité des relations ci-dessus, sauf pour $\theta = \theta'$.

Étant donné, dans un plan où a été choisi un sens positif pour les rotations, un triangle ABC dont les côtés sont des axes dirigés portant des numéros d'ordre 1, 2, 3; si l'on désigne par (2, 3) l'angle défini à un multiple de 2π près dont il faut faire tourner l'axe 2 pour l'amener en coïncidence (position et sens) avec l'axe 3, par (3, 1) et (1, 2) les angles de rotation qui permettent d'amener respectivement en coïncidence 3 avec 1, 1 avec 2; si a, b, c mesurent algébriquement les *segments* $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$, comptés sur les axes dirigés qui les portent, en projetant ces derniers sur des axes perpendiculaires aux premiers, on vérifie que

$$\frac{a}{\sin(2,3)} = \frac{b}{\sin(3,1)} = \frac{c}{\sin(1,2)}.$$

Cela étant, je me donne un axe 1; sur cet axe, un point C. Autour de C, je fais tourner dans le sens positif l'axe 1 de l'angle $-(p+1)\theta$. Sur l'axe 2 ainsi obtenu je porte un segment $\overline{CA} = b$, b étant un nombre algébrique arbitraire. Autour du point A, je fais tourner l'axe 2 d'un angle égal à $p\theta$. L'intersection de ce nouvel axe 3 avec 1 me donne un point B à distance finie. Car

$$(3,1) = (3,2) + (2,1) + 2h\pi = \theta + 2h\pi.$$

Le triangle ABC est un vrai triangle, car ses angles diffèrent de $k\pi$.

Soient $a = \overline{BC}$, $b = \overline{CA}$, $c = \overline{AB}$ ses côtés, mesurés algébriquement sur les axes qui les portent. On a

$$\frac{b}{\sin \theta} = \frac{a}{\sin p\theta} = \frac{c}{-\sin(p+1)\theta}.$$

Je refais la même construction en remplaçant θ par θ', et en partant du même axe 1, du même point C et du nombre εb. Le triangle A′B′C obtenu est un vrai triangle, et, si ses côtés mesurés algébriquement sont

$$a' = \overline{B'C}, \qquad b' = \overline{CA'}, \qquad c' = \overline{A'B'},$$

on a

$$\frac{b'}{\sin \theta'} = \frac{a'}{\sin p\theta'} = \frac{c'}{-\sin(p+1)\theta}.$$

Donc

$$\frac{\varepsilon b}{b'} = \frac{a}{a'} = \frac{c}{c'}.$$

Comme $b' = \varepsilon b$, on a $a = a'$, $c = c'$. L'égalité $a = a'$ montre que B′ est en B, puisque les segments $\overline{BC}$ et $\overline{B'C}$ portés par le même axe ont même extrémité et même mesure. Les deux triangles ayant leurs côtés égaux en longueur, deux côtés homologues et deux couples de sommets homologues coïncidant, coïncident ou sont symétriques par rapport au côté commun. D'après $c = c'$, l'axe 3′ coïncide (en tenant compte des sens) avec 3 ou avec son symétrique par rapport à 1. Comme $(3, 1) = \theta + 2h\pi$, $(3', 1) = \theta' + 2h\pi$, on a $\theta = \theta' + 2h\pi$, ou $\theta + \theta' = 2h\pi$.

On peut sans ignorer de fonction $\mu(u)$ supposer $0 \leqq \theta \leqq \pi$. Comme dans le raisonnement actuel, nous excluons les extrémités de l'intervalle, il n'y a d'autre solution que $\theta = \theta'$.

Il est donc impossible que, pour une valeur quelconque de $u \neq 0$, deux fonctions $\mu(u)$ ne correspondant ni à $\theta = 0$ ni à $\theta = \pi$ aient leurs éléments différentiels égaux en valeur absolue.

Si $\theta = 0$, le coefficient différentiel de l'une des deux fonctions $\mu(u)$ ($\mu = m_1$ et $\mu = M_1$) est $\dfrac{u^p}{u-1}$ qui conserve un signe constant entre 0 et 1 d'une part, entre 1 et l'infini d'autre part. Si $\theta = \pi$, le coefficient différentiel $(-1)^p \dfrac{u^p}{1+u}$ garde un signe constant.

On trouve facilement que l'égalité

$$\frac{u^p}{u-1} = \pm u^p \frac{\sin p\theta}{\sin\theta}$$

entraîne

$$\sin p\theta \sin(p+1)\theta = 0.$$

Mêmement, si $\frac{u^p}{u-1}$ est remplacé par $\frac{u^p}{u+1}$.

Pareillement

$$\frac{u^p}{1-u} = \frac{u^p}{1+u}$$

n'a d'autres solutions que $u = 0$ et $u = \infty$.

En résumé, les dérivées de deux fonctions $\mu(u)$ quelconques ne peuvent être égales en valeur absolue pour une même valeur de u.

6. Examinons leur ordre relatif de grandeur pour u infiniment petit; on a

$$U(u, \theta) = -\frac{u^{p+1}}{p+1}\cos(p+1)\theta - \frac{u^{p+2}}{p+2}\cos(p+2)\theta \ldots.$$

D'autre part, d'après le théorème des fonctions implicites, l'équation $u = \frac{\sin(p+1)\theta}{\sin p\theta}$ a une racine $\theta(u)$ prenant la valeur $\frac{h\pi}{p+1}$ pour $u = 0$ et holomorphe en u autour de $u = 0$. Si

$$\theta = \frac{k\pi}{p+1} + \mathrm{A}u + \ldots,$$

$$\cos(p+1)\theta = (-1)^k(1 + \mathrm{A}'u^2 + \ldots),$$

$$\cos(p+2)\theta = (-1)^k \cos\frac{k\pi}{p+1} + \mathrm{A}''u + \ldots,$$

$$\mu(u) = (-1)^{k+1}\left(\frac{u^{p+1}}{p+1} + \frac{u^{p+2}}{p+2}\cos\frac{k\pi}{p+1} + \ldots\right).$$

La classification est évidente au voisinage de l'origine. Donc,

$$M_1(u) > -m_2(u) > \ldots > -M_i(u) > -m_i(u) > \ldots.$$

Pour $M_1(u)$, il est utile de remarquer que l'élément différentiel revêt deux formes $u^p\frac{\sin p\theta}{\sin\theta}$ et $\frac{u^p}{u-1}$, suivant que u est inférieur ou

supérieur à $1+\frac{1}{p}\cdot$ On constate que le coefficient différentiel $\frac{u^p}{u-1}$ est supérieur aux valeurs absolues de ceux de tous les $\mu(u)$ qui correspondent à la même valeur de $u > 1+\frac{1}{p}$, en faisant la comparaison pour u infini. D'ailleurs les deux valeurs du coefficient de $M_1(u)$ coïncident pour $u = 1+\frac{1}{p}\cdot$ La place de $M_1(u)$ dans la suite est donc justifiée pour toutes les valeurs de u.

Examinons celle qu'il convient d'attribuer à $-m_1$. Pour $u \leqq 1$, on a

$$-m_1 > M_1(u).$$

Entre $u=1$ et $u = 1+\frac{1}{p}$, la fonction $-m_1(u)$ décroît de $+\infty$ à $-M_1\left(1+\frac{1}{p}\right)\cdot$ Elle coïncide donc successivement avec tous les termes de la suite ci-dessus. En particulier, pour $u = 1+\frac{\delta_p}{p}$, on a $m_1(u) = m_2(u)$. ($0 < \delta_p < 1$, et nous verrons que δ_p tend vers une limite pour p infini.)

7. Donc, pour $u < 1+\frac{\delta_p}{p}$, le *minimum absolu de la fonction* est $m_1(u)$. Pour $u > 1+\frac{\delta_p}{p}$, c'est $m_2(u)$. Pour tous les cas, le *maximum absolu*, que nous désignerons (¹) désormais par $M(u)$ *coïncide avec* $M_1(u)$ qui revêt deux formes différentes suivant que $u < 1+\frac{1}{p}$ ou $u > 1+\frac{1}{p}\cdot$

Pour $u \leqq 1+\frac{1}{p}$,

$$M(u) = \int_0^u u^p \frac{\sin p\theta}{\sin\theta}\,du \qquad \text{avec} \qquad u = \frac{\sin(p+1)\theta}{\sin p\theta'}, \qquad 0 < \theta < \frac{\pi}{p+1},$$

$$u \geqq 1+\frac{1}{p}, \qquad M(u) = u + \frac{u^2}{2} + \ldots + \frac{u^p}{p} + L(u-1) = \int_A^u \frac{u^p}{u-1}\,du.$$

(¹) Dans les deux derniers Chapitres, où il nous sera indispensable de mettre en évidence l'exposant p auquel appartient le facteur primaire considéré, nous désignerons la partie réelle de $\log E(x,p)$ par $U_p(u,\theta)$ et son maximum par $\varphi(u,p)$ de préférence à $M_p(u)$, notation employée plus haut, et qui peut prêter à confusion.

si A annule $u + \ldots + \frac{u^p}{p} + L(u-1)$. Pour $u = 1 + \frac{1}{p}$ les deux expressions de $M(u)$ coïncident et ont la même dérivée.

Le minimum $-m(u)$ de la fonction est [$m(u)$ est toujours positif]

$$\text{pour} \quad u < 1, \qquad u + \frac{u^2}{2} + \ldots + \frac{u^p}{p} + L(1-u) = -\int_0^u \frac{u^p}{1-u}\,du,$$

$$1 < u < 1 + \frac{\delta_p}{p}, \qquad u + \frac{u^2}{2} + \ldots + \frac{u_p}{p} + L(1-u) = -\int_u^A \frac{u^p}{u-1}\,du,$$

$$1 + \frac{\delta_p}{p} < u, \qquad \int_0^u u^p \frac{\sin p\theta}{\sin\theta}\,du, \qquad u = \frac{\sin \overline{p+1}\,\theta}{\sin p\theta}, \qquad \frac{\pi}{p} < \theta < \frac{2\pi}{p+1},$$

δ_p étant déterminée par la condition que les deux expressions du minimum soient égales. Mais leurs dérivées sont différentes, car elles sont de signes contraires, $m_2(u)$ est toujours décroissant, $m_1(u)$ croît pour $u > 1$.

Expressions approchées du maximum.

8. En vue des applications, il nous est indispensable d'obtenir, pour $M(u)$ et $m(u)$, des limites supérieures douées d'expressions simples et restant si possible dans un rapport fini avec les fonctions qu'elles limitent.

M. Lindelöf a montré que, τ étant un nombre quelconque compris entre p et $p+1$ ou égal à l'un de ces nombres, il existe un nombre A tel que

$$M(u) < A u^\tau.$$

Désignons plus spécialement par A_τ la limite inférieure de toutes les valeurs possibles de A pour une valeur déterminée de τ. On a

$$M(u) \leqq A_\tau u^\tau,$$

l'égalité ayant lieu au moins pour une valeur de u. La notation A_p est ambiguë, car elle peut convenir également à deux nombres, l'un relatif à $E(x, p)$, l'autre à $E(x, p-1)$. Ce dernier sera désigné par A'_p, la notation A_p étant réservée au premier. Nous allons étudier le nombre A_τ. *Nous constaterons qu'on a toujours* $A_\tau < 1$, en sorte que $M(u) < u^\tau$, *quel que soit p supérieur à* 1.

Nous verrons que A_τ *tend, quand p devient infini, vers une limite positive inférieure à* 1, et nous étudierons dans quelle zone le rapport $\frac{A_\tau u^\tau}{M(u)}$ reste fini, non seulement par la variation de u, mais même p croissant indéfiniment. En dehors de cette zone, nous devrons chercher une nouvelle limite supérieure $G(u)$ de $M(u)$, de telle sorte que $\frac{G(u)}{M(u)}$, où G et M dépendent de u et de p, *reste compris entre des constantes numériques fixes, quels que soient u et p.*

9. A_τ est la limite inférieure des nombres A tels que

$$\varphi(u) = A u^\tau - M(u) \geqq 0.$$

Pour

$$0 < u \leqq 1 + \frac{1}{p}, \qquad M(u) = \int_0^{\tau u} u^p \frac{\sin p\theta}{\sin\theta}\, d\theta$$

avec

$$u = \frac{\sin(p+1)\theta}{\sin p\theta}, \qquad 0 < \theta < \frac{\pi}{p+1}.$$

Pour

$$u \geqq 1 + \frac{1}{p}, \qquad M(u) = u + \frac{u^2}{2} + \ldots + \frac{u^p}{p} + L(u-1).$$

Déterminons d'abord la limite inférieure de A tel que $\varphi(u) \geqq 0$ pour $u \leqq 1 + \frac{1}{p}$.

Pour u infiniment petit, si $\tau < p + 1$ ou, avec $\tau = p + 1$, si $A > \frac{1}{p+1}$, le premier membre est d'abord positif et croissant. Examinons le sens de sa variation. On a

$$\varphi'(u) = \tau A_\tau u^{\tau-1} - u^p \frac{\sin p\theta}{\sin\theta}.$$

Le signe de $\varphi'(u)$ est celui de

$$\tau A_\tau - u^{p+1-\tau} \frac{\sin p\theta}{\sin\theta} = \varphi_1(u).$$

Or, $\frac{\sin p\theta}{\sin\theta}$ décroît $(p > 1)$ quand θ croît, c'est-à-dire croît avec u. En effet, la dérivée de cette fonction de θ est

$$\frac{\sin p\theta}{\sin\theta}\left(\frac{p}{\operatorname{tang} p\theta} - \frac{1}{\operatorname{tang}\theta}\right).$$

Le premier facteur est positif. puisque $o < \theta < \frac{\pi}{p+1}\cdot$ Quant au second, il est négatif. Nous avons déjà séparé ses racines. Il n'en possède pas dans l'intervalle o à $\frac{\pi}{p}\cdot$

$\varphi_1(u)$ décroît donc toujours. Donc φ_1 et par suite $\varphi'(u)$ s'annulent une fois au plus, quand u varie de o à $1+\frac{1}{p}\cdot$ Donc, $\varphi(u)$, d'abord croissant, ou bien croît constamment dans l'intervalle, ou bien possède uniquement un maximum. Comme $\varphi(u)$ commence par être positif, pour qu'il le soit constamment dans l'intervalle o à $1+\frac{1}{p}$, il faut et il suffit qu'il le soit pour $u = 1+\frac{1}{p}\cdot$ La condition qui résout $\varphi(u) \geqq 0$ pour $u < 1+\frac{1}{p}$ est donc

$$(1) \qquad A\left(1+\frac{1}{p}\right)^{\tau} \geqq \psi(p),$$

en posant

$$\psi(p) = u + \frac{u^2}{2} + \ldots + \frac{u^p}{p} + L(u-1) \qquad \text{pour} \qquad u = 1+\frac{1}{p}\cdot$$

Il est facile de voir que A_τ décroît constamment avec $\frac{1}{\tau}$, pour une valeur donnée de p. En effet, si $B_\tau = \frac{\psi(p)}{\left(1+\frac{1}{p}\right)^{\tau}}$ (B'_p correspond à A'_p), si C_τ est le maximum de $\frac{M(u)}{u^\tau}$ pour $u > 1+\frac{1}{p}$, A_τ est le plus grand des nombres B_τ et C_τ. Or, ces deux nombres décroissent manifestement si τ va en croissant de p à $p+1$. Les conclusions précédentes restent valables pour $p = 1$.

10. Nous avons maintenant à résoudre l'inégalité

$$\varphi(u) = A u^\tau - M(u) \geqq 0$$

pour $u \geqq 1+\frac{1}{p}\cdot$ Cette différence, si nous donnons à A la valeur $B_\tau = \frac{\psi(p)}{\left(1+\frac{1}{p}\right)^{\tau}}$, est d'abord nulle. Le signe de $\varphi(u)$, quand u dépasse la valeur $1+\frac{1}{p}$, est donc celui de $\varphi'(u)$. Je dis que l'hypothèse $A = B_\tau$

entraîne $\varphi'\left(1+\frac{1}{p}\right)<0$ si $p \geqq 2$, en sorte que B_τ est une valeur trop faible pour A.

La relation à montrer est

$$0>\varphi'(u)=\tau A u^{\tau-1}-\frac{u^p}{u-1}$$

pour

$$A u^\tau = B_\tau u^\tau = \psi(p), \qquad u=1+\frac{1}{p}, \qquad p \leqq \tau \leqq p+1.$$

Il faut donc montrer

$$0>(p+1)\frac{\psi(p)}{u}-\frac{u^p}{u-1},$$

ou, d'après les valeurs de $\psi(p)$ et de u,

$$(2) \qquad u+\frac{u^2}{2}+\ldots+\frac{u^p}{p}+L(u-1)<u^p \qquad \text{pour} \qquad u=1+\frac{1}{p}.$$

C'est à la démonstration de l'inégalité (2) que se réduiront toutes les difficultés soulevées par la détermination de A_τ. Calculons $\psi(p)$.

Dans le polynome

$$u+\frac{u^2}{2}+\ldots+\frac{u^p}{p}=f(u),$$

posons $u=1+t$. On a

$$f(u)=f(1)+t f'(1)+\ldots+t^p \frac{f^{(p)}(1)}{p!},$$

$$\begin{aligned} f^{(h)}(1)=&(p-1)(p-2)\ldots(p-h+1)\\ &+(p-2)\ldots(p-h)+\ldots+(h-1)\ldots 2.1,\end{aligned}$$

$$\frac{f^{(h)}(1)}{(h-1)!}=C_{p-1}^{h-1}+C_{p-2}^{h-1}+\ldots+C_{h-1}^{h-1},$$

C_m^n étant le nombre des combinaisons de m objets n à n.

Or, soient p objets A, B, ..., L à combiner h à h. Le nombre des combinaisons qui contiennent A est égal au nombre des combinaisons des objets B, C, ..., $h-1$ à $h-1$, soit C_{p-1}^{h-1}. Le nombre des combinaisons qui, ne contenant pas A, contiennent B est celui des combinaisons de C, ..., L, $h-1$ à $h-1$, soit C_{p-2}^{h-1}, et ainsi de suite. La

somme du second membre est donc C_p^h. Donc

$$\frac{f^{(h)}(1)}{h!} = \frac{C_p^h}{h} \qquad \text{avec} \qquad C_p^h = \frac{p(p-1)\ldots(p-h+1)}{h!},$$

$$f(u) = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{p} + \sum_{h=1}^{h=p} \frac{C_p^h}{h} t^p.$$

Posons $t = \frac{\alpha}{p}$. Pour avoir $\psi(p)$, il nous suffira de faire $\alpha = 1$,

$$f\left(1+\frac{\alpha}{p}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{p} + \frac{\alpha}{1} + \frac{1-\frac{1}{p}}{2}\frac{\alpha^2}{2} + \frac{\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{2}{p}\right)}{2.3}\frac{\alpha^3}{3} + \ldots$$
$$+ \frac{\left(1-\frac{1}{p}\right)\cdots\left(1-\frac{h-1}{p}\right)}{h!}\frac{\alpha^h}{h} + \ldots + \frac{\left(1-\frac{1}{p}\right)\cdots\left(1-\frac{p-1}{p}\right)}{p!}\frac{\alpha^p}{p}.$$

Ajoutons $\operatorname{Log}(u-1)$. Il vient

$$U\left(1+\frac{\alpha}{p}, 0\right) = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{p} - Lp + L\alpha + \alpha$$
$$+ \sum_{h=2}^{h=p} \frac{\left(1-\frac{1}{p}\right)\cdots\left(1-\frac{h-1}{p}\right)}{h!}\frac{\alpha^h}{h}.$$

Or, le nombre $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{p} - Lp$ est constamment $(p \geqq 2)$ plus petit que 1 et d'ailleurs supérieur à C, constante d'Euler, vers laquelle il tend pour p infini.

Dans l'inégalité (2) $\left(\text{à démontrer pour } u = 1 + \frac{1}{p} \text{ seulement}\right)$ nous avons donc l'expression du premier membre, qui est égal à $U\left(1+\frac{1}{p}, 0\right)$. Le second membre de (2) pour $u = 1 + \frac{\alpha}{p}$ est

$$1 + \alpha + \sum_{h=2}^{h=p} \frac{\left(1-\frac{1}{p}\right)\cdots\left(1-\frac{h-1}{p}\right)}{h!}\alpha^h.$$

Il est manifeste, en comparant les deux expressions, que $U(u, 0) < u^h$ pour $u = 1 + \frac{\alpha}{p}$, si $\alpha \leqq 1$. Car, si $\alpha \leqq 1$, on a $L\alpha \leqq 0$, et quel que soit p

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{p} - Lp < 1.$$

L'inégalité (2) est donc démontrée pour $u \leq 1 + \frac{1}{p}$, par suite $B_\tau < A_\tau$. Si $p = 1$, l'inégalité (2) est remplacée par l'égalité pour $u = 1 + \frac{1}{p}$.

11. Ouvrons une brève parenthèse au sujet de la valeur de $U\left(1 + \frac{\alpha}{p}, 0\right)$. Quand p devient infiniment grand, l'expression de U tend en croissant toujours vers la limite suivante :

$$C + L\alpha + \frac{\alpha}{1} + \frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{2} + \ldots + \frac{1}{2.3\ldots h}\frac{\alpha^h}{h} + \ldots = C + L\alpha + \int_0^\alpha \frac{e^\alpha - 1}{\alpha} d\alpha.$$

Ceci est égal au *logarithme intégral* de α. *On a donc*

$$Li\alpha = \lim_{p=\infty}\left[u + \frac{u^2}{2} + \ldots + \frac{u^p}{p} + L(u-1)\right]$$

pour $u = 1 + \frac{\alpha}{p}$, *de même que* $e^\alpha = \lim_{p=\infty} u^p$.

Si l'on considère la racine réelle α_0 comprise entre 0 et 1 de l'équation $Li\alpha = 0$, la racine de $U(u, 0)$, réelle et comprise entre 1 et $1 + \frac{1}{p}$, est supérieure à $1 + \frac{\alpha_0}{p}$.

12. Revenons au choix de A_τ. Nous devons le supposer supérieur à B_τ, et le déterminer par la condition que le minimum de

$$\varphi(u) = A_\tau u^\tau - M(u)$$

soit nul, u étant supposé supérieur à $1 + \frac{1}{p}$.

Examinons la dérivée de

$$A u^\tau - M(u) = \varphi(u).$$

$\varphi'(u)$ a le signe de

$$\tau A - \frac{u^{p+1-\tau}}{u-1} = \varphi_1(u).$$

Je dis que $\frac{u^{p+1-\tau}}{u-1}$ décroît toujours. Pour s'en convaincre, il suffit de le vérifier pour τ le plus petit possible, c'est-à-dire pour $\tau = p$, auquel cas le fait est évident. Donc, si au départ cette expression est infé-

rieure à τA, la dérivée $\varphi'(u)$ ne s'annule pas et reste toujours positive. La fonction croît donc toujours, et, comme la valeur de A est supérieure à $\frac{\psi(p)}{u^\tau}$ pour $u = 1 + \frac{1}{p}$, la fonction $\varphi(u)$ est toujours positive. A est alors supérieur à A_τ. Donc, A_τ qui est supérieur à $\frac{\psi(p)}{u^p}$ est inférieur à

$$\frac{u^{p+1-\tau}}{\tau(u-1)}$$

pour $u = 1 + \frac{1}{p}$, c'est-à-dire à $\frac{p}{\tau}\left(1 + \frac{1}{p}\right)^{p+1-\tau}$.

13. Nous allons même montrer que $A_\tau < 1$, quel que soit $p > 2$, et pour cela que $u^\tau > M(u)$.

Il faut d'abord vérifier que $1 > B_\tau$. Or, l'inégalité $1 > \frac{\psi(p)}{u^p}$ pour $u = 1 + \frac{1}{p}$ est précisément l'inégalité (2) démontrée. Donc, $B_\tau < 1$, si $\tau > 1$.

Il nous suffit donc de montrer que, pour $u > 1 + \frac{1}{p}$, $u^p - M(u) = \varphi(u)$ est positif, c'est-à-dire la validité de l'inégalité (2) pour toutes les valeurs de u supérieures à $1 + \frac{1}{p}$. Or, le minimum de $\varphi(u)$ a lieu pour $u = \frac{p}{p-1}$ (nous supposons $p \geqq 2$).

Je dis que

$$u^p > u + \frac{u^2}{2} + \ldots + \frac{u^{p-1}}{p-1} + \frac{u^p}{p} + L(u-1) \qquad \text{pour} \qquad u = 1 + \frac{1}{p-1}.$$

En effet,

$$u^p - \frac{u^p}{p} = u^p \frac{p-1}{p} = u^{p-1}.$$

Nous sommes conduits à démontrer

$$u^{p-1} > u + \frac{u^2}{2} + \ldots + \frac{u^{p-1}}{p-1} + L(u-1) \qquad \text{pour} \qquad u = 1 + \frac{1}{p-1}.$$

Or, c'est l'inégalité (2) où p est diminué d'une unité.

Donc $A_\tau < 1$, si $\tau > 2$. D'ailleurs, $A_2 = 1$.

14. La valeur exacte de A_τ est fournie en écrivant que le minimum

de $\varphi(u)$ est nul. La valeur de u correspondante est telle que

$$\tau A_\tau = \frac{u^{p+1-\tau}}{u-1}.$$

L'équation donnant u est

$$(3) \qquad o = -\frac{1}{\tau}\frac{u^{p+1}}{u-1} + u + \frac{u^2}{2} + \ldots + \frac{u^p}{p} + L(u-1).$$

u vérifiant l'équation (3), A_τ est donné par

$$(4) \qquad A_\tau u^\tau = \frac{1}{\tau}\frac{u^{p+1}}{u-1}.$$

La dérivée du second membre de (3) est toujours positive et ce second membre est positif infiniment grand avec u. Il est négatif pour $u = 1 + \frac{1}{p}\cdot$ Il s'annule donc une fois et une seule pour $u > 1 + \frac{1}{p}\cdot$ Si l'on pose $u = 1 + \frac{\alpha}{p}$, α gardant une valeur fixe, le second membre de l'équation (3) tend vers celui de l'équation

$$(5) \qquad o = -\frac{e^\alpha}{\alpha} + C + L\alpha + \int_0^\alpha \frac{e^\alpha - 1}{\alpha} d\alpha,$$

et cela uniformément dans tout domaine positif fini de α. Cette dernière expression, quand α va de zéro à $+\infty$, varie de $-\infty$ à $+\infty$, et est toujours croissante comme on le voit en la mettant sous la forme

$$C + L\alpha - \frac{1}{\alpha} - 1 + \int_0^\alpha \frac{e^\alpha - 1 - \alpha}{\alpha^2} d\alpha.$$

Elle s'annule une fois, en changeant de signe. La convergence uniforme du second membre de (3) vers celui de (5) montre que l'équation (3) a une racine $1 + \frac{\beta_p}{p}$, telle que β_p tend vers la racine α' de (5). Comme l'équation (3) n'a qu'une racine, cette racine unique se trouve obtenue.

La valeur A_τ tend pour τ infini vers $\frac{1}{\alpha'}\cdot$

On constate facilement que $\alpha' > 1$. On a

$$\alpha' = 1{,}34\ldots$$

15. En résumé, le rapport $\frac{A u^\tau}{M(u)}$ avec $A = 1$, et même, à partir d'une valeur assez grande de p, avec $A = \frac{1}{\alpha'} + \varepsilon$, ε étant positif et fixe, est supérieur à 1, quels que soient u et p. Mais ce rapport croît indéfiniment quand u est infiniment petit si $\tau < p + 1$, et quand u est infiniment grand si $\tau > p$.

Si $\tau = p + 1$, le rapport reste fini [1], p étant fixe, pour $u < k$, k étant un nombre positif fixe arbitraire. Si $\tau = p$, ce rapport est fini pour $u > k$. Donc, pour une valeur de p déterminée, les deux expressions u^{p+1} pour $u < k$ et u^p pour $u > k$ limitent supérieurement et avec des approximations finies $M(u)$.

Seulement ces approximations qui approchent $\frac{1}{p+1}$ pour la première forme, $\frac{1}{p}$ pour la seconde, *ne sont plus finies quel que soit p.* Nous allons, pour les valeurs très grandes et pour les valeurs très petites de u, substituer à $M(u)$ deux limites supérieures dont les rapports à $M(u)$ soient inférieurs à une constante numérique.

Mais auparavant cherchons dans quel domaine le rapport $\frac{u^\tau}{M(u)}$ reste inférieur à un nombre fixe, quand p croît indéfiniment.

16. Tout d'abord, nous remarquons que, *si α est un nombre fixe positif ou négatif, le maximum de $|E(x, p)|$ pour $|x| = 1 + \frac{\alpha}{p}$* $\left[\text{nombre dont le logarithme est } M\left(1 + \frac{\alpha}{p}\right)\right]$ *tend vers une limite quand p croît indéfiniment.*

On trouve aisément que si $\alpha \leqq 1$, dans l'égalité

$$u = 1 + \frac{\alpha}{p} = \frac{\sin \overline{p+1}\,\theta}{\sin p\theta} \qquad \text{avec} \qquad 0 < \theta < \frac{\pi}{p+1},$$

$p\theta$ tend vers β, donné par $\beta \cot \beta = \alpha$ avec $0 \leqq \beta \leqq \pi$.

Cette dernière équation donne $\beta = 0$ pour $\alpha = 1$, $\beta = \frac{\pi}{2}$ pour $\alpha = 0$, $\beta = \pi$ pour $\alpha = -\infty$.

---

(1) Nous dirons, selon l'usage, qu'un nombre variable est *borné*, si sa valeur absolue est inférieure à un nombre fixe calculable. Nous dirons qu'un nombre positif variable est *fini*, si lui et son inverse sont bornés.

On constate que pour $-k \leq \alpha \leq 1$, k étant un nombre positif arbitrairement grand, $u^p \dfrac{\sin p\theta}{p \sin\theta}$ converge uniformément vers $e^\alpha \dfrac{\sin\beta}{\beta}$. On en déduit que

$$M(u) - \int_0^u u^p \frac{\sin p\theta}{\sin\theta}\,du$$

tend vers

$$\mathfrak{M}(\alpha) = \int_{-\infty}^{\alpha} e^\alpha \frac{\sin\beta}{\beta}\,du.$$

En effet, quel que soit ε positif donné, je peux choisir A tel que $\displaystyle\int_{-\infty}^{-A} e^\alpha\,d\alpha < \varepsilon$.

J'aurai alors, d'après $0 < \dfrac{\sin\beta}{\beta} < 1$, si $0 < \beta < \pi$,

$$\int_{\infty}^{-A} e^\alpha \frac{\sin\beta}{\beta}\,d\alpha < \varepsilon.$$

Or, $\dfrac{\sin p\theta}{p\sin\theta} < 1$, si $0 < p\theta < \pi$, et $\left(1 + \dfrac{\alpha}{p}\right)^p < e^\alpha$, quel que soit $\alpha > -p$, d'après $1 + x < e^x$ quel que soit x.

On aura donc, si $p > A$,

$$\int_0^{1-\frac{A}{p}} u^p \frac{\sin p\theta}{\sin\theta}\,du < \varepsilon.$$

Pour montrer qu'à partir d'une certaine valeur de p

$$\left| \mathfrak{M}(\alpha) - M\left(1 + \frac{\alpha}{p}\right) \right| < 2\varepsilon,$$

il suffit de montrer que $\displaystyle\int_{-A}^{\alpha} e^\alpha \frac{\sin\beta}{\beta}\,d\alpha$ est la limite pour p infini de $\displaystyle\int_{1-\frac{A}{p}}^{1+\frac{\alpha}{p}} u^p \frac{\sin p\theta}{\sin\theta}\,du$, ce qui résulte de la convergence uniforme de $u^p \dfrac{\sin p\theta}{p\sin\theta}$ vers $e^\alpha \dfrac{\sin\beta}{\beta}$ dans le domaine $-A < \alpha < 1$.

En particulier pour $u = 1$, α est nul quel que soit p et par suite $M(1)$ tend vers une limite $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^\alpha \frac{\sin\beta}{\beta}\,d\alpha$, quand p croît indéfiniment.

Le module maximum de $E(x, p)$ *sur le cercle* $|x| = 1$ *tend vers une limite pour p infini.* Nous désignerons parfois cette limite par $M_\infty(1)$.

Pour $\alpha > 1$, nous avons vu que *le module maximum de* $E(x, p)$ *sur le cercle* $|x| = 1 + \frac{\alpha}{p}$ *tend vers* $e^{1/\alpha}$ *pour p infini.* $\mathrm{Li}\,\alpha$ est la limite de $M(u)$.

17. D'autre part u^τ tend, quel que soit τ compris entre p et $p+1$, vers e^α. Si donc α reste compris entre des limites numériques, si éloignées soient-elles l'une de l'autre, le rapport $\frac{u^\tau}{M(u)}$ reste lui-même compris entre des limites numériques. Mais l'une de ces limites numériques devient de plus en plus grande quand l'une au moins des limites de α s'éloigne indéfiniment.

En effet, d'après la décroissance de $\frac{\sin\beta}{\beta}$ quand α varie de 1 à $-\infty$,

$$\mathfrak{M}(\alpha) < \frac{\sin\beta}{\beta}\int_{-\infty}^{\alpha} e^\alpha\,d\alpha = e^\alpha\frac{\sin\beta}{\beta}.$$

Donc, pour une valeur fixe de α,

$$\lim \frac{u^\tau}{M(u)} > \frac{\beta}{\sin\beta}.$$

Puisque β tend vers π quand α tend vers $-\infty$, le rapport $\frac{u^\tau}{M(u)}$ ne sera inférieur à un nombre donné, quel que soit p, que si α est supérieur à un nombre calculable au moyen du premier.

De même pour $\alpha > 1$, le rapport $\frac{e^\alpha}{\int_0^\alpha \frac{e^\alpha - 1}{\alpha}\,d\alpha}$ est infiniment grand avec α.

Donc, la limite u^τ ne restera inférieure à $CM(u)$, C étant fixe, qu'entre deux limites $1 - \frac{k}{p}$ et $1 + \frac{h}{p}$, où k et h désignent deux nombres positifs fixes, calculables au moyen de C.

Nous allons donner deux nouvelles expressions approchées de $M(u)$ qui conviendront pour les domaines complétant inférieurement et supérieurement le domaine précédent.

Nouvelles expressions approchées du module maximum.

18. Considérons la fonction, définie pour $u < 1$,

$$G(u) = \frac{1}{p+1}\frac{u^{p+1}}{1-u}.$$

Son développement en série suivant les puissances croissantes de u montre que $G(u) - M(u) > 0$ pour $u > 0$.

Je dis que $\frac{G(u)}{M(u)}$ *croît de* 1 *à* $+\infty$ *quand* u *varie de* 0 *à* 1. Montrons d'abord que l'équation $\frac{G(u)}{M(u)} = \frac{1}{A}$ n'a qu'une racine si $A < 1$.

Dérivons le premier membre $\psi(u)$ de $AG(u) - M(u) = 0$,

$$u^{-p}\psi'(u) = \frac{A}{1-u} + \frac{Au}{(p+1)(1-u)^2} - \frac{\sin p\theta}{\sin\theta}.$$

Le signe de $\psi'(u)$ est celui de

$$\psi_1(u) = A + \frac{Au}{(p+1)(1-u)} - \alpha_u$$

en posant

$$\alpha_u = (1-u)\frac{\sin p\theta}{\sin\theta}.$$

Je dis que α_u décroît constamment. En effet $\alpha_u = \dfrac{-\cos\frac{2p+1}{2}\theta}{\cos\frac{\theta}{2}}$

et $\frac{\pi}{p+1} < \theta < \frac{\pi}{2p+1}$. Quand u croît de 0 à 1, θ décroît de la première de ces limites à la seconde; $-\cos\frac{2p+1}{2}\theta$, qui est toujours positif, décroît; $\cos\frac{\theta}{2}$ croît. Donc α_u, qui est toujours positif, décroît. $\psi_1(u)$ est donc croissant et par suite s'annule une fois au plus. Il y a d'ailleurs bien une racine d'après $\psi_1(0) = A - 1 < 0$, $\psi_1(1) = +\infty$.

Soit $1 + \frac{\beta'}{p}$ cette racine. Le premier membre de

$$A + \frac{A}{p+1}\frac{u}{1-u} - \frac{\sin p\theta}{\sin\theta}(1-u) = 0$$

tend si $u = 1 + \frac{\alpha}{p}$, uniformément pour $-k < \alpha < -h$ (k et h positifs,

fixes et arbitraires), vers celui de

$$A + \frac{A}{-\alpha} + \cos\beta = 0. \tag{1}$$

Cette équation, pour $A < 1$, admet, d'après la croissance de son premier membre pour $\alpha < 0$, une racine α_1 et une seule; β'_p tend vers α_1.

Remontons à l'équation $\psi(u) = AG(u) - M(u) = 0$. Comme $\psi(u)$ est infiniment petit et négatif pour u infiniment petit, infiniment grand positif pour $u = 1$, comme ψ' ne s'annule qu'une fois dans l'intervalle 0 à 1, $\psi(u)$ s'annule une fois et une seule. Soit $1 + \frac{\beta_p}{p}$ sa racine. On a

$$\beta'_p < \beta_p < 0.$$

Il serait aisé de voir que β_p tend vers une limite pour p infini. On a

$$A\,G(u) - M(u) < 0 \quad \text{pour} \quad u < 1 + \frac{\beta_p}{p},$$

$$A\,G(u) - M(u) > 0 \quad \text{pour} \quad u > 1 + \frac{\beta_p}{p}.$$

Donc, le rapport $\frac{G(u)}{M(u)}$ est croissant.

19. On pourrait conclure de ceci qu'il est possible, quelque petit que soit le nombre fixe ε, de calculer K, tel que, à partir d'une certaine valeur de p, on ait

$$\frac{G(u)}{M(u)} < 1 + \varepsilon \quad \text{si} \quad u < 1 - \frac{K}{p}.$$

Nous allons trouver la relation précise d'ordres de grandeur de ε et de K.

Quand u tend vers 1, le rapport croît indéfiniment. Nous allons montrer que *si* $u = 1 + \frac{\alpha}{p}$, *si* $\alpha < -k_1$, k_1 *étant positif, si petit que soit* k_1, *ce rapport est borné*, et, *si* k_1 *est pris suffisamment grand, la limite supérieure du rapport* $\frac{G}{M}$ *tend pour p infini vers un nombre surpassant l'unité d'aussi peu qu'on le voudra.*

Nous avons vu que $\frac{G}{M}$ est croissant. La valeur de ce rapport est donc pour toutes les valeurs de u inférieures à $1 - \frac{k_1}{p}$, compris entre 1 et sa valeur finale. Cherchons la limite de $\frac{G(u)}{M(u)}$ si $u = 1 + \frac{\alpha}{p}$, pour p infini, α étant fixe. Cette limite est

$$\frac{e^\alpha}{-\alpha} \frac{1}{\int_{-\infty}^{\alpha} e^\alpha \frac{\sin\beta}{\beta} d\beta} = \frac{\mathcal{G}(\alpha)}{\mathfrak{M}(\alpha)},$$

en posant

$$\mathcal{G}(\alpha) = \frac{e^\alpha}{-\alpha} = \lim G(u).$$

Intégrons par parties

$$\int_{-\infty}^{\alpha} e^\alpha \frac{\sin\beta}{\beta} d\alpha = e^\alpha \frac{\sin\beta}{\beta} - \int_{-\infty}^{\alpha} e^\alpha \frac{\sin\beta}{\beta} \left(\cot\beta - \frac{1}{\beta}\right) \frac{d\beta}{d\alpha} d\alpha,$$

d'après

$$\beta \cot\beta = \alpha, \qquad \left(\cot\beta - \frac{1}{\beta}\right) \frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{1-\alpha}{\alpha^2 - \alpha + \beta^2}.$$

Donc

$$\int_{-\infty}^{\alpha} e^\alpha \frac{\sin\beta}{\beta} \left(1 + \frac{1-\alpha}{\alpha^2 - \alpha + \beta^2}\right) d\alpha = e^\alpha \frac{\sin\beta}{\beta} = e^\alpha \frac{\cos\beta}{\alpha}.$$

Or, α étant négatif, on a d'abord (¹)

$$\frac{1-\alpha}{\alpha^2 - \alpha + \beta^2} = \frac{1}{-\alpha + \frac{\beta^2}{1-\alpha}} = \frac{\theta}{-\alpha},$$

(¹) Dans tout le cours de ce Mémoire, la signification de la notation θ sera traduite, sauf expresse indication contraire, par les mots *un certain nombre compris entre* 0 *et* 1. En conséquence, θ dans une même expression pourra représenter deux nombres différents, mais compris dans ces limites. Le calcul des nombres θ sera régi par des égalités telles que

$$\theta + \theta = 2\theta, \qquad \theta \times \theta = \theta;$$

a et b étant positifs,

$$\theta a + \theta b = \theta(a + b).$$

Nous utiliserons de la même façon la notation δ, dont la signification sera *un*

expression que nous utiliserons pour les grandes valeurs de α, et

$$\frac{1-\alpha}{\alpha^2-\alpha+\beta^2}=\frac{1}{1-\alpha+\dfrac{\beta^2}{1-\alpha}-1}<\frac{1}{2\beta-1}=\frac{1-\theta'}{\pi-1}, \qquad \text{car} \qquad \beta>\frac{\pi}{2}.$$

Ceci nous servira pour les petites valeurs de α.

Donc

$$\int_{-\infty}^{\alpha} e^{\alpha}\frac{\sin\beta}{\beta}d\alpha=e^{\alpha}\frac{-\cos\beta}{-\alpha}\left(1+\frac{\theta}{-\alpha}\right)^{-1}=e^{\alpha}\frac{-\cos\beta}{-\alpha}\,\frac{\pi-1}{\pi-\theta'}.$$

(Évidemment, les nombres θ et θ' n'ont pas les mêmes valeurs dans les deux couples d'égalités. Mais leurs bornes subsistent.) Finalement

$$\frac{\mathcal{G}(\alpha)}{\mathfrak{M}(\alpha)}=\frac{1}{-\cos\beta}\left(1+\frac{\theta}{-\alpha}\right)=\frac{1}{-\cos\beta}\,\frac{\pi-\theta'}{\pi-1}.$$

Ceci nous montre les deux faits énoncés :

1° k_1 étant un nombre positif fixe, si petit soit-il, puisque $\dfrac{G(u)}{M(u)}$ est croissant pour toutes les valeurs de u, $\dfrac{G(u)}{M(u)}<\dfrac{G\left(1-\dfrac{k_1}{p}\right)}{M\left(1-\dfrac{k_1}{p}\right)}$ si

$$u=1+\frac{\alpha}{p}<1-\frac{k_1}{p}.$$

---

certain nombre compris entre -1 *et* $+1$. Le calcul des nombres δ est régi par des égalités telles que

$$\delta+\delta=2\delta, \qquad \delta\times\delta=\delta.$$

On a

$$\theta-\theta=\delta;$$

a et b étant positifs,

$$\theta a-\theta b=\frac{a-b}{2}+\delta\frac{a+b}{2},$$

ou, *a fortiori*, $=\delta(a+b)$,

$$\delta a+\delta b=\delta(a+b), \qquad \ldots;$$

ces conventions n'entraînent pas plus de confusion que la présence des lettres d indiquant la dérivation. Cependant, quand l'intérêt de la clarté l'exigera, nous donnerons des indices ou accents aux nombres θ ou δ, si plusieurs d'entre eux se trouvent dans un même calcul.

Comme le second rapport tend vers une limite pour p infini, $\frac{G(u)}{M(u)}$ est inférieur à un nombre fixe. La seconde expression de $\frac{\mathcal{G}(\alpha)}{M(\alpha)}$ montre que ce nombre est de l'ordre de $\frac{1}{k_1}$, si k_1 est pris de plus en plus voisin de zéro.

2° ε étant donné à l'avance, si $\frac{1}{k_1} < \varepsilon$, la valeur limite de $\frac{G\left(1-\frac{k_1}{p}\right)}{M\left(1-\frac{k_1}{p}\right)}$ est inférieure à $1+\varepsilon$ en partie principale, car $-\cos\beta > 1 - \frac{\pi^2}{2k_1^2} + \ldots$.

Donc, il existe un nombre $P > k_1$ tel que, pour $p > P$,

$$\frac{G\left(1-\frac{k_1}{p}\right)}{M\left(1-\frac{k_1}{p}\right)} < 1 + 2\varepsilon$$

et par suite aussi $\frac{G(u)}{M(u)} < 1 + 2\varepsilon$ si $u < 1 - \frac{k_1}{p}$.

20. La fonction $\frac{u^{p+1}}{(p+1)(1-u)}$ coupe la fonction u^τ pour $u = 1 + \frac{\alpha_p}{p}$, α_p tendant vers -1.

On a, pour $\alpha = -1$,

$$\frac{\mathcal{G}(\alpha)}{\mathfrak{M}(\alpha)} < 4,$$

car le premier membre est inférieur à

$$\frac{1}{-\cos\beta}\,\frac{\pi}{\pi-1} < \frac{3}{2}\,\frac{1}{-\cos\beta}.$$

Or,

$$|\cot\beta| = \frac{1}{\beta} < \frac{3}{2\pi} < \frac{1}{2}.$$

Donc, $-\cos\beta > \frac{1}{\sqrt{5}}$.

La limite cherchée est inférieure à $\frac{3\sqrt{5}}{2} < 4$.

21. *Pour* $u > 1$, *nous prendrons*

$$G(u) = \frac{u^{p+1}}{p(u-1)}.$$

Posons $\chi(u) = AG(u) - M(u)$; supposons d'abord $A > 1$. Si $u < 1 + \frac{1}{p}$, $G(u) > u^{p+1}$. Donc $\chi(u) > 0$. Si $u > 1 + \frac{1}{p}$, $\chi(u)$ passe par un minimum pour $u = 1 + \frac{A}{A-1}\frac{1}{p}$. Pour cette valeur de u, $\chi(u) = (A-1)u^{p+1} - M(u)$.

Pour $A \geqq 2$ (ou même $A \geqq 1 + A'_{p+1}$), nous savons que cette expression est toujours positive. Elle l'est donc en particulier pour

$$u = 1 + \frac{A}{A-1}\frac{1}{p}.$$

Soit B le minimum de $\frac{G(u)}{M(u)}$, minimum qui est supérieur à $\frac{1}{2}$. Si $1 < A < B$, $\chi(u)$ qui est positif pour $u = 1 + \frac{1}{p}$ et pour u infini, et qui possède un seul minimum, d'ailleurs négatif, s'annule deux fois. On voit facilement que ses racines $1 + \frac{\delta_p}{p}$, $1 + \frac{\delta'_p}{p}$ avec $\delta_p < \frac{A}{A-1} < \delta'_p$, sont telles que δ_p et δ'_p tendent vers des limites pour p infini, A restant fixe.

Si $A \leqq 1$, $\chi'(u)$ est constamment négatif pour $u > 1 + \frac{1}{p}$.

Or, $\chi(\infty) = -\infty$, $\chi\left(1 + \frac{1}{p}\right)$ est positif si A est supérieur au nombre que nous avons appelé B'_{p+1} au paragraphe 9. On a d'ailleurs, si $u < 1 + \frac{1}{p}$, $\chi(u) > 0$, d'après $G(u) > u^{p+1}$. Donc $\chi(u)$ s'annule une fois et une seule, pour $u > 1 + \frac{1}{p}$.

Si $A < B'_{p+1}$, $\chi(u)$ est négatif pour $u > 1 + \frac{1}{p}$. Mais on démontre comme dans le cas de $u < 1$, et en utilisant la même forme $M(u) = \int_0^u u^p \frac{\sin p\theta}{\sin\theta}\,du$, que $\chi'(u)$ est négatif et que $\chi(u)$ n'a qu'une racine pour $u < 1 + \frac{1}{p}$. Donc, $\psi(u)$ ne prend qu'une fois la valeur $\frac{1}{A} \geqq 1$.

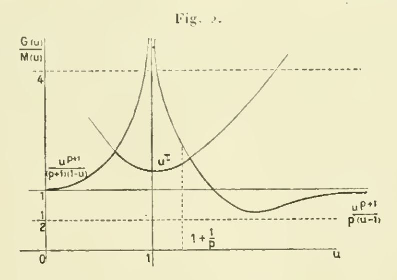
En résumé, $\frac{G(u)}{M(u)}$ décroît de $+\infty$ pour $u - 1$ infiniment petit positif, à un certain minimum supérieur à $\frac{1}{2}$, pour $u = 1 + \frac{\gamma_p}{p}$, γ_p tendant vers une limite pour p infini, puis croît jusqu'à 1, quand u varie de $1 + \frac{\gamma_p}{p}$ à $+\infty$.

22. On montre comme pour $u < 1$, et même plus commodément à cause de la forme simple de $M(u)$, que $\frac{G}{M}$ peut être supposé compris entre $1 - \varepsilon$ et 1, si $p > P'$, $u > 1 + \frac{k'}{p}$, P' et k' étant deux nombres fixes en même temps que ε et croissant indéfiniment avec $\frac{1}{\varepsilon}$, auquel k' est comparable. Ceci étant admis, on peut même remarquer que pour chacune des valeurs $1, 2, \ldots, P' - 1$, de p, $\frac{G}{M}$ tend vers 1, quand u croît indéfiniment. Donc les fonctions $\frac{G}{M}$ correspondant à ces valeurs de p seront chacune supérieures à $1 - \varepsilon$, si $u > C_1$ pour la première, $u > C_2$ pour la seconde, $\ldots$, $u > C_{P'-1}$ pour la dernière. Soit k'' le plus grand des nombres $C_1 - 1$, $2(C_2 - 1)$, $\ldots$, $(P' - 1)(C_{P'-1} - 1)$, k'. Quel que soit p, pour $u > 1 + \frac{k''}{p}$, on aura

$$1 > \frac{G(u)}{M(u)} > 1 - \varepsilon.$$

23. En résumé, *nous adoptons pour limiter* $M(u)$ *les fonctions* $\frac{u^{p+1}}{(p+1)(1-u)}$, u^τ, $\frac{u^{p+1}}{p(u-1)}$, *la médiane dans un intervalle allant de* $1 - \frac{k}{p}$ *à* $1 + \frac{h}{p}$ (*k et h positifs fixes arbitraires*) *et les deux autres*

Fig. 2.



pour $u < 1 - \frac{k}{p}$ *et pour* $u > 1 + \frac{h}{p}$ *respectivement.* Dans ces conditions, *le rapport de la fonction limitatrice* $G(u)$ *à* $M(u)$ *est compris entre des constantes numériques déterminées avec k et h, indépendamment de u et de p. Enfin, si* $u = 1 + \frac{\alpha}{p}$, *quand* α *croît indé-*

finiment avec p, par valeur soit positives, soit négatives, le rapport $\frac{G(u)}{M(u)}$ *tend vers* 1.

Nous donnons ci-dessus la courbe représentative du rapport $\frac{G(u)}{M(u)}$. Elle montre que, si l'on choisit $G = u^\tau$ dans l'intervalle des valeurs de u où u^τ rencontre les fonctions extrêmes, $\frac{G}{M}$ reste compris entre $\frac{1}{2}$ et 4. D'ailleurs habituellement nous prendrons $G(u) = u^\tau$ dans un champ beaucoup plus étendu, tel que l'approximation fournie par les fonctions extrêmes soit inférieure à ε, nombre positif, petit et fixe.

Dans les applications qui suivront, nous chercherons à évaluer des limites supérieures des logarithmes des produits de facteurs primaires, à une constante finie près. Nous pourrons substituer à ces logarithmes la fonction G de ci-dessus. Mais, comme les facteurs pour lesquels le rapport $\frac{G(u)}{M(u)}$ s'écarte de 1 d'une quantité finie se trouveront être négligeables relativement aux autres, nous obtiendrons la limite supérieure cherchée du logarithme avec une approximation infiniment petite. Dans l'intervalle médian, *la forme u^τ elle-même nous sera inutile*. Nous retiendrons seulement le fait que $M(u)$ est borné si $p(u-1)$ est inférieur à un nombre fixe.

24. *Sens de variation de $M_p(u)$ relativement à p.* — Remarquons enfin, chose très importante pour la suite, que *les expressions qui remplacent $M(u)$ croissent avec p si $u > 1$ et décroissent si $u < 1$.*

C'est vrai de la médiane si u est fixe, quel que soit le champ où on la choisit pour $G(u)$. Pareillement, la première décroît avec $\frac{1}{p}$, quel que soit $u < 1$. La dernière croît si $u > e^{\frac{1}{p}}$.

En choisissant

$$G(u) = \frac{u^{p+1}}{(p+1)(1-u)} \qquad \text{pour} \qquad u < 1 - \frac{k}{p},$$

k étant arbitraire et fixe,

$$G(u) = u^\tau \qquad \text{si} \qquad 1 - \frac{k}{p} < u < 1 + \frac{h}{p} \qquad \text{avec} \qquad h > 2,$$

$$G(u) = \frac{u^{p+1}}{p(u-1)} \qquad \text{si} \qquad u > 1 + \frac{h}{p},$$

$G(u)$ pour une valeur donnée de u décroît si $u < 1$, croît pour $u > 1$, quand p croît indéfiniment $\left(\text{car } 1 + \frac{2}{p} > e^{\frac{1}{p}} \text{ si } p \geqq 1\right)$.

25. On peut se rendre compte qu'*il en est sensiblement de même pour* $M(u)$ *lui-même*. L'excès pour un même couple u, θ de la valeur de $U(u, \theta)$ pour $p+1$ sur sa valeur pour p est $\frac{u^{p+1}}{p+1}\cos(p+1)\theta$. Si $\frac{\pi}{p+1} > \theta > \frac{\pi}{2(p+1)}$, l'excès est négatif. Si $\frac{\pi}{2(p+1)} > \theta > 0$, l'excès est positif.

Or, pour $\theta = \frac{\pi}{2(p+1)}$ la valeur de u correspondant à l'exposant p est $u_1 = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{2(p+1)}}$ et celle qui correspond à l'exposant $p+1$ est $u_2 = \cos\frac{\pi}{2(p+1)}$. Soient M_p et M_{p+1} les maxima respectifs correspondant aux deux exposants.

Si $u < u_2$, on a

$$M_p > M_{p+1};$$

si $u_1 < u$,

$$M_p < M_{p+1}.$$

Si l'on pose

$$u_1 = 1 + \frac{h}{p^2}, \qquad u_2 = 1 - \frac{k}{p^2},$$

h et k sont bornés supérieurement et inférieurement quel que soit $p > 1$. Si p croît indéfiniment, h et k tendent vers une limite [1].

---

[1] Je laisse au lecteur le soin de montrer que $p(1 - u_2)$ est décroissant si $p \geqq 1$. Donc sa plus grande valeur est $1 - \cos\frac{\pi}{4} < \frac{1}{2}$. Donc, si $u < 1 - \frac{1}{2p}$, $M_p(u) > M_{p+1}(u)$ quel que soit $p \geqq 1$. On a même, quel que soit $p \geqq 1$,

$$(p+1)^2(1-u_2) < \frac{\pi^2}{8}, \qquad p^2(u_1 - 1) < 1.$$

Enfin, quel que soit p, la différence $M_{p+1}(u) - M_p(u)$, si

$$1 + \frac{1}{p} > u > 1 + \frac{1}{p^2},$$

est, à un facteur fini près, $u^p(u-1)$ et est inférieure, en valeur absolue, à $\frac{h}{p^2}$ (h borné) si $1 < u < 1 + \frac{1}{p^2}$.

26. Pour une valeur de p donnée, si $u < 1 - \frac{k}{p^2}$, $M_{p+1} < M_p$. Donc, si $p > \sqrt{\frac{k}{1-u}}$, u étant un nombre fixe inférieur à 1, M_p décroît quand p croît. Si $p < \sqrt{\frac{k}{1-u}}$, alors $1 - \frac{k}{p^2} < u < 1$, et $M_p(u)$, quel que soit p, varie dans un champ borné. Si même on suppose $p > p_0$, la valeur de M_p diffère de moins de ε de $M_\infty(1)$. Donc, quel que soit u inférieur à 1, si l'on fait croître p à partir d'un nombre fixe p_0, on est certain qu'à partir d'une certaine valeur de p, $M_p(u)$ décroît. Pour les valeurs de p précédentes et supérieures à p_0, $M_p(u)$ est sensiblement constant à ε près, ε étant arbitrairement petit en même temps que $\frac{1}{p_0}$.

De même, si $u > 1$, $M_p(u)$ croît avec p, certainement à partir d'une certaine valeur de p, les valeurs précédant celles-là et supérieures à p_0 laissant, à ε près, $M_p(u)$ constant et égal a $M_\infty(1)$.

Expressions approchées du module minimum d'un facteur primaire.

27. D'après la classification faite des maxima et minima du facteur primaire sur le cercle $|x| = u$, on a constamment

$$M(u) > -m_2(u).$$

Donc $\frac{G(u)}{-m_2(u)}$ est supérieur à 1 si $u < 1$ et à $\frac{1}{2}$ si $u > 1$.

La fonction $m_2(u)$ pour $u = 1 + \frac{\alpha}{p}$ tend vers

$$\int_{-\infty}^{\alpha} e^{\alpha} \frac{\sin\beta}{\beta} \, d\alpha$$

avec

$$\beta \cot\beta = \alpha, \qquad \pi < \beta < 2\pi.$$

Aux valeurs $-\infty$, 0, $+\infty$ de α correspondent les valeurs 2π, $\frac{3\pi}{2}$, π de β.

On démontre, comme avec $M(u)$, que, si α est fixe, le rapport $\frac{G(u)}{-m_2(u)}$ tend vers une limite. Si α est compris entre des constantes numériques données, le rapport est compris entre des constantes numériques calculables au moyen des premières. Si α tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, cette limite tend vers 1.

Seulement, $+m_2(u)$ n'est le logarithme du module minimum du facteur primaire que pour $u > 1 + \frac{\alpha_p}{p}$, où $0 < \alpha_p < 1$, α_p tendant d'ailleurs vers une limite.

Supposons $u < 1$; on a toujours $\frac{u^{p+1}}{(p+1)(1-u)} > -m_1(u)$, comme le montrent les développements en série des deux membres. Nous avons ici intérêt à distinguer les points d'un cercle $u = 1 + \frac{\alpha}{p}$, voisins de 1, de ceux qui en sont éloignés. Un calcul facile montre que, sur le cercle $|x-1| = \frac{\alpha}{p}$, le minimum se produit quand l'argument de $x-1$ est π. La valeur de $U\left(1 + \frac{\alpha}{p}, 0\right)$ tendant dans tous les cas vers $C + L|\alpha| + \int_0^\alpha \frac{e^\alpha - 1}{\alpha} d\alpha$, c'est là, après changement de α en $-\alpha$ l'expression limite du minimum sur le cercle concentrique au point 1 et de rayon $\frac{\alpha}{p}$. Voici donc le résultat définitif :

Si l'on retranche du plan des x un cercle de centre 1 et de rayon $\frac{k}{p}$, k étant positif et fixe, on a partout, en dehors de ce cercle, $\frac{G(u)}{m(u)} = h$, h variant quels que soient u et p entre deux nombres positifs calculables au moyen de k, et h tendant vers 1 si $\alpha = p(1-u)$ croît indéfiniment en valeur absolue [en réalité, $-m(u)$ désigne le logarithme du minimum de $|E(x, p)|$ sur l'arc non exclu du cercle $|x| = u$].

Si x est intérieur au cercle précédent, on a

$$U(u, \theta) = h' + L|\alpha|,$$

h' étant borné avec k.

CHAPITRE II.

LES PRODUITS CANONIQUES D'ORDRE INFINI. PREMIER TYPE DE CROISSANCE. RÉGULARITÉ MOYENNE.

28. Étant donnée une suite de nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, rangés par ordre de modules non décroissants, avec $a_1 \neq 0$, si la série $\frac{1}{|a_n|^{p+1}}$ converge, tandis que la série $\frac{1}{|a_n|^p}$ diverge, et si p est entier ou nul, on appelle *produit canonique*, ayant pour zéros les nombres de la suite précédente, l'expression

$$F(z) = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) \quad \text{si} \quad p = 0,$$

$$F(z) = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \ldots + \frac{1}{p}\left(\frac{z}{a_n}\right)^p} \quad \text{si} \quad p \geqq 1.$$

Le *genre* du produit canonique est égal à p. Rappelons que son *ordre* est le nombre ρ tel que $\frac{1}{|a_n|^{\rho'}}$ diverge et $\frac{1}{|a_n|^{\rho''}}$ converge, moyennant $\rho' < \rho < \rho''$.

Une fonction quelconque admettant pour zéros les nombres de la suite a_n, et l'origine à l'ordre m, sera de la forme

$$H(z) = z^m e^{G(z)} F(z),$$

$G(z)$ étant une fonction entière.

Si $G(z)$ est un polynome de degré p au plus, la croissance de $H(z)$ est identique à celle de $F(z)$ $\Big($une exception peut se produire, dans le cas où la série $\frac{1}{|a_n|^{p+\varepsilon}}$ est convergente, quelque petit que soit $\varepsilon\Big)$, et $H(z)$ croît moins vite que $e^{\varepsilon|z|^{p+1}}$, quelque petit que soit ε.

Si $G(z)$ est un polynome de degré $p+h$, $h \geqq 1$, la croissance de $H(z)$ est comparable à celle de $e^{A|z|^{p+h}}$. Elle est plus rapide si $G(z)$ n'est pas

un polynome, en sorte qu'il n'y a pas de fonction $H(z)$ ayant un ordre de croissance moindre [1] que celui de $F(z)$.

29. Supposons maintenant que la série $\frac{1}{|a_n|^p}$ diverge quel que soit p, et considérons toutes les expressions de la forme

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{\frac{z}{a_n}+\ldots+\frac{1}{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{p_n}}=\prod_{n=1}^{\infty}E\left(\frac{z}{a_n}, p_n\right).$$

Nous allons montrer d'après quels principes il faut choisir p_n, pour que la fonction $F(z)$ correspondante jouisse de propriétés analogues, au point de vue de la croissance, à celles des produits canoniques d'ordre fini.

Afin que ce produit ne dépende pas de l'ordre des facteurs, nous choisirons l'exposant p_n de façon que ce produit soit absolument convergent. Si $|z|=r$, $|a_n|=r_n$, il faut et il suffit pour cela que la série $\frac{1}{p_n+1}\left(\frac{r}{r_n}\right)^{p_n+1}$ soit convergente quel que soit r.

Le fait que la condition de convergence absolue est indépendante des arguments des zéros nous conduit à *ne faire dépendre* p_n *que de la suite* r_n.

Pour rendre la série $\frac{1}{p_n}\left(\frac{r}{r_n}\right)^{p_n+1}$ convergente, Weierstrass avait choisi $p_n=n$. M. Borel a fait remarquer que $p_n=\log n$ assure la convergence, et depuis on a signalé maintes fois que, si $p_n=\frac{\log n}{\log r_n}$ ne suffit pas à faire converger cette série, $p_n=k\frac{\log n}{\log r_n}$, si k est fixe et supérieur à 1, y suffit. (D'une façon plus précise, si dans l'une de ces égalités le second membre n'est pas entier, on doit le remplacer par sa partie entière.)

[1] Nous dirons habituellement que deux fonctions $f_1(r)$, $f_2(r)$ infiniment croissantes sont du même ordre de grandeur si leur rapport reste fini, en d'autres termes, a des limites d'indétermination différentes de zéro et de l'infini, pour r infini. Ici ce sont plutôt les logarithmes des fonctions considérées, qui sont du même ordre de grandeur. Si $\frac{f_1(r)}{f_2(r)}$ tend vers zéro, f_1 est dit moins croissant que f_2, et f_2 plus croissant que f_1.

L'exposant de Weierstrass a été modifié par M. Borel, parce que cet exposant donne un produit de facteurs primaires $F(z)$ beaucoup trop croissant. Voici d'après quel principe nous choisirons p_n.

30. Supposons donnée seulement la suite $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$. Si $M(r)$ désigne le maximum de $\log|F(z)|$ pour $|z| = r$ (¹), $M(r)$ dépendra évidemment des arguments des zéros dont les modules seuls nous sont donnés. Ces arguments variant de toutes les façons possibles, $M(r)$ possède, pour chaque valeur de r, une certaine limite supérieure $P(r)$, qui ne dépend que de la fonction p_n choisie et de la suite r_n.

Nous déterminerons l'exposant p_n par la condition que cette limite $P(r)$ soit la plus petite possible, ou exactement, que toute autre loi choisie pour p_n nous donne une limite au moins égale à $P(r)$.

31. Nous allons transformer cette condition. Rappelons un résultat obtenu dans le premier Chapitre. Il existe un nombre h supérieur à 1, tel que, si $M_p(u) = \underset{|x|=u}{\text{Max.}} \log|E(x, p)|$,

$$h M_p(u) > M_{p+q}(u),$$

quels que soient $u < 1$, p et q entiers, et tel que

$$M_p(u) < h M_{p+q}(u),$$

si $u > 1$. De plus, si petit que soit ε, on peut trouver p_0 tel que, si $p > p_0$, h peut être supposé égal à $1 + \varepsilon$.

Cela étant, considérons le nombre N défini par

$$r_{N-1} < r \leqq r_N,$$

et posons

$$F_1(z) = \prod_1^{N-1} E\left(\frac{z}{a_n}, p_n\right), \qquad F_2(z) = \prod_N^{\infty} E\left(\frac{z}{a_n}, p_n\right).$$

Soient $P_1(r)$ et $P_2(r)$ les limites supérieures respectives des maxima de $\log|F_1(z)|$ et de $\log|F_2(z)|$ pour $|z| = r$, quand les zéros

(¹) M. Borel désigne par $M(r)$ le maximum de $|F(z)|$ pour $(z) = r$. Mais le langage gagne en simplicité si l'on désigne par $M(r)$ le logarithme de ce maximum.

a_1, a_2, ... prennent tous les arguments possibles en gardant les mêmes modules. On a

$$P(r) = P_1(r) + P_2(r).$$

Si nous convenons de considérer comme étant de même ordre de grandeur deux fonctions dont le rapport a deux limites d'indétermination finies pour r infini, l'ordre de grandeur de $P(r)$ est égal au plus grand des ordres de P_1 et de P_2.

Or, pour $n < N$, le maximum de $\log\left|E\left(\frac{z}{a_n}, p_n\right)\right|$ croît, r restant fixe, si p_n croît. Si $n \geqq N$, ce module décroît.

Remplaçons p_n par une fonction plus croissante q_n; $P_1(r)$ est remplacé par une fonction non moins croissante $Q_1(r)$. En effet, q_n et p_n croissant indéfiniment, $P_1(r)$ finit par surpasser r^λ, quel que soit le nombre fixe λ. Supposons donc que pour $r_n > r_{N_0}$ on ait

$$p > p_0 \qquad \text{et} \qquad q > q_0 > p_0.$$

Nous écrivons

$$P_1(r) = \sum_1^{N-1} \text{Max.}\log\left|E\left(\frac{z}{a_n}, p_n\right)\right| = \sum_1^{N_0} + \sum_{N_0+1}^{N-1} = P'_1 + P''_1,$$

$$Q_1(r) = \sum_1^{N-1} \text{Max.}\log\left|E\left(\frac{z}{a_n}, q_n\right)\right| = \sum_1^{N_0} + \sum_{N_0+1}^{N-1} = Q'_1 + Q''_1.$$

D'après ce que nous venons de rappeler, il existe un nombre r_0 tel que, pour $r > r_0$,

$$P'_1(r) < \varepsilon P''_1(r).$$

D'ailleurs, nous savons d'après la valeur de p_0 que

$$Q''_1 > (1-\varepsilon) P''_1(r).$$

Donc

$$P_1 = P'_1 + P''_1 < \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} Q''_1(r) < \frac{1}{1-\varepsilon'} Q_1(r),$$

ε' étant comparable à ε, si celui-ci est petit. D'où

$$Q_1(r) > (1-\varepsilon') P_1(r).$$

si $r > r_0$.

De même, si nous remplaçons p_n par une fonction moins croissante s_n, $P_2(r)$ sera remplacé par une fonction non moins croissante $S_2(r)$.

Supposons que p_n *donne le même ordre de grandeur à* P_1 *et à* P_2. Alors, que je remplace p_n par une fonction plus croissante ou par une fonction moins croissante, *l'ordre de* $P(r)$ *ne peut pas diminuer* (¹).

C'est cette fonction p_n donnant à P_1 et à P_2 des ordres de grandeur égaux que j'appellerai *exposant canonique de convergence attaché à la suite* r_n.

Nous supposerons toujours p_n *non décroissant.*

32. Moyennant une première hypothèse très générale sur la croissance de r_n, nous déterminerons la valeur de p_n. Nous allons, par un raisonnement très rapide et assez grossier, indiquer l'idée directrice qui conduit au choix de p et la valeur de $P(r)$ correspondante. Nous rendrons ensuite cette analyse rigoureuse, mais, grâce au sommaire qui l'aura précédée, le lecteur ne perdra pas de vue, dans la minutie du raisonnement, les conclusions à atteindre.

Nous poserons

$$\log r_n = x(n), \qquad \log n = y(n).$$

Dans le plan des xy les points L dont les coordonnées sont $x(m)$, $y(m)$ forment une suite à abscisses et ordonnées simultanément non décroissantes. Joignons ces points par une courbe.

Ceci revient à définir une fonction non décroissante $y = f(n)$ telle que

$$y(n) = f[x(n)].$$

Le fait que la suite r_n n'est pas d'ordre fini est traduit par la relation

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{y(n)}{x(n)} = \infty,$$

qui n'oblige nullement $\dfrac{y(n)}{x(n)}$ à croître indéfiniment (²).

(¹) Les auteurs qui se sont occupés des fonctions de genre infini ont eu généralement, avec le désir d'abaisser l'ordre de grandeur de $F(z)$, le souci de réduire le reste P_2 de façon à le rendre aisément limitable (cela, en augmentant la convergence de la série, c'est-à-dire p_n); mais la valeur de P_1 rend alors trop fort l'ordre de $F(z)$.

(²) Selon l'usage, nous désignons par $\overline{\lim\limits_{x=a}}\, u$ et $\underline{\lim\limits_{x=a}}\, u$ la plus grande et la plus petite des limites possibles de u quand x tend arbitrairement vers a.

Nous supposons que la répartition des points L soit telle que le coefficient angulaire y' de la tangente croisse toujours. Cela est possible si $\frac{y(n+1)-y(n)}{x(n+1)-x(n)}$ est croissant avec n. La courbe $y=f(x)$ tourne sa concavité vers les y positifs, et y' croît indéfiniment avec x, sans quoi la suite r_n serait de genre fini.

Remarquons dès maintenant que l'expression

$$-\psi(x, X) = y - Y + y'(X - x)$$

est constamment négative et qu'elle est infiniment grande, en même temps que x, quel que soit X, et en même temps que X, si x reste borné.

Si A a pour coordonnées (X, Y), si (x, y) sont les coordonnées de $B(y<Y)$ ou de $B'(y>Y)$, les tangentes en B et B' coupent la droite d'abscisse X en des points C et C' situés au-dessous de A. $\psi(x, X)$ est égal au segment CA ou au segment C'A.

33. Le logarithme du module du $n^{\text{ième}}$ facteur primaire a pour limite supérieure (à ε près si h est assez grand)

$$\frac{1}{p_n}\left(\frac{r}{r_n}\right)^{p_n+1}\frac{1}{\frac{r}{r_n}-1} \qquad \text{pour} \qquad \frac{r}{r_n}>1+\frac{h}{p_n},$$

$$\left(\frac{r}{r_n}\right)^{\tau_n} \qquad \text{pour} \qquad 1+\frac{h}{p_n}>\frac{r}{r_n}>1-\frac{h}{p_n} \qquad (p_n \leq \tau_n \leq p_n+1),$$

$$\frac{1}{p_n+1}\left(\frac{r}{r_n}\right)^{p_n+1}\frac{1}{1-\frac{r}{r_n}} \qquad \text{pour} \qquad \frac{r}{r_n}<1-\frac{h}{p_n}.$$

Posons

$$\log r = X \qquad \text{et} \qquad Y = f(X).$$

Supposons le choix de p_n effectué et séparons les valeurs de r_n en trois groupes suivant la position de $\frac{r}{r_n}$ relativement à $1+\frac{h}{p_n}$ et à $1-\frac{h}{p_n}$. Supposons qu'il existe deux valeurs r_{N_1} et r_{N_2} séparatrices. Posons

$$r_{N_1}=e^{X_1}, \qquad r_{N_2}=e^{X_2}, \qquad N_1=e^{Y_1}, \qquad N_2=e^{Y_2}.$$

Si nous écrivons

$$P(r) = \int_1^\infty M\left(\frac{r}{r_n}, p_n\right) dn,$$

nous pourrons décomposer cette intégrale en trois :

$$\int_1^{N_1} e^{(p_n+1)\overline{X-x(n)}} \frac{dn}{p_n(e^{X-x(n)}-1)}, \qquad \int_{N_1}^{N_2} e^{(p_n+\theta)\overline{X-x(n)}} dn,$$
$$\int_{N_2}^\infty e^{(p_n+1)\overline{X-x(n)}} \frac{dn}{(p_n+1)(1-e^{X-x(n)})}.$$

Changeons de variable. Remplaçons dn par $e^y y' dx$, et mettons partout e^Y en facteur. L'exposant de e dans les trois intégrales devient $y - Y + (p+1)(X-x)$.

Supposons $p+1$ *égal à* y'. Dans les intégrales extrêmes les quotients $\frac{y'}{p}$ ou $\frac{y'}{p+1}$ disparaissent, comme étant infiniment voisins de 1. Il reste

$$\int_{X_0}^{X_1} e^{-\psi(x,X)} \frac{dx}{e^{X-x}-1}, \qquad \int_{X_1}^{X_2} e^{-\psi(x,X)} y'\, dx, \qquad \int_{X_2}^\infty e^{-\psi(x,X)} \frac{dx}{1-e^{X-x}}.$$

ψ, avons-nous dit, croît indéfiniment en même temps que x, X étant fixe, ou en même temps que X, x étant borné. Supposons que ψ croisse assez vite pour assurer la convergence de la dernière intégrale, ou, d'une façon plus précise, pour que

$$\int_{X_2+1}^\infty e^{-\psi} \frac{dx}{1-e^{X-x}}$$

soit borné, ainsi que

$$\int_{X_0}^{X_1-1} e^{-\psi} \frac{dx}{e^{X-x}-1}.$$

Alors, les intégrales extrêmes ne deviennent infiniment grandes que par leurs limites X_1 et X_2. Nous majorons le tout en supprimant $e^{-\psi}$ qui est inférieur à 1. Les ordres de grandeur sont les mêmes que dans la somme

$$\int_{X_1-1}^{X_1} \frac{dx}{e^{X-x}-1} + \int_{X_1}^{X_2} y'\, dx + \int_{X_2}^{X_2+1} \frac{dx}{1-e^{X-x}}.$$

A une constante finie près, la première est égale à $L\frac{1}{X-X_1}$, la dernière à $L\frac{1}{X_2-X}$; la médiane est Y_2-Y_1.

Comme on a sensiblement

$$X_1 = X - \frac{h}{Y'}, \qquad X_2 = X + \frac{h}{Y'},$$

ce sera une hypothèse généralement vérifiée que Y_2-Y_1 soit environ égal à $2h$, et par suite borné tandis que les intégrales extrêmes sont infiniment grandes et *de même ordre*, savoir celui de LY'.

Nous trouvons ainsi

$$P(r) < 2e^{Y}LY' = 2nLp.$$

Nous allons préciser le choix de p et les raisonnements qui nous donnent la valeur de $P(r)$.

L'approximation par les fonctions régulières.

34. Soit une suite donnée de nombres non décroissants

$$r_1, \quad r_2, \quad \ldots, \quad r_n, \quad \ldots$$

ou plutôt la suite des logarithmes de ces nombres

$$x(1), \quad x(2), \quad \ldots, \quad x(n), \quad \ldots.$$

Posons, comme nous l'avons indiqué,

$$\log n = y(n).$$

$y(n)$ est une fonction de la variable discontinue $x(n)$, qui peut être mal déterminée avec les acceptions

$$\log m, \quad \log(m+1), \quad \ldots, \quad \log(m+p),$$

pour $x=\xi$, si

$$x(m-1) \neq \xi = x(m) = x(m+1) = \ldots = x(m+p) \neq x(m+p+1),$$

bien qu'à chaque valeur de $y(n)$ corresponde au plus une valeur de x.

Nous ne pourrons pas résoudre les problèmes relatifs à la formation

des produits canoniques ni à l'évaluation de leur module maximum, si nous ne faisons sur la fonction $y[x(n)]$ des hypothèses plus restrictives que sa simple croissance. Étant donnée une suite $x(n)$, nous substituerons à la fonction $y(n)$ deux autres fonctions $y_1(x)$, $y_2(x)$, telles que

$$y_1[x(n)] \leqq y[x(n)] \geqq y_2[x(n)],$$

y_1 et y_2 satisfaisant aux conditions qui s'imposeront à nous pour rendre les calculs possibles. De la sorte, nous substituons, pour chaque valeur de n, à $x(n)$ deux nombres $x_1(n)$ et $x_2(n)$, tels que

$$x_1[y(n)] \leqq x(n) \leqq x_2[y(n)].$$

Les résultats des calculs effectués pour y_1 et y_2 se trouveront comprendre entre eux les résultats relatifs à y.

35. Nous pourrons supposer que les courbes représentant $y_1(x)$ et $y_2(x)$ passent par une infinité de points L. Nous construirons pour cela chacune de ces fonctions à partir de sa dérivée seconde que nous supposerons positive et continue. Soit par exemple à construire y_1.

Je définis dans le plan des xy''_1 deux familles de courbes, les courbes c et les courbes γ, telles que :

1° Par chaque point du plan passe au moins une courbe c et au moins une courbe γ, et, sur une même courbe c ou γ, y''_1 varie toujours dans le même sens avec x.

2° Si je fais déplacer et éloigner à l'infini le point $\mu(x, y''_1)$ sur une courbe c, la courbe C décrite par le point

$$x,\ y_1 = \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} y''_1\, dx + \mathrm{A}(x - x_0) + \mathrm{B}$$

finit, quels que soient les nombres fixes A et B, par laisser au-dessous d'elle tous les points L_m à partir d'un certain rang.

3° Si je fais déplacer et éloigner à l'infini le point $\mu(x, y''_1)$ sur une courbe γ, la courbe Γ correspondante décrite par le point (x, y_1) a au-dessus d'elle, quels que soient A et B, une infinité de points L_m. Ceci n'est pas impossible, à cause de l'égalité

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{y(n)}{x(n)} = \infty.$$

4° Étant donnée une courbe quelconque c_0 de la première famille, nous supposerons que, si un point (α, β) est dans sa région négative [la région négative de $y = f(x)$ est $y < f(x)$], il est possible de faire passer par α, β une courbe c, entièrement située pour $x > \alpha$ dans la région négative de c_0 et tendant vers c_0 uniformément dans tout champ borné et tel que $\alpha > \alpha_0$, si le point α, β tend vers le point α_0, β_0 de c_0.

Nous supposerons encore que, par tout point α_0, β_0 de c_0, il est possible de faire passer une courbe γ entièrement située pour $x > \alpha_0$ dans la région négative de c_0.

Alors, si nous faisons décrire successivement à $\mu(x, y''_1)$, d'une part la courbe c_0, d'autre part, de α_0, β_0 à $\alpha\beta$, une ligne entièrement située dans la région négative de c_0, puis la courbe c définie ci-dessus, ou encore la courbe γ passant en α, β, la courbe C_0 correspondant au premier trajet de $\mu(x, y''_1)$ aura dans sa région négative les courbes C ou Γ correspondant à chacun des seconds trajets.

36. Je vais définir y''_1 pour les valeurs croissantes de x. Soit α_0, β_0 un point quelconque du plan des xy''_1. Je considère une courbe c_0 de la première famille passant par ce point. Si je fais décrire à $\mu(x, y''_1)$ cette courbe c_0, la courbe C_0 définie par

$$y_1 = \int_{\alpha_0}^{x} dx \int_{\alpha_0}^{x} y''_1\, dx + A(x - x_0) + B$$

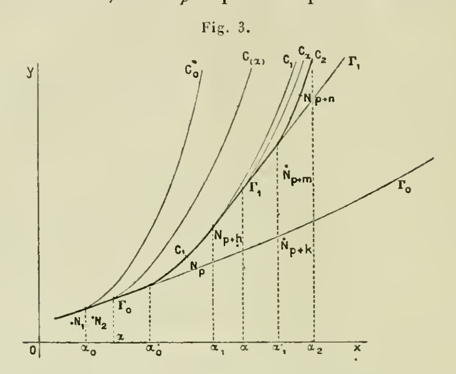
n'a au-dessus d'elle qu'un nombre fini de points L_m. En augmentant B s'il est nécessaire, je peux supposer qu'il n'y en a aucun (nous supposerons toujours A et B positifs).

Je considère alors la fonction y_1 obtenue en choisissant y''_1 de la façon suivante : de $x = \alpha_0$ à $x = \alpha > \alpha_0$, je fais décrire au point $\mu(x, y''_1)$ une courbe γ_0 passant en α_0, β_0 et située dans la partie négative de c_0, ce qui amène μ en α, β, et, à partir de $x = \alpha$, une courbe c, que je désigne par $c(\alpha)$, telle que, si $\alpha' < \alpha$, $c(\alpha)$ soit dans la région négative de $c(\alpha')$ et que $c(\alpha)$ varie continûment avec α. Comment se comporte y_1 ?

D'abord, x, y_1 décrit un arc de la courbe Γ_0 qui correspondrait à un déplacement indéfini de μ sur γ_0 ; puis, à partir du point d'abscisse α, une courbe $C(\alpha)$ de l'allure de C_0, laissant au-dessous d'elle tous les L à partir d'un certain rang. $C(\alpha_0)$ coïncide avec C_0. $C(\alpha)$ est dans la

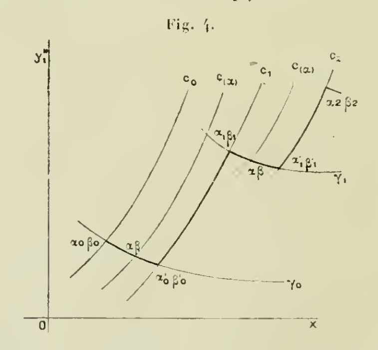
région négative de $C(\alpha')$ si $\alpha' < \alpha$ et si $x > \alpha$, et $C(\alpha)$ varie continûment avec α. Est-il possible que α, β s'éloigne indéfiniment sur γ_0 sans que la courbe $C(\alpha)$ correspondante rencontre aucun point L? Évidemment non. Car, soit L_p le premier point situé au-dessus de la

Fig. 3.



courbe Γ_0. Si $\alpha \geqq x(p)$ la courbe $C(\alpha)$ aura toujours au-dessus d'elle le point L_p. Faisons varier α de α_0 à $x(p)$. Pour cette dernière valeur

Fig. 4.



de α, la courbe $C(\alpha)$ a un certain nombre s fini et non nul de points L situés au-dessus d'elle. Pour $\alpha = \alpha_0$, tous sont au-dessous. Quand α varie de α_0 à $x(p)$ d'une façon continue, ces s points traversent successivement la courbe $C(\alpha)$ qui varie d'une façon continue. Il y a donc une

valeur α'_0 de α telle que, pour $\alpha < \alpha'_0$, la courbe $C(\alpha)$ est entièrement au-dessus des s points considérés, et, pour $\alpha = \alpha'_0$, il y a au moins un de ces points et au plus tous les s sur la courbe $C(\alpha'_0)$. (Dans la figure 3, les points L du texte sont par erreur désignés par N.)

D'ailleurs, puisque $\alpha'_0 < x(p)$, $C[x(p)]$ est entièrement situé dans la région négative de $C(\alpha'_0)$, et par suite non seulement les s points situés dans la région positive de $C[x(p)]$ mais encore ceux de ses régions négative ou nulle, c'est-à-dire tous les points L, sont ou bien dans la région négative de $C(\alpha'_0)$ ou bien (en nombre au plus égal à s et au moins égal à un) sur $C(\alpha'_0)$.

Je fais décrire à x, y''_1 la courbe $c(\alpha'_0)$ que nous désignerons par c_1, à partir de $\alpha_0\beta'_0$, jusqu'à ce que le point x, y_1 qui décrit C_1 [ou $C(\alpha'_0)$], ait surpassé d'une unité en ordonnée le dernier des points L qu'il peut rencontrer. J'appelle α_1, β_1 le point où j'arrête x, y''_1, et d'où la construction recommence comme en α_0, β_0.

Je fais décrire à $\mu(x, y''_1)$ une courbe γ_1 de la seconde famille, située dans la région négative de c_1 et passant par $\mu_1(\alpha_1, \beta_1)$, jusqu'au point α, β et à partir de α une courbe c. Les courbes c sont dans la région positive de γ_1, $c(\alpha)$ est dans la région négative de $c(\alpha')$ si $\alpha' < \alpha$, pour $x > \alpha$, et $c(\alpha)$ varie continûment. Le point x, y_1 décrit un arc de la courbe Γ_1 correspondant à γ_1, puis une courbe $C(\alpha)$. Je choisis pour α la valeur α'_1 telle que, pour $\alpha < \alpha'_1$, les courbes $C(\alpha)$ correspondantes sont entièrement au-dessus de tous les points L, et telle que $C(\alpha'_1)$ que je désigne par C_2 rencontre au moins un des points L et en tous cas un nombre fini d'entre eux. Je déplace $\mu(x, y''_1)$ sur la courbe c_2 qui part de $\alpha'_1\beta'_1$ jusqu'à ce que x, y_1 ait surpassé d'une unité en ordonnée le dernier point L situé sur C_2. Soit α_2, β_2 le point où x, y''_1 est arrêté. J'applique de nouveau la construction à partir de ce point, etc.

La courbe $x_1 y_1$ construite de proche en proche se trouvera rencontrer une infinité de points L et n'en avoir aucun au-dessus d'elle. Enfin, y''_1 existe, est positif et continu.

37. Définissons les courbes c et γ dans les divers cas possibles.

Premier cas. — $\overline{\lim} \frac{y}{x^2} = \infty$. Les courbes γ seront des parallèles à l'axe des x.

Les courbes c auront des équations de la forme

$$\eta = F''(\xi - \lambda),$$

λ étant un paramètre, η et ξ étant les coordonnées courantes.

On voit immédiatement que, dans notre construction précédente, λ prendra des valeurs de plus en plus grandes positives. Il faudra donc que la courbe

$$\eta = F(\xi - \lambda),$$

quel que soit λ fixe, finisse par dépasser tous les points L. Si nous joignons deux à deux les points consécutifs L_m, L_{m+1}, nous obtenons une ligne brisée $y = f(x)$.

Il nous suffira que

$$\lim_{x=\infty} \frac{F(x)}{f(x+\lambda)} = \infty,$$

quel que soit le nombre λ fixe, et pour cela que

$$\lim_{x=\infty} \frac{F(x)}{f(x+\lambda_n)} = \infty,$$

λ_n prenant une suite de valeurs tendant vers l'infini. Ce problème a été résolu par Du Bois-Reymond. Si nous voulons que $F(x)$ ait une dérivée seconde positive, ou même des dérivées de tout ordre, nous prendrons

$$F(x) = \sum_1^\infty \left(\frac{x}{n}\right)^{h_n},$$

et nous déterminerons, comme il suit, les exposants h_p qui sont des entiers croissants. Soit $\varphi(x)$ une fonction tendant vers l'infini avec x, et

$$f(x+\lambda_n) = f_n(x).$$

Je détermine h_p par la condition que le $p^{\text{ième}}$ terme de la série $\left(\frac{x}{p}\right)^{h_p}$ soit, pour

$$p + 1 \leqq x \leqq p + 2,$$

supérieur à $\mu_p \varphi(p)$, μ_p étant le maximum de

$$f_1(x), \quad f_2(x), \quad \ldots, \quad f_p(x)$$

dans le même intervalle. Les fonctions f_i étant croissantes, et d'après

$$f_{i+1}(x) > f_i(x),$$

il suffit que

$$\left(\frac{p+1}{p}\right)^{h_p} > \varphi(p) f_p(p+1) = \varphi(p) f(p+1+\lambda_p).$$

Je prends pour h_p le premier entier supérieur à h_{p-1} satisfaisant à cette inégalité. Alors, pour

$$x > p+1,$$

on aura toujours

$$F(x) > \varphi(x) f_i(x),$$

i étant l'un quelconque des nombres 1, 2, ..., p. Donc, $\frac{F(x)}{f_i(x)}$ tend vers l'infini avec x, quel que soit i.

On voit immédiatement que le système de courbes c, γ proposé satisfait à toutes les conditions requises.

Deuxième cas. — $\overline{\lim}_{x=\infty} \frac{y}{x^2} = a \neq 0.$

Je prends pour équations des courbes c et γ respectivement

$$\eta = a + \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\xi - \lambda} \qquad \text{et} \qquad \eta = a - \frac{1}{\lambda'} + \frac{1}{\xi - \lambda'}.$$

On constate que par tout point α, β du demi-plan $\xi > 0$ passe une courbe et une seule de chaque famille telle que $0 < \lambda < \alpha$ et $0 < \lambda' < \alpha$.

Les courbes c sont des hyperboles ayant leurs asymptotes parallèles aux axes et situées dans les angles de ces asymptotes où pénètre et reste $y = -x$.

Seule nous intéresse la branche aux x positifs. L'asymptote parallèle à Ox a son ordonnée supérieure à a, l'autre a son abscisse positive. Si un point α_1, β_1 est dans la partie négative de la branche d'hyperbole qui passe en α, β, la valeur λ_1 est supérieure à λ, et les deux branches d'hyperboles n'ont pas de points communs.

Les courbes γ sont les symétriques des précédentes relativement à $\eta = a$.

Si, dans la construction exposée, on prend successivement un arc sur γ_0, un arc sur c_1, un arc sur γ_1, etc., avant d'atteindre respective-

ment les arcs de c_n et de γ_n, on est constamment (pour $\xi > \lambda_n$) dans la région positive de c_n et (pour $\xi > \lambda'_n$) dans la région négative de γ_n. Cela explique que λ et λ' sont infiniment grands avec n. Sinon, comme λ et λ' croissent toujours, si l'un, λ par exemple, ne devient pas infini, il reste inférieur à un nombre fixe λ_0 et l'on a toujours, à partir de $\xi > \lambda_0$,

$$\eta > a + \frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\xi - \lambda_0}.$$

En intégrant, on trouverait que

$$\overline{\lim} \frac{y(n)}{x^2(n)} \geqq a + \frac{1}{\lambda_0} > a.$$

Si λ' restait inférieur à λ'_0, la plus grande limite de $\frac{y}{x^2}$ serait de même inférieure à $a - \frac{1}{\lambda'_0}$. Donc, y''_1 tend vers a.

Troisième cas. — $\lim\limits_{x=\infty} \dfrac{y(n)}{x^2(n)} = 0$.

Je prends pour courbes c des parallèles à l'axe des x et pour courbes γ des courbes telles que

$$\eta = \frac{1}{k + (\xi - \lambda)^2}.$$

38. Pareillement, on peut s'arranger pour que y''_1 vérifie la condition, dont nous reconnaîtrons l'intérêt,

$$\lim_{x=\infty} y''_1\left[x + \frac{\theta k}{\sqrt{y''_1(x)}}\right] : y''_1(x) = 1,$$

quelque grand que soit le nombre fixe k, et quelle que soit la façon dont varie θ entre 0 et 1.

Définissons dans les trois cas précédents les courbes c et γ passant par un point α, β.

Premier cas. — Considérons le faisceau de courbes

$$\eta = \frac{\beta}{\left[1 - \frac{\varepsilon\sqrt{\beta}}{k}(\xi - \alpha)\right]^2}$$

qui passent en α, β.

On a, quel que soit k, fixe,

$$\eta\left[\xi + \frac{\theta k}{\sqrt{\eta(\xi)}}\right] = \frac{1}{(1-\theta\varepsilon)^2}\,\eta(\xi).$$

Ces courbes dépendent encore du paramètre k, si on laisse ε fixe. Les courbes γ correspondent à k infini, $\eta = \beta$. Pour une valeur quelconque de k, on a une courbe c. Car la courbe C correspondante décrite par x, y_1 a une asymptote verticale. Enfin, on peut supposer pour les courbes c qu'on particularise les valeurs de ε et k pour chaque point α, β, de façon que $\frac{1}{\varepsilon}$ et k soient infiniment grands, si α et β le sont simultanément.

Il suffirait, pour que toutes les hypothèses soient vérifiées, de prendre pour réseau c les courbes qui passent en un même point α_0, β_0 choisi une fois pour toutes,

$$\eta = \frac{\beta_0}{[1-\lambda(\xi-\alpha_0)]^2}.$$

Quand α, β s'éloigne, λ tend vers zéro et la condition proposée pour y''_1 est vérifiée.

Deuxième cas. — Nous avons construit y_1 de façon que y''_1 tendît vers une limite non nulle : le problème actuel est donc résolu.

Troisième cas. — Considérons les courbes

$$\eta = \frac{\beta}{\left[1+\frac{\varepsilon\sqrt{\beta}}{k}(\xi-\alpha)\right]^2}.$$

On a

$$\eta\left[\xi + \frac{\theta k}{\sqrt{\eta}}\right] = \frac{1}{(1+\theta\varepsilon)^2}\,\eta(\xi).$$

Pour k infini, on a les courbes c, $\eta = \beta$.

Une valeur finie de k donnera une courbe γ. Car la courbe Γ correspondante décrite par x, y_1 a une asymptote non verticale. Comme ci-dessus, la valeur de k correspondant à une valeur de α donnée sera choisie infiniment grande avec α.

Nous montrerons plus loin que y'_1 satisfait à la relation

$$\lim y'_1\left[x+\frac{\theta k}{y'_1(x)}\right]:y'_1(x)=1.$$

39. Pour construire $y_2(x)$ à partir de y''_2, nous définirons de même deux familles de courbes dans le plan des x, y''_2 : l'une formée des courbes c telles que, si xy''_2 les suit toujours, tous les points L_n finissent (du moins si A et B, supposés positifs, ne sortent pas d'un certain champ) par surpasser la courbe

$$x,\ y_2=\int_{x_0}^{x}dx\int_{x_0}^{x}y''_2\,dx+A(x-x_0)+B;$$

l'autre formée des courbes γ telles que, si xy''_2 suit constamment l'une d'elles, xy_2 surpasse une infinité de points L, quels que soient A et B. Le choix de y''_2 se décrit comme celui de y''_1. Il y a trois cas à distinguer, suivant que $\overline{\lim_{x=\infty}}\dfrac{y(n)}{x^2(n)}$ est infini, fini ou nul.

Nous n'aurons jamais à calculer explicitement y_1 ni y_2. Il nous suffit d'avoir prouvé leur existence et donné un moyen théorique de les obtenir.

Calcul de la limite supérieure du module d'un produit canonique.

40. Soit donc $F(z)$ un produit supposé canonique. Soit p_n l'exposant de convergence du $n^{\text{ième}}$ facteur $E\left(\dfrac{z}{a_n}, p_n\right)$. Soit $\varphi(u, p_n)$ le maximum de $\log|E(x, p_n)|$ pour $|x|=u$ [ce que nous désignions aussi au précédent Chapitre par $M_{p_n}(u)$]. Pour $|z|=r$, le maximum de $\log\left|E\left(\dfrac{x}{a_n}, p_n\right)\right|$ est $\varphi\left(\dfrac{r}{r_n}, p_n\right)$, et la limite supérieure $P(r)$ du maximum de $\log|F(z)|$ est

$$\sum_1^\infty \varphi\left(\frac{r}{r_n}, p_n\right).$$

Nous poserons

$$\log r=X \qquad \text{et} \qquad P(r)=H(X).$$

Nous avons trouvé trois formes approchées pour φ.

Supposons que la fonction $\log n$ de $\log r_n$, interpolée pour les valeurs de $x = \log r$ comprises entre les nombres de la suite $\log r_n$, ait sa dérivée jamais décroissante, ou même simplement [1] qu'*il existe un entier p croissant* (qui sera notre exposant de convergence) et *une suite de nombres $x_1, x_2, \ldots, x_p, \ldots$ tels que pour*

$$x_p \leqq x < x_{p+1}, \qquad p - \alpha \leqq y' < p + 1 - \alpha,$$

α étant positif et fixe. Nous dirons que *y satisfait à l'hypothèse* A. Nous supposerons α inférieur à 1, bien que cette hypothèse n'intervienne pas en fait dans le résultat final. Nous choisirons, si

$$x_p \leqq x < x_{p+1}, \qquad p_n = p.$$

Nous allons montrer que les deux sommes désignées au début de ce Chapitre par $P_1(r) = \Pi_1(X)$ et $P_2(r) = \Pi_2(X)$ sont bien du même ordre de grandeur et évaluer $\Pi(X)$.

Nous désignerons par ν_p la valeur de e^y pour $x = x_p$; par n_p le plus petit entier non inférieur à ν_p. On a

$$n_p - 1 < \nu_p \leqq n_p.$$

Si

$$\nu_p, \quad \nu_{p+1}, \quad \ldots, \quad \nu_{p+m}$$

sont compris entre deux entiers consécutifs, si l'on a

$$\nu_{p-1} < i - 1 < \nu_p \leqq \nu_{p-1} \leqq \ldots \leqq \nu_{p+m} \leqq i < \nu_{p+m+1},$$

nous désignerons i par n_{p+m}, $i - 1$ de préférence par $n_p - 1$ et nous dirons que

$$n_{p-1} < n_p = n_{p+1} = \ldots = n_{p+m} < n_{p+m+1}.$$

Alors, quel que soit p si

$$n_p \leqq n \leqq n_{p+1} - 1,$$

l'exposant de convergence attaché au zéro a_n est p.

---

(1) y' n'est pas nécessairement croissant, mais peut osciller entre les valeurs $p - \alpha$ et $p + 1 - \alpha$ $\left(\text{par exemple au voisinage de } p + \frac{1}{2}\right)$, après avoir pris la première et avant de prendre la seconde. Ceci est à rapprocher du fait signalé par M. Boutroux (*Acta mathematica*, 1904, p. 103 et suivantes, p. 115) au sujet des fonctions de genre fini, que la limitation de leur module peut se faire si

$$p + \alpha < y' < p + 1 - \alpha.$$

41. Donnons-nous un nombre ε arbitrairement petit. Nous allons calculer le module maximum du produit canonique avec une approximation inférieure à ε, ou du moins inférieure à un nombre arbitrairement petit en même temps que ε.

On sait qu'il existe deux nombres h et p_0, tels que, si $p \geqq p_0$:

1° Pour $u < 1 - \frac{h}{p}$, on a [si $M(u)$ désigne $\varphi(u, p)$]

$$1 < \frac{G(u)}{M(u)} < 1 + \varepsilon \qquad \text{avec} \qquad G(u) = \frac{u^{p+1}}{(p+1)(1-u)};$$

2° Pour $u > 1 + \frac{h}{p}$, on a

$$1 - \varepsilon < \frac{G(u)}{M(u)} < 1 \qquad \text{avec} \qquad G(u) = \frac{u^{p+1}}{p(u-1)};$$

3° Pour $1 - \frac{h}{p} < u < 1 + \frac{h}{p}$, nous utiliserons seulement ce fait que $M(u)$ est borné. Il peut être cependant intéressant de remarquer que le rapport $\frac{G(u)}{M(u)}$ est fini quand h est borné, si

$$G(u) = u^{\tau}, \qquad p \leqq \tau \leqq p + 1.$$

D'après cela, je forme un premier groupement *fixe* avec les facteurs d'exposant inférieur à p_0. Le plus haut rang de ces facteurs est $n_{p_0} - 1$. Nous désignerons aussi n_{p_0} par N_0.

Je divise les termes qui suivent en trois catégories suivant que leurs y sont : 1° inférieurs à $Y_1 = Y - h$; 2° compris entre Y_1 et $Y_2 = Y + h$; 3° supérieurs à Y_2.

Soient X_1 la valeur de x correspondant à Y_1, X_2 celle qui correspond à Y_2. D'après

$$Y - y = (X - x)y'(\lambda),$$

λ étant compris entre x et X, on a, si $Y_1 < y < Y$,

$$(X - x)(p - \alpha) < Y - y < h,$$

si $x_p \leqq x < x_{p+1}$, en sorte que pour les zéros de cet intervalle $\varphi\left(\frac{r}{r_n}, p_n\right)$ est borné en même temps que h. (Remarquons en même temps que $X - X_1$ est infiniment petit avec $\frac{1}{X}$.)

Si $Y_2 < y$,

$$(x - X)(p + 1 - \alpha) > y - Y > h,$$

en sorte que la forme $\left(\frac{r}{r_n}\right)^{p+1} \frac{1}{p\left(\frac{r}{r_n} - 1\right)}$ nous donnera $\varphi\left(\frac{r}{r_n}, p\right)$, avec une erreur relative inférieure à ε. D'après $X_2 - X < \frac{h}{P - \alpha}$, $X_2 - X$ est infiniment petit avec $\frac{1}{X}$.

Nous désignerons par P, P_1, P_2 les exposants qui règnent respectivement en X, X_1, X_2, en sorte qu'on a

$$x_P \leqq X < x_{P+1}; \qquad x_{P_1} \leqq X_1 < x_{P_1+1}, \qquad x_{P_2} \leqq X_2 < x_{P_2+1},$$

par N_1 ou par n_{P_1+1} le plus petit entier que ne surpasse pas e^{Y_1},

$$n'_{P_1+1} - 1 < e^{Y_1} \leqq n'_{P_1+1};$$

par N_2 ou par n_{P_2} le plus petit entier que ne surpasse pas e^{Y_2},

$$n'_{P_2} - 1 < e^{Y_2} \leqq n'_{P_2}.$$

Nous désignerons aussi e^{Y_1} par ν'_{P_1+1} et e^{Y_2} par ν'_{P_2}. On a

$$\nu'_{P_1+1} \leqq n'_{P_1+1} \leqq n_{P_1+1}$$

et

$$n_{P_2} \leqq \nu'_{P_2} \leqq n'_{P_2}.$$

Nous écrivons la somme à évaluer

$$\Pi(X) = \sum_1^\infty \varphi\left(\frac{r}{r_n}, p_n\right) = \sum_1^{N_0-1} + \sum_{N_0}^{N_1-1} + \sum_{N_1}^{N_2-1} + \sum_{N_2}^{\infty} = S_0 + S_1 + S_2 + S_3.$$

S_0 est inférieur à

$$r^{p_0} \sum_1^{N_0-1} \frac{1}{r_n^{p_0}}.$$

N_0 étant fixe, comme les sommes suivantes, dans leur ensemble, croissent plus vite que r^m, quel que soit le nombre fixe m, S_0 à partir d'une certaine valeur de X deviendra inférieur à $\varepsilon\Pi(X)$. Nous n'aurons donc pas à nous occuper de S_0.

S_3 nous sera plus facile à évaluer que S_1.

42. *Calcul de* S_3. — Posons

$$\sum_{n=n_p}^{n=n_{p+1}-1} \varphi\left(\frac{r}{r_n}, p\right) = U_p. \qquad \sum_{n'_{P_2}}^{n_{P_2+1}-1} \varphi\left(\frac{r}{r_n}, P_2\right) = U'_{P_2}.$$

Nous avons

$$S_3 = U'_{P_2} + U_{P_2+1} + \ldots + U_p + \ldots.$$

La fonction $y = f(x)$ interpole la fonction r_n de n pour les valeurs non entières de n. Du même coup se trouve interpolée la fonction $\varphi\left(\frac{r}{r_n}, p\right)$ pour toutes les valeurs de n, et pour chaque valeur entière et fixe de p. La fonction interpolatrice $\varphi\left(\frac{r}{r_n}, p\right)$, p étant fixe, décroît relativement à n. Grâce à cette décroissance il est aisé d'évaluer l'erreur commise en remplaçant U_p par

$$V_p = \int_{\nu_p}^{\nu_{p+1}} \varphi\left(\frac{r}{r_n}, p\right) dn.$$

Nous posons aussi

$$V'_{P_2} = \int_{\nu'_{P_2}}^{\nu_{P_2+1}} \varphi\left(\frac{r}{r_n}, P_2\right) dn.$$

Mais remarquons dès maintenant que, pour une même valeur de n,

$$\varphi\left(\frac{r}{r_n}, p\right) < \varphi\left(\frac{r}{r_n}, p+1\right),$$

parce que $\frac{r}{r_n}$ est inférieur à

$$1 - \frac{h}{P_2} < 1 - \frac{h}{p} < 1 - \frac{1}{2p}$$

(*voir* page 37 en note).

Posons

$$T_p = \int_{n_p}^{n_{p+1}} \varphi\left(\frac{r}{r_n}, p\right) dn.$$

Pour $p = P_2$, nous remplaçons T_p par T'_{P_2} et n_p par n'_{P_2}.

Nous démontrerons plus loin que la série V_p converge. Si nous admettons sa convergence, le calcul suivant montre celles de U_p et de T_p et rattache leurs valeurs à celle de la première.

Nous désignerons par

$$\sum_{P_2}^{P_2+m}{}' U_p$$

la somme

$$U_{P_2} + U_{P_2+1} + \ldots + U_{P_2+m}.$$

De même

$$\sum_{P_2}^{P_2+m}{}' V_p = V'_{P_2} + \sum_{P_2+1}^{P_2+m} V_p,$$

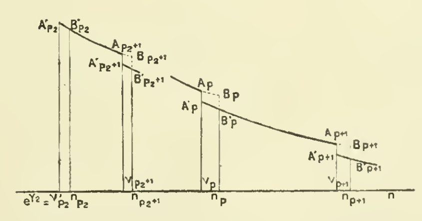
$$\sum_{P_2}^{P_2+m}{}' T_p = T'_{P_2} + \sum_{P_2+1}^{P_2+m} T_p.$$

On a

$$\sum_{P_2}^{P_2+m}{}' V_p = \int_{\nu'_{P_2}}^{\nu_{P_2+m+1}} f_1(n)\,dn, \qquad \sum_{P_2}^{P_2+m}{}' T_p = \int_{n'_{P_2}}^{n_{P_2+m+1}} f_2(n)\,dn.$$

Indiquons par une figure le trajet des points représentatifs des fonctions f_1, f_2. Soient A_p, B_p les points d'ordonnées $\varphi\left(\frac{r}{r_n}, p-1\right)$ et

Fig. 5.



d'abscisses respectives ν_p, n_p. Soient A'_p, B'_p les points d'ordonnées $\varphi\left(\frac{r}{r_n}, p\right)$ et d'abscisses ν_p, n_p. A'_{P_2}, B'_{P_2} ont pour ordonnées $\varphi\left(\frac{r}{r_n}, P_2\right)$ et pour abscisses ν'_{P_2}, n'_{P_2}. Le point représentatif de f_1 suit le trajet (trait fort)

$$A'_{P_2} A_{P_2+1}, \quad A'_{P_2+1} A_{P_2+2}, \quad \ldots, \quad A'_{P_2+m} A_{P_2+m+1}.$$

Le point représentatif de f_2 suit le trajet (trait fort et trait pointillé)

$$B'_{P_2} B_{P_2+1}, \quad \ldots, \quad B'_{P_2+m} B_{P_2+m+1}.$$

Les arcs $A'_p A_{p+1}$, $B'_p B_{p+1}$ sont tous deux sur la courbe d'ordonnée $\varphi\left(\frac{r}{r_n}, p\right)$. On a donc

$$(1)\qquad \sum_{P_2}^{P_2+m}{}' V_p - \sum_{P_2}^{P_2+m} T_p = \int_{\nu'_{P_2}}^{n'_{P_2}} f_1(n)\,dn - \int_{n'_{P_2}}^{\nu_{P_2+m+1}} (f_2 - f_1)\,dn - \int_{\nu_{P_2+m+1}}^{n_{P_2+m+1}} f_2(n)\,dn.$$

Évaluons l'intégrale médiane. $f_2 - f_1$ est nul si $n_p < n < \nu_{p+1}$. Si $\nu_p < n < n_p$,

$$f_2 - f_1 = \varphi\left(\frac{r}{r_n}, p-1\right) - \varphi\left(\frac{r}{r_n}, p\right),$$

et par suite

$$0 < f_2 - f_1 < \varphi\left(\frac{r}{r_{\nu_p}}, p-1\right) - \varphi\left(\frac{r}{r_{n_p}}, p\right) = v_p.$$

Donc

$$0 < \int_{\nu_p}^{n_p} (f_2 - f_1)\,dn < v_p,$$

d'après $n_p - \nu_p < 1$. Donc

$$0 < \int_{n'_{P_2}}^{\nu_{P_2+m+1}} (f_2 - f_1)\,dn < \sum_{P_2+1}^{P_2+m} v_p$$
$$= \varphi\left(\frac{r}{r_{\nu_{P_2+1}}}, P_2\right) - \varphi\left(\frac{r}{r_{n_{P_2+1}}}, P_2+1\right) + \varphi\left(\frac{r}{r_{\nu_{P_2+2}}}, P_2+1\right)$$
$$- \varphi\left(\frac{r}{r_{n_{P_2+2}}}, P_2+2\right) + \ldots - \varphi\left(\frac{r}{r_{n_{P_2+m}}}, P_2+m\right).$$

Le second membre est la somme des $2m$ premiers termes d'une série alternée à termes décroissants, elle est inférieure au premier terme

$$\left(\frac{r}{r_{\nu_{P_2+1}}}, P_2\right) < \varphi(1, P_2) < k,$$

k étant indépendant de P_2.

D'ailleurs

$$\int_{\nu'_{P_2}}^{n'_{P_2}} f_1(n)\,dn < \varphi(1, P_2) < k.$$

Quant au dernier terme de (1),

$$\int_{\nu_{P_2+m+1}}^{n_{P_2+m+1}} f_2(n)\,dn,$$

il tend vers zéro avec $\frac{1}{m}$. Donc

$$(1)\qquad \sum_{P_2}^{P_2+m}{}' V_p - \sum_{P_2}^{P_2+m}{}' T_p = \delta k - \eta(m) \qquad (\delta^2 < 1);$$

$\eta(m)$ tend vers zéro avec $\frac{1}{m}$. Comme conséquence particulière, la série T_p à termes positifs converge en même temps que V_p.

On a enfin, θ_p étant positif inférieur à 1,

$$U_p = T_p + \theta_p\left[\varphi\left(\frac{r}{r_{n_p}}, p\right) - \varphi\left(\frac{r}{r_{n_{p+1}}}, p\right)\right] = T_p + \theta_p t_p.$$

Les formules sont les mêmes pour $p = P_2$ en remplaçant U_p, T_p, n_p par U'_{P_2}, T'_{P_2}, n'_{P_2}. Or

$$\sum_{P}^{P_2+m}{}' t_p = \varphi\left(\frac{r}{r_{n'_{P_2}}}, P_2\right) - \sum_{P_2+1}^{P_2+m}\left[\varphi\left(\frac{r}{r_n}, p\right) - \varphi\left(\frac{r}{r_n}, p+1\right)\right] - \varphi\left(\frac{r}{r_{n_{P_2+m+1}}}, P_2+m+1\right).$$

Donc $\sum_{P_2}^{P_2+m}{}' t_p$, qui est positif puisque t_p l'est, est inférieur à

$$\varphi\left(\frac{r}{r_{n'_{P_2}}}, P_2\right) < k.$$

Donc

$$\sum_{P_2}^{P_2+m}{}' U_p = \sum_{P_2}^{P_2+m}{}' T_p + \theta \sum_{P_2}^{P_2+m}{}' t_p = \sum_{P_2}^{P_2+m}{}' T_p + \theta k.$$

En substituant la valeur de $\sum_{P_2}^{P_2+m}{}' T_p$ dans (1), on trouve

$$(2)\qquad \sum_{P_2}^{P_2+m}{}' V_p = \sum_{P}^{P_2+m}{}' U_p + 2\delta k - \eta(m).$$

Tel est le résultat que nous avions en vue. La série U_p est convergente si V_p l'est et les sommes des deux séries ne diffèrent que d'une quantité bornée.

Remarquons que nous avons supposé les nombres n_p distincts. Si n_p coïncide avec n_{p+1}, on a simplement

$$U_p = T_p = 0.$$

La différence $\sum_{P_2}^{P_2+m}{}' (V_p - U_p)$ a toujours les bornes que nous avons calculées.

43. Évaluons les termes de la série V_p. On a

$$V_p = (1-\theta\varepsilon)\int_{\nu_p}^{\nu_{p+1}} \left(\frac{r}{r_n}\right)^{p+1} \frac{dn}{p\left(1-\dfrac{r}{r_n}\right)},$$

et θ est compris entre 0 et 1 parce que $\dfrac{r}{r_n} < 1 - \dfrac{h}{p}\cdot$ Nous prenons pour nouvelle variable d'intégration x. Les limites sont x_p et x_{p+1}. dn devient $e^y y'\,dx$ et $\dfrac{y'}{p}$ est compris entre $1-\dfrac{\alpha}{p}$ et $1+\dfrac{1-\alpha}{p}\cdot$ Donc, p_0 étant assez grand,

$$e^{-Y} V_p = (1+2\delta\varepsilon)\int_{x_p}^{x_{p+1}} e^{y-Y+(p+1)(X-x)} \frac{dx}{1-e^{X-x}} \qquad (\delta^2 < 1).$$

Or, d'après

$$y' < p+1-\alpha \qquad \text{si} \qquad x_p \leqq x < x_{p+1},$$

nous avons

$$y - Y = \int_X^x y'\,dx < (P+1-\alpha)(x_{P+1} - X)$$
$$+ (P+2-\alpha)(x_{P+2} - x_{P+1}) + \ldots + (p+1-\alpha)(x - x_p).$$

D'où

$$y - Y + (p+1)(X-x) < -\alpha(x-X) - \left[x_p + x_{p-1} + \ldots + x_{P+1} - \overline{p-P}X\right].$$

Au second membre la partie entre crochets est positive. Comme nous ne pouvons l'évaluer, nous la supprimons, ce qui renforce l'inégalité. Donc

$$V_p < (1+2\varepsilon)e^Y \int_{x_p}^{x_{p+1}} \frac{e^{-\alpha(x-X)}}{1-e^{X-x}}\,dx.$$

En donnant pour limites à l'intégrale X_2 et x_{P_2+1}, on a une limite supérieure de V'_{P_2}. Donc

$$\sum_{P_2}^{P_2+m}{}' V_p < (1+2\varepsilon) e^{X} \int_{X_2}^{x_{P_2+m+1}} \frac{e^{-\alpha(x-X)}}{1-e^{X-x}} dx.$$

Ceci nous montre que la série V_p est convergente et nous donne une limite supérieure de sa somme. On a

$$e^{-X} \sum_{P_2}^{\infty}{}' V_p < (1+2\varepsilon) \int_{X_2}^{\infty} \frac{e^{-\alpha(x-X)}}{1-e^{X-x}} dx.$$

L'intégrale du second membre devient par le changement de variable

$$\frac{r_n}{r} = e^{x-X} = u,$$

et si l'on pose $e^{X_2-X} = 1+a$,

$$\int_{1+a}^{\infty} \frac{du}{u^{\alpha}(u-1)},$$

α étant fixe et a infiniment petit. Ceci est égal à $L\frac{1}{a} + C'_3$, C'_3 tendant vers une limite. Nous trouvons donc

$$e^{-X} \sum_{P_2}^{\infty}{}' V_p < (1+2\varepsilon) \left(L\frac{1}{X_2-X} + C'_3 \right).$$

Comme $S_3 = \sum_{P_2}^{\infty}{}' U_p$ ne diffère de $\sum_{P_2}^{\infty}{}' V_p$ que d'une quantité bornée, on a, C_3 étant borné,

$$S_3 < (1+2\varepsilon) \left(L\frac{1}{X_2-X} + C_3 \right) e^{X}.$$

44. *Calcul de* S_2. — On a

$$S_2 = \sum_{N_1}^{N_2-1} \varphi\left(\frac{r}{r_n}, p_n\right) = \sum_{N_1}^{N-1} + \sum_{N}^{N_2-1} = S'_2 + S''_2.$$

Évaluons d'abord S''_2. Chacun des termes de la somme S''_2 est inférieur

à $\varphi(1, p_n)$ qui est inférieur à k, quel que soit p_n. Donc

$$\mathrm{S}''_2 < (\mathrm{N}_2 - \mathrm{N})k < \left(e^{\mathrm{X}}\,\overline{e^{h} - 1} + 2\theta\right)k, \qquad \mathrm{S}''_2 = e^{\mathrm{X}}\mathrm{C}''_2,$$

C''_2 est borné.

Étudions S'_2. Nous avons vu que, si $\mathrm{X}_1 < x(n) < \mathrm{X}$, $\varphi\left(\frac{r}{r_n}, p_n\right)$ est borné, parce que $p_n\left(\frac{r}{r_n} - 1\right)$ l'est. En effet,

$$(\mathrm{X} - x)(p - \alpha) < \mathrm{Y} - y < h.$$

Or, *sans qu'il soit besoin d'utiliser la forme u^τ approchée de* $\mathrm{M}(u)$, il résulte d'un théorème établi au premier Chapitre que, si $p(u - 1)$ est borné, $\mathrm{M}(u)$ l'est également. Soit donc C'_1 la borne de φ.

Le nombre des termes de S'_2 étant à une unité près

$$e^{\mathrm{X}}(1 - e^{-h}),$$

on a

$$e^{-\mathrm{X}}\mathrm{S}'_2 < \mathrm{C}'_2(1 - e^{-h}),$$

et par suite

$$\mathrm{S}_2 < \mathrm{C}_2 e^{\mathrm{X}},$$

C_2 étant borné.

45. *Calcul de* S_1. — Nous posons toujours

$$\mathrm{U}_p = \sum_{n_p}^{n_{p+1}-1} \varphi\left(\frac{r}{r_n}, p\right)$$

et

$$\mathrm{V}_p = \int_{\nu_p}^{\nu_{p+1}} \varphi\left(\frac{r}{r_n}, p\right) dn.$$

Soient

$$\mathrm{U}'_{\mathrm{P}_1} = \sum_{n_{\mathrm{P}_1}}^{n'_{\mathrm{P}_1+1}-1} \varphi\left(\frac{r}{r_n}, \mathrm{P}_1\right), \qquad \mathrm{V}'_{\mathrm{P}_1} = \int_{\nu_{\mathrm{P}_1}}^{\nu'_{\mathrm{P}_1+1}} \varphi\left(\frac{r}{r_n}, \mathrm{P}_1\right)$$

(on a $\nu_{\mathrm{P}_1+1} = e^{\mathrm{Y}_1}$). Nous notons

$$\sum_{p_0}^{\mathrm{P}_1}{}' \mathrm{U}_p = \sum_{p_0}^{\mathrm{P}_1 - 1} \mathrm{U}_p + \mathrm{U}'_{\mathrm{P}_1} \qquad \text{et} \qquad \sum_{p_0}^{\mathrm{P}_1}{}' \mathrm{V}_p = \sum_{p_0}^{\mathrm{P}_1 - 1} \mathrm{V}_p + \mathrm{V}'_{\mathrm{P}_1}.$$

Nous remplaçons $\sum_{p_0}^{P_1}{}' U_p = S_1$ par $\sum_{p_0}^{P_1}{}' V_p$ en commettant une erreur que nous évaluerons ensuite.

Nous savons que, si $p_n[X - x(n)]$ est supérieur à h, on a certainement

$$\varphi\left(\frac{r}{r_n}, p_n\right) = (1 + \theta\varepsilon)\left(\frac{r}{r_n}\right)^{p_n+1} \frac{1}{p_n\left(\frac{r}{r_n} - 1\right)}.$$

Si donc nous remplaçons $\varphi\left(\frac{r}{r_n}, p\right)$ par cette dernière expression dans chaque terme de S_1, nous obtenons la valeur de S_1 en négligeant cependant dans cette somme les nombres (1) pour lesquels $p_n\left(\frac{r}{r_n} - 1\right)$ est inférieur à h. Mais, pour ces termes, $\varphi\left(\frac{r}{r_n}, p_n\right)$ a une certaine borne k_1. Ils sont en nombre certainement inférieur à e^{Y_1} et à plus forte raison à e^Y. Si donc

$$W_p = \int_{\nu_p}^{\nu_{p+1}} \left(\frac{r}{r_n}\right)^{p+1} \frac{dn}{p\left(\frac{r}{r_n} - 1\right)},$$

on a certainement

$$\sum_{p_0}^{P_1}{}' V_p = (1 + \theta\varepsilon) \sum_{p_0}^{P_1}{}' W_p + e^Y k_1.$$

Or,

$$e^{-Y} W_p = \int_{x_p}^{x_{p+1}} e^{y - Y + (p+1)(X - x)} \frac{y'}{p} \frac{dx}{e^{X-x} - 1};$$

$\frac{y'}{p}$ est inférieur à $1 + \frac{1-\alpha}{p_0}$. On peut supposer que le nombre fixe p_0 a été choisi assez grand pour que $\left(1 + \frac{1-\alpha}{p_0}\right)(1 + \varepsilon) < 1 + 2\varepsilon$. D'autre

(1) La fonction $p_n\left(\frac{r}{r_n} - 1\right)$ a relativement à r_n un sens de variation sur lequel nous ne pouvons rien affirmer *a priori*. Tandis que, pour $r_n > r$, elle est constamment décroissante, pour $r_n < r$, elle peut présenter des oscillations, par exemple, croître brusquement si, r_n restant sensiblement constant, p_n reçoit un grand accroissement subit, pour décroître ensuite lentement, si p_n varie très peu, pendant que r_n croît dans un certain intervalle.

part, d'après $y' \geqq p - \alpha$, si $x_p < x < x_{p+1}$,

$$\mathrm{Y} - y = \int_x^{\mathrm{X}} y'\,dx > (p-\alpha)(x_{p+1} - x_p) + (p+1-\alpha)(x_{p+2} - x_{p+1}) + \ldots + (\mathrm{P}-\alpha)(\mathrm{X} - x_{\mathrm{P}})$$

ou

$$y - \mathrm{Y} + (p+1)(\mathrm{X}-x) < (1+\alpha)(\mathrm{X}-x) - \left[\overline{\mathrm{P}-p}\,\mathrm{X} - x_{\mathrm{P}} - x_{\mathrm{P}-1} - \ldots - x_p\right].$$

Comme dans le calcul de S_3, nous supprimons le crochet, quantité positive, ce qui renforce l'inégalité

$$e^{-\mathrm{Y}}\mathrm{W}_p < \frac{1+2\varepsilon}{1+\varepsilon}\int_{x_p}^{x_{p+1}} e^{(1+\alpha)(\mathrm{X}-x)}\frac{dx}{e^{\mathrm{X}-x}-1}.$$

Donc

$$e^{-\mathrm{Y}}\sum_{p_0}^{\mathrm{P}_1}{}' \mathrm{W}_p < (1+2\varepsilon)\int_{x_{p_0}}^{\mathrm{X}_1}\frac{e^{(1+\alpha)(\mathrm{X}-x)}}{e^{\mathrm{X}-x}-1}\,dx + k_1.$$

Le changement de variable

$$\frac{r}{r_n} = e^{\mathrm{X}-x} = u$$

et les notations

$$e^{\mathrm{X}-x_{p_0}} = \mathrm{A}, \qquad e^{\mathrm{X}-\mathrm{X}_1} = 1 + a$$

transforment l'intégrale en

$$\mathrm{I} = \int_{1+a}^{\mathrm{A}}\frac{u^\alpha\,du}{u-1}.$$

Cette intégrale devient infiniment grande par ses deux limites, A et $\frac{1}{a}$ étant eux aussi infiniment grands. Pour l'évaluer, nous écrivons

$$\int_{1+a}^{\mathrm{A}}\frac{u^\alpha\,du}{u-1} = \int_{1+a}^{2}\frac{du}{u-1} + \int_{1+a}^{2}\frac{u^\alpha - 1}{u-1}\,du + \int_2^{\mathrm{A}} u^\alpha\left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u}\right)du + \int_2^{\mathrm{A}} u^{\alpha-1}\,du.$$

La première intégrale est $\mathrm{L}\frac{1}{a}$. La seconde tend vers $\int_1^2 \frac{u^\alpha - 1}{u-1}\,du$ qui a un sens. La troisième vers $\int_2^\infty \frac{du}{u^{1-\alpha}(u-1)}$ qui a un sens,

puisque $\alpha < 1$. La dernière est $\frac{1}{\alpha}(X^\alpha - 2^\alpha)$. Donc, notre intégrale est

$$L\frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha}X^\alpha + c'_1,$$

c'_1 tendant vers une limite pour X infini.

Or

$$a = e^{X - X_1} - 1 = (X - X_1)(1 + \eta),$$

η tendant vers zéro avec $\frac{1}{X}$ puisque $X - X_1 < \frac{h}{P_1 - \alpha}$ tend vers zéro. D'après $A = e^{X - x_{p_0}}$, il vient pour expression de I

$$L\frac{1}{X - X_1} + \frac{1}{\alpha}e^{\alpha X - \alpha x_{p_0}} + c'_1.$$

p_0 qui est choisi une fois pour toutes peut être supposé assez grand pour que, α étant fixe, $\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha x_{p_0}} < \varepsilon$. Donc

$$e^{-X}\sum_{p_0}^{P_1}{}' V_p < (1 + 2\varepsilon)\left(L\frac{1}{X - X_1} + \varepsilon e^{\alpha X} + C_1\right),$$

et ceci est aussi, à une quantité bornée près, la limite supérieure de $e^{-X}S_1$, sauf l'erreur introduite par la substitution de $\sum_{p_0}^{P_1}{}' V_p$ à $\sum_{p_0}^{P_1}{}' U_p$. C'est là le dernier point à examiner.

46. Mais auparavant, remarquons que S_2 *se trouve être négligeable à l'égard de* S_1 *et de* S_3. Pour les fonctions de genre fini au contraire, à croissance suffisamment régulière, il est possible de prendre h assez grand pour que, à ε près, on n'altère pas le maximum de la fonction en négligeant les zéros de rang extérieur à l'intervalle $\frac{n}{h}$ à nh. Pour les fonctions de genre infini, quelque grand que soit h fixe, les zéros de rang compris entre $\frac{n}{h}$ et nh apportent à la limite supérieure du module une contribution négligeable à l'égard de celle des autres zéros.

47. Évaluons la différence

$$\sum_{p_0}^{P_1} V_p - \sum_{p_0}^{P_1}{}' U_p.$$

Comme dans le cas de S_3, on voit immédiatement que $\varphi\left(\frac{r}{r_n}, p\right)$ décroît, p étant fixe, quand n croît. Mais, ici, on a en général

$$\varphi\left(\frac{r}{r_n}, p\right) < \varphi\left(\frac{r}{r_n}, p+1\right).$$

Posons, comme plus haut,

$$\mathrm{T}_p = \int_{n_p}^{n_{p+1}} \varphi\left(\frac{r}{r_n}, p\right) dn,$$

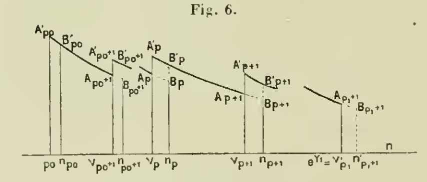
$$\mathrm{T}'_{\mathrm{P}_1} = \int_{n_{\mathrm{P}_1}}^{n'_{\mathrm{P}_1+1}} \varphi\left(\frac{r}{r_n}, \mathrm{P}_1\right) dn \qquad \text{et} \qquad \sum_{p_0}^{\mathrm{P}_1}{}' \mathrm{T}_p = \mathrm{T}'_{\mathrm{P}_1} + \sum_{p_0}^{\mathrm{P}_1 - 1} \mathrm{T}_p.$$

Écrivons

$$\sum_{p_0}^{\mathrm{P}_1}{}' \mathrm{V}_p = \int_{n_{p_0}}^{\nu'_{\mathrm{P}_1+1}} f_1(n)\, dn, \qquad \sum_{p_0}^{\mathrm{P}_1}{}' \mathrm{T}_p = \int_{n_{p_0}}^{n'_{\mathrm{P}_1+1}} f_2(n)\, dn.$$

Voici le trajet des points représentatifs de f_1 et f_2.

Fig. 6.



Si A_p, B_p sont les points d'ordonnées $\varphi\left(\frac{r}{r_n}, p-1\right)$ et d'abscisses respectives ν_p, n_p; A'_p, B'_p les points d'ordonnées $\varphi\left(\frac{r}{r_n}, p\right)$ et d'abscisses ν_p, n_p; $\mathrm{A}_{\mathrm{P}_1+1}$, $\mathrm{B}_{\mathrm{P}_1+1}$ les points d'ordonnées $\varphi\left(\frac{r}{r_n}, \mathrm{P}_1\right)$ et d'abscisses $\nu'_{\mathrm{P}_1+1} = e^{\mathrm{Y}_1}$, n'_{P_1+1}; le point représentatif de f_1 suit le trajet $\mathrm{A}'_{p_0}\mathrm{A}_{p_0+1}$, $\mathrm{A}'_{p_0+1}\mathrm{A}_{p_0+2}$, ..., $\mathrm{A}'_{\mathrm{P}_1}\mathrm{A}_{\mathrm{P}_1+1}$. Le point représentatif de f_2 suit le trajet $\mathrm{B}'_{p_0}\mathrm{B}_{p_0+1}$, ..., $\mathrm{B}'_{\mathrm{P}_1}\mathrm{B}_{\mathrm{P}_1+1}$, et les arcs $\mathrm{A}'_p\mathrm{A}_{p+1}$, $\mathrm{B}'_p\mathrm{B}_{p+1}$ sont tous deux sur les courbes d'ordonnées $\varphi\left(\frac{r}{r_n}, p\right)$. On a

$$\sum{}' \mathrm{V}_p - \sum{}' \mathrm{T}_p = \int_{\nu_{p_0}}^{n_{p_0}} f_1\, dn + \int_{n_{p_0}}^{\nu'_{\mathrm{P}_1+1}} (f_1 - f_2)\, dn - \int_{\nu'_{\mathrm{P}_1+1}}^{n'_{\mathrm{P}_1+1}} f_2\, dn.$$

Dans l'intégrale médiane, $f_1 - f_2$ est nul si $u_p < u < \nu_{p+1}$.

Si

$$\nu_p < n < n_p, \qquad f_1 - f_2 = \varphi\left(\frac{r}{r_n}, p\right) - \varphi\left(\frac{r}{r_n}, p-1\right).$$

Soit $1 + \frac{\beta(p)}{p^2}$ la valeur non nulle de u telle que $M_{p+1}(u) = M_p(u)$ (*voir* p. 37). Nous ne savons pas si $\beta(p)$ est positif, mais certainement $\beta(p) < 1$, quel que soit p. D'ailleurs, en supposant $\beta(p) > 0$, si $1 < u < 1 + \frac{\beta(p)}{p^2}$,

$$M_{p+1}(u) - M_p(u) > -\frac{k'}{p^2},$$

k' étant un certain nombre fixe, en sorte que cette inégalité vaut quel que soit $u > 1$.

Si l'on remarque encore la croissance [1] de $M_{p+1}(u) - M_p(u)$ relativement à u, pour $u > 1$, on a toujours

$$-\frac{k'}{(p-1)^2} < f_1(n) - f_2(n) < f_1(\nu_p) - f_2(\nu_p).$$

Si $(p-1)^2\left(\frac{r}{r_{\nu_p}} - 1\right) < \beta(\overline{p-1})$, les deux derniers membres de l'inégalité sont négatifs, mais en valeur absolue inférieurs à $\frac{k'}{p^2}$.

---

[1] Voici la démonstration du fait que $M_{p+1}(u) - M_p(u)$ est croissant pour $u > 1$, p étant fixe. 1° si $u > 1 + \frac{1}{p}$, $M_{p+1}(u) - M_p(u) = \frac{u^{p+1}}{p+1}$ qui est croissant avec u; 2° si $1 + \frac{1}{p+1} < u < 1 + \frac{1}{p}$,

$$\frac{d}{du}[M_{p+1}(u) - M_p(u)] = \frac{u^{p+1}}{u-1} - u^p \frac{\sin p\theta}{\sin\theta} \qquad \text{avec} \qquad u = \frac{\sin\overline{p+1}\,\theta}{\sin p\theta}.$$

Ceci a le signe de $u - (u-1)\frac{\sin p\theta}{\sin\theta} = \chi(u)$. Posons

$$u = 1 + \frac{\alpha}{p},$$

α est inférieur à 1;

$$\chi(u) > 1 - \alpha\frac{\sin p\theta}{p\sin\theta} > 1 - \alpha > 0;$$

Si $(p-1)^2\left(\frac{r}{r_{\nu_p}}-1\right) > \beta(\overline{p-1})$, $|f_1-f_2|$ est certainement inférieur à l'un des nombres $\frac{k'}{(p-1)^2}$ et $f_1(\nu_p)-f_2(\nu_p)$ qui sont alors tous deux positifs. Donc, dans tous les cas,

$$|f_1-f_2| < \frac{2k'}{(p-1)^2}+f_1(\nu_p)-f_2(\nu_p),$$

et, comme l'intervalle d'intégration ν_p à n_p est inférieur à 1, c'est également là la borne du module de $\int_{\nu_p}^{n_p}(f_1-f_2)\,dn$.

D'ailleurs, dans l'expression de $\Sigma'(V_p-T_p)$, le dernier terme est borné. Car, nous avons déjà vu que $\varphi\left(\frac{r}{r_n}, P_1\right)$ est borné, si $\nu'_{P_1+1} \leqq n$.

En résumé, si l'on pose $\varphi\left(\frac{r}{r_{\nu_p}}, p\right)-\varphi\left(\frac{r}{r_{\nu_p}}, p-1\right) = w_p$,

---

3° si $u < 1+\frac{1}{p+1}$,

$$\frac{d}{du}[M_{p+1}(u)-M_p(u)] = u^{p+1}\frac{\sin\overline{p+1}\,\theta_1}{\sin\theta_1}-u^p\frac{\sin p\theta}{\sin\theta},$$

avec $\frac{\sin(p+2)\theta_1}{\sin(p+1)\theta_1} = u$. Cette dérivée a le signe de

$$u\frac{\sin(p+1)\theta_1}{\sin\theta_1}-\frac{\sin p\theta}{\sin\theta} = \chi_1(u).$$

D'après $u>1$, $(p+1)\theta_1 < \frac{\pi}{2}$, on a

$$\chi_1(u) > \frac{\sin p\theta_1}{\sin\theta_1}-\frac{\sin p\theta}{\sin\theta}.$$

D'après $\theta_1 < \theta$,

$$\chi_1(u) > 0.$$

Pour les valeurs de u inférieures à 1,

$$(p+1)[M_{p+1}(u)-M_p(u)] = u^{p+1}\cos(p+1)\theta'_1,$$

θ étant un nombre compris entre θ et θ_1. Si $u = 1+\frac{\alpha}{p}$, cette expression a pour partie principale $e^\alpha\cos\beta\left(\alpha = \beta\cot\beta, \frac{\pi}{2}<\beta<\pi\right)$. Cette partie principale a un minimum unique pour α négatif et égal à $\cos 2\beta$.

on trouve, k'' étant un certain nombre fixe,

$$\left|\sum_{p_0}^{P_1}{}' V_p - \sum_{p_0}^{P_1}{}' T_p\right| < 2k' \sum_{p_0+1}^{P_1} \frac{1}{(p-1)^2} + \varphi\left(\frac{r}{r_{\nu_{p_0}}}, p_0\right) + \sum_{p_0+1}^{P_1} \omega_p + k''.$$

Examinons maintenant la différence $\sum_{p_0}^{P_1}{}' T_p - \sum_{p_0}^{P_1}{}' U_p$. D'après la décroissance de $\varphi\left(\frac{r}{r_n}, p\right)$ quand n croît, p étant fixe,

$$U_p = T_p + \theta_p\left[\varphi\left(\frac{r}{r_{n_p}}, p\right) - \varphi\left(\frac{r}{r_{n_{p+1}}}, p\right)\right] \qquad 0 < \theta_p < 1.$$

L'égalité est encore valable pour $p = P_1$, en accentuant U, T et n_{P+1}. Donc

$$\sum_{p_0}^{P_1}{}' U_p = \sum_{p_0}^{P}{}' T_p + \theta\left[\varphi\left(\frac{r}{r_{n_{p_0}}}, p_0\right) + - \varphi\left(\frac{r}{r_{n'_{P_1+1}}}, P_1\right)\right] \theta \sum_{p_0+1}^{P_1} \tau_p,$$

en posant $\tau_p = \varphi\left(\frac{r}{r_{n_p}}, p\right) - \varphi\left(\frac{r}{r_{n_p}}, p-1\right)$. On a

$$\tau_p < \omega_p.$$

Donc

$$\sum_{p}^{P_1}{}' V_p - \sum_{p_0}^{P_1}{}' U_p = 2\delta k' \sum_{p_0+1}^{P_1} \frac{1}{(p-1)^2} + 2\delta\left[\varphi\left(\frac{r}{r_{\nu_{p_0}}}, p_0\right) + \sum_{p_0-1}^{P_1} \omega_p\right] + k''' \;(\delta^2 < 1).$$

Au second membre, le premier terme est inférieur à $\frac{2k}{p_0 - 1}$, en valeur absolue. D'autre part, $\varphi\left(\frac{r}{r_{\nu_{p_0}}}, p_0\right) < \left(\frac{r}{r_{\nu_{p_0}}}\right)^{p_0}$.

On peut joindre ce terme à S_0, il est infiniment petit relativement à S_1.

Donc, à partir d'une certaine valeur de X,

$$\sum_{p_0}^{P_1}{}' U_p - \sum_{p_0}^{P_1}{}' V_p = \delta(\omega_{p_0+1} + \omega_{p_0+2} + \ldots + \omega_{P_1}) + \varepsilon S_1.$$

Je dis que $\sum_{p_0+1}^{P_1} \omega_p$ est infiniment petit relativement à S_1.

48. Nous avons évidemment, avec les notations du premier Chapitre,

$$|M_p(u) - M_{p-1}(u)| < \max_{u=\text{const.}} |U_p(u, \theta) - U_{p-1}(u, \theta)| < \frac{u^p}{p}.$$

On a donc

$$\left|\sum_{p_0+1}^{P_1} w_p\right| < \sum_{p_0+1}^{P_1} \frac{1}{p}\left(\frac{r}{r_{\nu_p}}\right)^p = \sum_{p_0+1}^{P_1} \frac{1}{p} e^{p(X-x_p)} = \sigma_1.$$

Nous partageons les termes de σ_1 en deux catégories. Dans la première catégorie, nous mettons ceux pour lesquels on a

$$p(X - x_p) \leqq Y - l,$$

si $e^{-l} < \varepsilon$.

Leur somme est évidemment inférieure à $\sum_{1}^{P_1} \frac{e^{Y-l}}{p} = e^{Y-l}(LP_1 + \gamma)$,

γ tendant vers une limite et par suite à $\varepsilon e^Y LP_1$.

Étudions les autres termes. Soit P'_1 la plus grande valeur de p parmi eux. Leur somme est inférieure à

$$\sum_{1}^{P'_1} \frac{1}{p} e^{p(X-x_p)} = \sigma'_1.$$

Multiplions ceci par $e^{-Y} = e^{-h} e^{-Y_1}$.

Si nous remplaçons X par X_1, nous diminuons l'exposant de e dans le $p^{\text{ième}}$ terme de la quantité $p(X - X_1) < h \frac{p}{p-\alpha} \leqq h \frac{p_0}{p_0-\alpha}$.

Donc

$$e^{-Y} \sigma'_1 < e^{-h+h\frac{p_0}{p_0-\alpha}} e^{-Y_1} \sum_{1}^{P'_1} \frac{1}{p} e^{p(X_1-x_p)} = \gamma' e^{-Y_1} \sigma''_1,$$

γ' étant borné.

Évaluons $p(X_1 - x_p) - Y_1$.

1° Si $p = P'_1$, d'après

$$Y_1 > (P'_1 - \alpha)(X_1 - x_{P'_1}) + y_{P'_1},$$

cet exposant est inférieur à $\alpha(X_1 - x_{P'_1}) - y_{P'_1}$. Le terme correspondant

est donc inférieur à $e^{\alpha X_1}\frac{e^{-\alpha x_{P'_1}-y_{P'_1}}}{P'_1}$. Le coefficient de $e^{\alpha X_1}$ est infiniment petit quand X_1 croît indéfiniment, et il l'est même relativement à $\alpha e^{-\alpha x_{p_0}}$. (Il est évident *a priori* que si P'_1 n'est pas infiniment grand les termes dont nous cherchons à limiter le module sont négligeables relativement à S_1.)

2° Si $p < P'_1$,

$$p(X_1 - x_p) - Y_1 = p(X_1 - x_{P'_1}) + p(x_{P'_1} - x_p) - Y_1.$$

Or

$$x_{P'_1} - x_p < \frac{y_{P'_1} - y_p}{p - \alpha} < \frac{y_{P'_1}}{p - \alpha},$$

car $y_{p_0} > 0$.

Donc

$$p(X_1 - x_p) - Y_1 < p(X_1 - x_{P'_1}) + \frac{\alpha}{p_0 - \alpha} y_{P'_1} - (P'_1 - \alpha)(X_1 - x_{P'_1}).$$

Or, $y_{P'_1}$ peut se borner facilement d'après $\frac{Y - l}{P'_1} < X - x_{P'_1}$. Comme le second membre est inférieur à $\frac{Y - y_{P'_1}}{P'_1 - \alpha}$, on a (ce qui démontre que $X - x_{P'_1}$ est infiniment grand avec X)

$$y_{P'_1} - l < (Y_1 - l)\frac{\alpha}{P'_1} < \alpha(X - x_{P'_1}).$$

Le dernier membre ne diffère de $\alpha(X_1 - x_{P'_1})$ que par un facteur tendant vers un. Donc, à partir d'une certaine valeur de X,

$$\frac{\alpha y_{P'_1}}{p_0 - \alpha} < \frac{2\alpha^2}{p_0 - \alpha}(X_1 - x_{P'_1}),$$

$$e^{-X_1}\sigma''_1 < e^{-\left(P'_1 - \alpha - \frac{2\alpha^2}{p_0 - \alpha}\right)(X_1 - x_{P'_1})} \sum_{p_0}^{P'_1 - 1} \frac{1}{p} e^{p(X_1 - x_{P'_1})}.$$

Or la somme du second membre est inférieure à

$$\sigma''_1 = \sum_{1}^{P'_1 - 1} \frac{1}{p} e^{p(X_1 - x_{P'_1})}.$$

Si $e^{X_1 - x_{P'_1}} = u$, σ'''_1 devient

$$\frac{u^{P'_1-1}}{P'_1-1} + \frac{u^{P'_1-2}}{P'_1-2} + \ldots + \frac{u}{1} < u^{P'_1-1} - L(u-1).$$

u étant infiniment grand, $e^{-X}\sigma''_1$ est, à un facteur près tendant vers un, inférieur à $u^{-\left(1-\alpha-\frac{2\alpha^2}{p_0-\alpha}\right)}$.

J'ai supposé (¹) $\alpha < 1$. Je peux donc supposer p_0 qui est choisi une fois pour toutes mais arbitraire, assez grand pour que

$$1 - \alpha - \frac{2\alpha^2}{p_0 - \alpha} > 0.$$

Alors, $e^{-X}\sigma''_1$ tend vers zéro.

En totalisant les résultats, on voit qu'il existe certainement une valeur de X à partir de laquelle

$$\sigma_1 < \varepsilon e^X \left(\frac{1}{\alpha} e^{\alpha X_1 - \alpha x_{p_0}} + LP_1 \right),$$

et, comme $P_1 < \dfrac{h+\varepsilon}{X - X_1}$,

$$\sigma_1 < \varepsilon S_1.$$

49. *Résumé.* — Voici donc le résultat complet :

Étant donnée une suite de zéros $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, si l'on pose $\log|a_n| = x(n)$, $\log n = y(n)$, *et si les points $x(n)$, $y(n)$ viennent se placer sur une courbe x, $y(x)$ jouissant de la propriété suivante : il existe un entier croissant p, tel que*, si $x_p \leqq x < x_{p+1}$,

$$p - \alpha \leqq y' < p + 1 - \alpha,$$

α étant fixe et positif, NOUS CHOISISSONS POUR EXPOSANT DE CONVERGENCE ATTACHÉ A CHAQUE ZÉRO a_n *tel que* $x_p \leqq \log r_n < x_{p+1}$, L'ENTIER p. *De plus, si je désigne* $\log r$ *par* X *et* $y(X)$ *par* Y, *à tout nombre* ε *je peux*

(¹) Si l'on suppose $\alpha > 1$ et si $\alpha < m$, il faudra examiner à part les termes correspondant à $p = P'_1, P'_1 - 1, \ldots, P'_1 - m + 1$, puis la somme $\sum_1^{P'_1 - m}$.

faire correspondre un nombre h, tel que, si X_1 et X_2 sont les abscisses des points de la courbe x, y dont les ordonnées diffèrent de Y de la quantité h, le module maximum du produit formé avec les zéros a_1, $a_2, \ldots$ et l'exposant p est certainement inférieur, à partir d'une certaine valeur de r, à

$$(1+\varepsilon)e^{Y}\left(\varepsilon e^{\alpha X} + L\frac{1}{X - X_1} + L\frac{1}{X_2 - X}\right).$$

50. *L'exposant p est-il canonique?* — Il s'agit maintenant d'examiner si p est bien véritablement un exposant canonique, c'est-à-dire si les deux fonctions que nous avons appelées Π_1 et Π_2 ont bien le même ordre de grandeur. Π_1 est égal à $S_0 + S_1 + S'_2$, Π_2 à $S''_2 + S_3$. $\Pi_1 e^{-Y}$ a l'ordre de $\varepsilon e^{\alpha X} + L\frac{1}{X - X_1}$, $\Pi_2 e^{-Y}$ celui de $L\frac{1}{X_2 - X}$; d'après

$$X - X_1 > \frac{h}{P + 1 - \alpha}, \qquad L\frac{1}{X - X_1} < LP + c.$$

c étant borné. Deux cas se présentent suivant que l'ordre de LP ou de LY' est supérieur ou inférieur à $e^{\alpha X}$.

51. Supposons d'abord $e^{\alpha X}$ négligeable à l'égard de LY'. Nous appliquerons ce résultat bien connu [1] : si v est une fonction croissante de u on a $v\left[u + \frac{h}{v(u)}\right] < (1+\beta)v(u)$, sauf peut-être pour certains points u, formant des intervalles dont la longueur totale est au delà de u inférieure à $\frac{kh}{\beta v(u)}$, k étant borné si h et β le sont. Rappelons-en la démonstration :

Posons

$$v(u_i) = v_i.$$

Soit u_{2n-1} un point tel que, si

$$u_{2n} = u_{2n-1} + \frac{h}{v_{2n-1}},$$

---

(1) *Voir* Borel, *Acta mathematica*, t. XX, 1896, p. 376. C'est M. Borel qui a le premier (dans ce même Mémoire) signalé l'existence de ces propriétés *communes à toutes les fonctions croissantes*, bornées tant que la variable l'est, et qui a montré le rôle essentiel qu'elles jouent dans la comparaison entre elles des fonctions croissantes.

on a

$$v_{2n} > (1+\beta) v_{2n-1}.$$

Soit u_{2n+1} le premier nombre supérieur ou égal à u_{2n} tel que, si

$$u_{2n+2} = u_{2n+1} + \frac{h}{v_{2n+1}},$$

on a

$$v_{2n+2} > (1+\beta) v_{2n+1}.$$

Posons

$$u_{2n} - u_{2n-1} = \delta_n.$$

D'après la croissance de v avec u, $v_{2n+1} > v_{2n}$, et par suite

$$v_{2n+1} > (1+\beta)^n v_1;$$

d'où

$$\sum_1^n \delta_n < \frac{h}{v_1} \frac{1+\beta}{\beta},$$

quel que soit n.

Or, quels sont les points u supérieurs à u_1 pouvant jouir de la propriété

$$v\left(u + \frac{h}{v}\right) > (1+\beta) v(u)?$$

Ce seront évidemment exclusivement des points intérieurs aux intervalles u_{2n-1} à u_{2n}. Pareillement les points u tels que

$$(1+\beta) v\left(u - \frac{h}{v}\right) < v(u)$$

avec $u > u_2$ sont tels que le point $u - \frac{h}{v}$ fait partie de l'un des intervalles précédents et, par suite, ces points sont compris dans les intervalles u_{2n} à $u_{2n} + \frac{h}{v_{2n-1}}$. Donc, les points u supérieurs à u_1 et tels qu'on ait soit

$$v\left(u + \frac{h}{v}\right) > (1+\beta) v(u),$$

soit

$$v\left(u - \frac{h}{v}\right) < (1+\beta)^{-1} v(u),$$

forment des intervalles de longueur totale inférieure à $\frac{k'}{\varepsilon_1}\frac{h}{\beta}$ (k' borné avec h et β).

Appliquons ceci à la fonction Y (X). Comme

$$X - X_1 < \frac{h}{P_1 - \alpha} \quad \text{et} \quad X_2 - X < \frac{h}{P - \alpha},$$

comme Y', Y'_1, Y'_2 diffèrent de P, P_1, P_2 de moins d'une unité, on trouve que, en général,

$$(1+\beta)P_1 > P > (1-\beta)P_2,$$

sauf peut-être pour une suite d'intervalles dont la longueur totale est inférieure à $\frac{kh}{\beta}\frac{1}{P}$, à partir de X.

On montrerait d'une manière toute pareille que les points $x > X$ où l'on n'a pas $p_1^{1+\beta} > p > p_2^{1-\beta}$ forment des intervalles de longueur totale inférieure à $\frac{h}{P} + \frac{k}{\beta}\frac{h}{P^{1+\beta}}$.

52. Donc, les fonctions $\Pi_1(X)$, $\Pi_2(X)$ seront dans un rapport infiniment voisin de un pour P infini, sauf pour des points X dont l'ensemble a une longueur totale inférieure à $\frac{kh}{P}$ à partir d'un point X quelconque. Π_1 et Π_2 sont égaux, à ε près chacun, à e^YLP, et l'on a

$$P(r) < (2+\varepsilon)n\,Lp,$$

n étant le nombre des zéros intérieurs au cercle $|z| = r$ et p l'exposant de convergence relatif au zéro le plus voisin du cercle.

Pour des croissances accidentées de p et des valeurs exceptionnelles de r, telles que l'ensemble des points $\log r$ a une longueur totale inférieure à $\frac{h}{p}$ à partir de $\log r$, la loi choisie pour p ne donne pas le même ordre de grandeur à Π_1 et à Π_2. Mais rien ne prouve *a priori* qu'il y en ait une résolvant ce problème. Pour les fonctions de genre fini, on peut concevoir des variations de $y(n)$ avec $p < y' < p+1$, telles que, le genre étant p, les deux fonctions Π_1 et Π_2 ne soient pas entre elles dans un rapport fini quel que soit r.

53. *L'exposant de convergence précisé.* — Les deux fonctions H_1 et H_2 se trouvent n'être pas du même ordre de grandeur dans un autre cas, si $e^{\alpha X}$ est d'un ordre supérieur à celui de LY', auquel cas $H_1 > H_2$. La condition $LY' < e^{\alpha X}$ exige que y soit d'ordre inférieur à $e^{e^{\alpha x}}$ ou que $r_n > \frac{1}{\alpha}\log_2 n$. Si donc la croissance de y se rapproche de celle des fonctions de genre fini plus que celle de e^{e^x}, nous devons préciser l'exposant de convergence de façon à réduire l'ordre du terme hétérogène $e^{\alpha X}$. Nous réalisons d'emblée la principale réduction possible en permettant à y' de se rapprocher davantage de $p+1$, comme il suit. Supposons que pour

$$x_p \leqq x < x_{p+1}, \qquad p \leqq y' + \frac{1+\alpha}{x} < p+1.$$

Dans la somme $\sum_1^\infty \varphi\left(\frac{r}{r_n}, p_n\right)$, nous conservons le même groupement des termes en S_0, S_1, S_2, S_3. Les nombres X_1 et X_2, définis par $Y - Y_1 = Y_2 - Y = h$, sont indépendants du système d'exposant de convergence choisi. Nous admettrons que

$$e^{-Y} S_1 = (1+\delta\varepsilon)\int_{x_{p_0}}^{X_1} e^{y-Y+(p+1)(X-x)}\frac{dx}{e^{X-x}-1},$$

$$e^{-Y} S_3 = (1+\delta'\varepsilon)\int_{X_1}^{\infty} e^{y-Y+(p+1)(X-x)}\frac{dx}{1-e^{X-x}},$$

$$e^{-Y} S_2 = C_2,$$

C_2 étant borné et δ^2, δ'^2 étant inférieurs à 1 à partir d'une certaine valeur de X.

54. Calculons l'intégrale qui donne S_1. D'après $y' + \frac{1+\alpha}{x} \geqq p$, si $x_p \leqq x < x_{p+1}$, on a

$$Y - y = \int_x^X y'\,dx > -(1+\alpha)\,\mathrm{Log}\,\frac{X}{x}$$
$$+ p(X-x) + (\overline{P-p}X - x_{p+1} - x_{p+2} - \ldots - x_P).$$

Donc, en supprimant au second membre le crochet qui est positif,

$$y - Y + (p+1)(X - x) < (1+\alpha)\operatorname{Log}\frac{X}{x} + X - x.$$

Par suite

$$(1+\varepsilon)^{-1} e^{-X} S_1 < \int_{x_{p_0}}^{X_1} e^{X - x + (1+\alpha)\operatorname{Log}\frac{X}{x}} \frac{dx}{e^{X-x} - 1} = I_1.$$

Pour étudier I_1, je pose $X - x = u$. On a

$$I_1 = \int_{X - X_1}^{X - x_{p_0}} \frac{X^{1+\alpha}}{(X-u)^{1+\alpha}} \frac{e^u}{e^u - 1} du.$$

Je décompose cette intégrale en trois autres :

$$\int_{X-X_1}^{L2} \frac{e^u}{e^u - 1} du + \int_{X-X_1}^{L2} \frac{e^u}{e^u - 1}\left[\left(1 - \frac{u}{X}\right)^{-1-\alpha} - 1\right] du$$
$$+ \int_{L2}^{X - x_{p_0}} \frac{X^{1+\alpha}}{(X-u)^{1+\alpha}} \frac{e^u}{e^u - 1} du.$$

La première intégrale est égale à $L\frac{1}{X - X_1}$. La seconde, d'après $\left(1 - \frac{u}{X}\right)^{-1-\alpha} = 1 + \frac{uh}{X}$, h étant borné si $u < L2$, et si X est supérieur à 2, est égale à

$$\frac{h}{X}\int_{X-X_1}^{L2} \frac{e^u}{e^u - 1} u\, du,$$

qui tend vers zéro avec $\frac{1}{X}$, puisque $\int_0^{L2} \frac{ue^u}{e^u - 1} du$ a un sens. Dans la troisième $\frac{e^u}{e^u - 1}$ est inférieur à 2. Elle est donc inférieure à

$$2\frac{X^{1+\alpha}}{\alpha}\left[\frac{1}{x_{p_0}^{\alpha}} - \frac{1}{(X - L2)^{\alpha}}\right].$$

En résumé, si $\frac{2}{\alpha x_{p_0}^{\alpha}} < \varepsilon$,

$$e^{-X} S_1 < (1+\varepsilon)\left(\varepsilon X^{1+\alpha} + L\frac{1}{X - X_1}\right).$$

55. Limitons S_3. De même que S_1 a été réduit en un même point x par la diminution de p, de même S_3 se trouvera augmenté. D'après

$$y' + \frac{1+\alpha}{x} < p + 1 \qquad \text{si} \qquad x_p \leq x < x_{p+1},$$

on a, si $x > X$,

$$y - Y = \int_X^x y'\,dx < -(1+\alpha)\,\mathrm{Log}\,\frac{X}{x}$$
$$+ (p+1)(x - X) - \left[x_p + x_{p-1} + \ldots + x_P - \overline{p - P}X\right]$$

et, en supprimant comme toujours la partie positive entre crochets,

$$y - Y + (p+1)(X - x) < -(1+\alpha)\,\mathrm{Log}\,\frac{x}{X}.$$

Donc

$$(1+\varepsilon)^{-1} e^{-Y} S_3 < \int_{X_2}^{\infty} e^{-(1+\alpha)\,\mathrm{Log}\,\frac{x}{X}} \frac{dx}{1 - e^{X-x}} = I_3.$$

Dans I_3, je change de variable $x = X + u$.

$$I_3 = \int_{X_2 - X}^{\infty} \frac{du}{\left(1 + \frac{u}{X}\right)^{1+\alpha}(1 - e^{-u})},$$

$$I_3 = \int_{X_2 - X}^{L2} \frac{du}{1 - e^{-u}} - \int_{X_2 - X}^{L2} \frac{du}{1 - e^{-u}}\left[1 - \left(1 + \frac{u}{X}\right)^{-1-\alpha}\right]$$
$$+ \int_{L2}^{\infty} \frac{du}{\left(1 + \frac{u}{X}\right)^{1+\alpha}} + \int_{L2}^{\infty} \frac{e^{-u}}{1 - e^{-u}} \frac{du}{\left(1 + \frac{u}{X}\right)^{1+\alpha}}.$$

La première intégrale est $L\frac{1}{X_2 - X}$. La seconde tend vers zéro. La troisième est

$$\frac{1}{\alpha} \frac{X^{1+\alpha}}{(X + L2)^{\alpha}} = \frac{1}{\alpha} X - L2 + \eta(X).$$

$\eta(X)$ tendant vers zéro. La dernière tend vers $\int_{L2}^{\infty} \frac{e^{-u}}{1 - e^{-u}}\,du = L2$. Donc

$$e^{-Y} S_3 < (1+\varepsilon)\left(\frac{X}{\alpha} + L\frac{1}{X_2 - X}\right).$$

56. Ce choix pour l'exposant p, notablement plus avantageux que le premier, si y' croît lentement, ne peut être perfectionné que faiblement, dans le sens qui diminue l'ordre total. Cette diminution ne peut s'obtenir qu'en rapprochant les ordres de S_1 et de S_3. Or, ces ordres sont ceux déjà voisins de $X^{1+\alpha}$ et X.

Si l'ordre de LY' est compris entre ceux-là, il peut être utile de restreindre le plus possible l'influence du terme hétérogène. Nous supposons alors que, si

$$x_p \leq x < x_{p+1},$$

$$p = y' + \frac{1}{x} + \frac{1}{x\log x} + \ldots + \frac{1}{x\log x\ldots\log_{h-1} x} + \frac{1+\alpha}{x\log x\ldots\log_h x},$$

α étant fixe, inférieur à 1 par exemple, et h étant un entier fixe. On trouve, pour $x < X$,

$$y - Y + p(X - x) < \log X + \log_2 X + \ldots$$
$$+ \log_h X + (1+\alpha)\log_{h+1} X - \log x - \log_2 x - \ldots - \log_h x - (1+\alpha)\log_{h+1} x.$$

D'où

$$(1+\varepsilon)^{-1} e^{-Y} S_1 < \int_{x_{p_0}}^{X_1} \frac{X\log X\ldots\log_{h-1} X \log_h^{1+\alpha} X}{x\log x\ldots\log_{h-1} x \log_h^{1+\alpha} x} \frac{e^{X-x}}{e^{X-x}-1}\,dx = I_1.$$

On trouve comme plus haut la valeur de I_1

$$I_1 = \frac{1}{\alpha} X\log X\ldots\log_{h-1} X \frac{\log_h^{1+\alpha} X}{\log_h^{\alpha} x_{p_0}} + L\frac{1}{X - X_1} + h_1.$$

De même

$$(1+\varepsilon)^{-1} e^{-Y} S_3 < \frac{1}{\alpha} X\log X\ldots\log_{h-1} X\log_h X + L\frac{1}{X_2 - X} + h_3$$

(h_1 et h_3 bornés).

57. Nous découvrons une famille de modes de croissance pour r_n, où s'opère la transition entre deux espèces différentes de produits canoniques. Pour les uns, dont font partie les produits de genre fini, il n'est pas indifférent que y' s'attarde ou non au voisinage des valeurs entières. Pour les autres, la perturbation due à cette cause est négli-

geable dans la croissance totale de la fonction. Les croissances de y séparatrices des deux classes de fonctions entières sont pour $Ly' = x$, $\log x$, ..., $x \log x \ldots \log_h x$, ... du côté de la classe qui comprend le genre fini, et

$$Ly' = x^{1+\alpha}, \qquad \ldots, \qquad x \log x \ldots \log_{h-1} x \log_h^{1+\alpha} x$$

du côté des fonctions plus croissantes, ou

$$y = e^x, \qquad e^{x \log x}, \qquad \ldots, \qquad e^{x \log x \ldots \log_h x}, \qquad \ldots,$$

ou

$$r_n = e^{\log_2 n}, \qquad e^{\frac{\log_2 n}{\log_3 n}}, \qquad \ldots, \qquad e^{\frac{\log_2 n}{L_3 n \ldots L_h n}}.$$

Supposons, ce qui arrivera fréquemment que, pour la classe la plus croissante, $\frac{Ly'}{Ly}$ tende vers 1. Alors, la limite supérieure de $H(x)$ devient $(2+\varepsilon) n L_2 n$. Pour la classe la moins croissante au contraire, cette limite sera $\varepsilon n \log r \log_2 r \ldots \log_h^{1+\alpha} r$, α étant un nombre fixe. La limite de croissance de y est la même que celle de la convergence ou de la divergence de

$$\int_x^\infty \frac{dx}{Ly'} \quad \text{ou de} \quad \int_1^\infty \frac{dx}{Ly} \quad \text{ou de} \quad \sum_1^\infty \frac{\log r_n}{n \log n \log_2^2 n}.$$

58. En somme, nous trouvons pour limiter supérieurement $H(X)$ l'expression

$$(a) \qquad (1+\varepsilon) e^X \left[\varepsilon \theta(X) + L \frac{1}{X - X_1} + L \frac{1}{X_2 - X} \right],$$

valable à partir d'une certaine valeur de X, $\theta(X)$ étant une fonction que nous pouvons supposer égale à $e^{\alpha X}$, $X^{1+\alpha}$, ..., $X \log X \ldots \log_h^{1+\alpha} X$, ..., suivant la lenteur ou l'irrégularité de la croissance de Y'. Si donc LY' croît plus vite que l'une des fonctions de cette suite, on se trouve avoir réalisé l'égalité des ordres de H_1 et de H_2.

59. *Exemples de fonctions atteignant la limite trouvée.* — Nous allons maintenant montrer une sorte de réciproque des formules précédentes à savoir : quelle que soit la loi choisie pour p parmi les précé-

dentes, il peut y avoir pour certains des produits canoniques formés en déterminant l'exposant p_n selon cette loi, une distribution des zéros telle que, pour des valeurs de X indéfiniment croissantes, le module maximum du produit canonique ait son logarithme $H(X)$ supérieur à $(1-\varepsilon)\left[\varepsilon\theta(X) + L\frac{1}{X-X_1} + L\frac{1}{X_2-X}\right]$, ε étant un nombre fixe, et $\theta(X)$ étant l'une des fonctions définies ci-dessus.

Deux causes empêchent que la limite supérieure trouvée pour $H(X)$ soit effectivement atteinte. La première est que nous avons supposé que les zéros pouvaient être distribués de façon que le maximum du module de tous les facteurs sur le cercle $|z| = r$ puisse se faire au même point. Or, il est évident que, si je choisis un point du cercle $|z| = r$, la condition que $\left|E\left(\frac{z}{a_n}, p_n\right)\right|$ soit maximum en ce point détermine l'argument de a_n dont on a le module r_n. En effet, si $r_n\left(1+\frac{1}{p_n}\right) < r$, a_n devra avoir l'argument de z. Si $r_n\left(1+\frac{1}{p_n}\right) > r$, et si $z = re^{i\theta}$, $a_n = r_n e^{i\alpha_n}$, on devra avoir

$$\frac{r}{r_n} = \frac{\sin(p_n+1)(\theta-\alpha_n)}{\sin p_n(\theta-\alpha_n)},$$

avec

$$|\theta-\alpha_n| < \frac{\pi}{p_n+1},$$

ce qui donne deux valeurs pour α_n. La première catégorie de zéros, qui a un module inférieur à r, devra être placée sur le rayon qui va de l'origine au point z. Les zéros de la seconde catégorie seront sur une courbe ayant ce même rayon pour direction asymptotique. Il est évident que les arguments favorablement répartis pour un point choisi sur un cercle particulier $|z| = r$ se trouveront dans leur ensemble mal distribués pour tout point de tout autre cercle. Mais on voit immédiatement que, à toute valeur de X, on peut faire correspondre X′ et X″ avec $X' < X < X''$, tels que, si $x < X'$ et si $x > X''$, la totalité des termes $\varphi\left(\frac{r}{r_n}, p_n\right)$ correspondant à ces valeurs de x ont une somme négligeable, à ε' près, quel que soit ε' positif, fixe, relativement à celle des termes φ correspondant à x si $X' < x < X''$. Nous répartirons les

zéros médians de façon que les facteurs correspondants aient tous leur maximum sur $|z| = e^X$ au même point. Distribuons arbitrairement les arguments des autres zéros. Comme le minimum de chacun des facteurs $\left|E\left(\frac{z}{a_n}, p_n\right)\right|$ correspondants est supérieur à $e^{-\varphi\left(\frac{r}{r_n}, p_n\right)(1+\eta)}$, η étant infiniment petit avec $\frac{1}{X}$, si, pour $x < X'$ ou $x > X''$, $|X - x| p(x)$ est infiniment grand avec X, on se trouvera avoir en ce point

$$M(X) > (1 - 4\varepsilon') \sum_{1}^{\infty} \varphi\left(\frac{r}{r_n}, p_n\right).$$

Soient X'_n et X''_n les nombres correspondants à X_n. Si $X'_{n+1} > X''_n$, il est évident que, X étant l'un quelconque des nombres X_n, l'inégalité précédente sera vérifiée.

On peut donc supposer, avec une erreur relative inférieure à $2\varepsilon'$, que $M(X)$ atteint la valeur $\sum_{1}^{\infty} \varphi\left(\frac{r}{r_n}, p_n\right)$ pour une infinité de valeurs de X.

60. Mais, dans l'évaluation de cette somme, nous avons introduit une cause d'erreur, en renforçant certaines inégalités par la suppression d'expressions de signes connus, telles que $\overline{p - P}\,X - x_{p+1} - x_{p+2} - \ldots - x_P$, si $x_{p+1} < X$, et $x_p + x_{p-1} + \ldots + x_{P+1} - \overline{p - P}\,X$, si $x_p > X$. Pour éviter cette cause d'erreur, nous supposerons que de X' à X'' la valeur de p reste la même.

61. Cela étant, nous allons montrer qu'étant donnée une fonction croissante $\varphi(x)$, à dérivée toujours croissante, il est possible de définir une fonction $y = f(x)$ égale à $\varphi(x)$ pour une infinité croissante de valeurs de x et telle que si l'exposant p est déterminé par les inégalités

$$p \leq y' + \frac{1}{x} + \ldots + \frac{1 + \alpha'}{x \log x \ldots \log_{h-1} x} < p + 1 :$$

1° p est un nombre jamais décroissant; 2° il existe une infinité de valeurs croissantes de X, et un produit canonique dont le $n^{\text{ième}}$ zéro a

son module donné par

$$\log n = f[x(n)],$$

telles que

(b) $$M(X) > (1-\varepsilon)\left[\varepsilon\theta(X) + L\frac{1}{X - X_1} + L\frac{1}{X_2 - X}\right],$$

ε étant fixe, et

$$\theta(X) = X \log X \ldots \log_h^{1+\alpha} X$$

avec $\alpha > \alpha'$.

Je définirai $y = f(x)$ par la condition que, pour $X'_n < X_n < X_{,,}$, on ait

$$y' + \frac{1}{x} + \ldots + \frac{1+\alpha'}{x \log x \ldots \log_{h-1} x} = p.$$

Avec cette loi, de X′ à X″ p restant constant, on a

(1) $$y - Y + p(X - x) = \log \frac{X \log X \ldots \log_{h-1}^{1+\alpha'} X}{x \log x \ldots \log_{h-1}^{1+\alpha'} x}.$$

Je suppose que la courbe ainsi décrite et qui diffère peu d'une droite touche $y = \varphi(x)$ en un point. Les zéros dont le nombre $x(n)$ est compris entre X′ et X donnent un total égal à

$$S = e^Y \left(\frac{1}{\alpha' \log^{\alpha'} X'} X \log X \ldots \log_{h-1}^{1+\alpha'} X + LP + k\right).$$

Ceux pour lesquels x_n est inférieur à X′ donnent dans la somme $\sum \varphi\left(\frac{r}{r_n}, p_n\right)$ un total infiniment petit relativement à cette expression quand X s'éloigne, si leur exposant est inférieur à p. A partir d'une certaine valeur de X, S sera à $\frac{\varepsilon'}{2}$ près la valeur de $H_1(X)$. Je fais courir X, Y sur sa courbe jusqu'à ce que $Se^{-Y} + LP$ devienne inférieur à $\frac{\varepsilon'}{2} X \log X \ldots \log^{1+\alpha} X$. Lorsque ce résultat est atteint, j'obtiens X″ en prenant $X'' \geqq X' + 1$, parce que alors la somme des termes qui suivent X″ est inférieure à $e^Y \int_1^\infty \frac{e^{-u}}{1 - e^{-u}} du$.

A partir de X″, je mène tangentiellement à la courbe $y = \varphi(x)$ une courbe de la famille (1) avec une nouvelle valeur de p. Je la fais suivre

par le point X, Y, jusqu'à ce que les termes inférieurs à X″ soient devenus négligeables. Je continue ma route jusqu'à ce que $\theta(X)$ prédomine sur $\log P$. Je place le nouvel X″ assez loin pour que les termes suivants soient négligeables, etc. Si $\varphi'(x)$ n'est jamais négligeable relativement à $x \log x \ldots \log_h^{1+\alpha} x$, les points X de la fonction où la formule (b) est exacte ne sont pas ceux où y touche φ. Dans le cas contraire, on peut choisir X tel que $y(X) = \varphi(X)$.

CHAPITRE III.

SECOND TYPE DE CROISSANCE. GRANDE RÉGULARITÉ.

62. Nous allons maintenant définir un mode de croissance du rang n considéré comme fonction de r_n, tel que l'expression $\sum_1^\infty \varphi\left(\frac{r}{r_n}, p_n\right)$, dont nous n'avons pu obtenir qu'une limite supérieure atteinte seulement dans les régions où le produit canonique a l'allure d'une fonction de genre fini, soit calculable asymptotiquement, du moins quant à sa partie principale. Nous ne ferons, pas plus que dans le précédent Chapitre, d'hypothèses sur l'expression même de $y(x)$; nous lui imposerons simplement une propriété fonctionnelle, n'apportant aucune limitation à la rapidité de la croissance de y, mais uniquement à son irrégularité; cette propriété appartiendra à une classe de fonctions beaucoup plus générale que celle qu'on obtient à partir de e^x et d'une constante, par addition, multiplication, composition, inversion, itération, effectuées dans des ordres divers et un nombre fini quelconque de fois.

Mais auparavant nous indiquerons la voie qui conduit à la valeur *environ* y' que nous avons indiquée pour p.

Expression asymptotique d'une série entière à termes positifs.

63. Nous ferons ce calcul dans le cas où les coefficients de cette série tendent vers zéro avec une certaine régularité, et où la croissance de la fonction entière somme de la série est supérieure à un certain ordre (inférieur à l'ordre de certaines fonctions d'ordre zéro).

Soit

$$F(r) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n$$

cette série. Donnons-nous comme au précédent Chapitre un nombre ε arbitrairement petit au moyen duquel nous mesurerons nos approximations. Nous voulons calculer $F(r)$ avec une erreur arbitrairement petite en même temps que ε. Je pose

$$a_n = e^{-A_n} \quad \text{et} \quad \log r = x.$$

A_n est une fonction de n qui n'est jusqu'ici définie que pour les valeurs entières de la variable. Nous supposons que, pour les valeurs non entières de n, on donne à A_n des valeurs telles que la fonction obtenue soit continue et dérivable aussi souvent (deux fois) qu'il soit nécessaire dans la suite.

Considérons la fonction $nx - A_n$, qui pour n entier coïncide avec le logarithme de l'un des termes de la série. Elle a un maximum pour $x = A'_n = \frac{dA_n}{dn}\cdot$ Nous supposerons, pour que cette égalité ne fasse correspondre à une valeur de x qu'une valeur de n, que A'_n varie toujours dans le même sens. La fonction étant entière, A'_n devra croître constamment et infiniment. On a $A''_n > 0$.

Je désigne par i la valeur de n définie par l'égalité $x = A'_n$. Nous posons $T(x) = e^{ix - A_i}$. Le terme maximum de la série a un rang différant de i de moins d'une unité, soit $i + \delta$ ($\delta^2 < 1$). Cherchons son rapport à $T(x)$ et pour cela formons la différence des logarithmes. On a

$$(i+\delta)x - A(i+\delta) = (i+\delta)x - A_i - \delta A'_i - \frac{\delta^2}{2}A''(i+\theta\delta), \qquad 0 < \theta < 1.$$

Le défaut de ce terme relativement à $ix - A_i$ est, d'après $x = A'_i$,

$$\frac{\delta^2}{2}A''(i+\theta\delta).$$

Pour que le plus grand terme de la série soit dans un rapport tendant vers 1 avec $T(x)$, il faudra que, à partir d'une certaine valeur de n, quel que soit i entre m et $m+1$, il y ait des valeurs de A''_n inférieures à ε entre m et i d'une part, i et $m+1$ d'autre part. Nous exigerons que A''_n tende vers zéro avec $\frac{1}{n}\cdot$

D'après la décroissance de $r^n e^{-A_n}$ si $n > i$, et la croissance de la

même fonction si $n < i$, on a

$$F(r) = \int_1^\infty e^{nx-A(n)}\,dn + 2\theta T(x).$$

Donc

$$e^{-ix+A(i)} F(r) = \int_1^\infty e^{(n-i)x-A(n)+A(i)}\,dn + 2\theta = S + 2\theta.$$

D'après la croissance de $A'(n)$, si $n > i_2 > i$, on a, en intégrant l'inégalité $A'(n)dn > A'(i_2)dn$ entre les limites i_2 et n,

$$A(n) - A(i_2) > A'(i_2)(n - i_2).$$

Donc

$$\begin{aligned} -\psi(n,i) &= (n-i)x - A(n) + A(i) \\ &< (n-i)x + A(i) - A(i_2) - A'(i_2)(n-i_2) \\ &= (n-i_2)(x - A'_{i_2}) + (i_2 - i)x - A(i_2) + A(i). \end{aligned}$$

Donc

$$\sigma_3 = \int_{i_2}^\infty e^{-\psi(n,i)}\,dn < e^{(i_2-i)x-A(i_2)+A(i)} \frac{1}{A'(i_2) - x}.$$

On montre d'une façon entièrement analogue que

$$\sigma_1 = \int_{n_0}^{i_1} e^{-\psi(n,i)}\,dn < e^{(i_1-i)x-A(i_1)+A(i)} \frac{1}{x - A'_{i_1}}.$$

D'ailleurs

$$A(i_2) - A(i) - A'(i)(i_2 - i) = \frac{A''(\lambda)}{2}(i_2 - i)^2$$

et

$$A'(i_2) - A'(i) = A''(\lambda_1)(i_2 - i),$$

λ et λ_1 étant compris entre i et i_2, en supposant A'' continu.

64. Introduisons la condition que

(1) $$\lim_{i=\infty} A''\left(i + \frac{\delta k}{\sqrt{A''_i}}\right) : A''_i = 1,$$

quelle que soit la façon dont δ varie entre -1 et $+1$ et quelque grand que soit le nombre fixe k. Nous ne spécifions rien sur le sens de la variation de A'' qui peut présenter une infinité de maxima ou de minima,

bien que $\lim_{i=\infty} \Lambda''_i = 0$. D'ailleurs la condition (1) est vérifiée pour toute valeur fixe de k dès qu'elle l'est pour une non nulle.

Supposons que k soit choisi assez grand pour qu'on ait

$$(2) \qquad \int_{-\infty}^{-\frac{k}{2}} e^{-u^2}\,du = \int_{\frac{k}{2}}^{+\infty} e^{-u^2}\,du < \varepsilon;$$

k étant fixé, il existe un nombre n_k tel que $\frac{\Lambda''(n)}{\Lambda''(i)} = 1 + \delta\varepsilon$, si $|n - i| < \frac{k}{\sqrt{\Lambda''_i}}$, $i > n_k$. Posons alors

$$i_2 - i = i - i_1 = \frac{k}{\sqrt{\Lambda''(i)}}.$$

Alors, $\Lambda''(\lambda)$ et $\Lambda''(\lambda_1)$ sont égaux à $\Lambda''(i)(1 + \delta\varepsilon)$ et

$$\sigma_3 < \frac{e^{-\frac{k^2}{2}(1-\varepsilon)^2}}{k\sqrt{\Lambda''(i)}\,(1-\varepsilon)}.$$

La même expression limite σ_1. En supposant $\varepsilon < \frac{1}{2}$, imposons à k une nouvelle limite inférieure par

$$(3) \qquad \frac{2e^{-\frac{k^2}{4}}}{k} < \varepsilon.$$

Alors,

$$S = \int_{i_1}^{i_2} e^{-\psi(n,i)}\,dn + \frac{2\theta\varepsilon}{\sqrt{\Lambda''(i)}} = S_1 + \frac{2\theta\varepsilon}{\sqrt{\Lambda''(i)}}.$$

D'ailleurs, si

$$i_1 < n < i_2, \qquad -\psi(n, i) = -\frac{\Lambda''(i)}{2}(1 + \delta\varepsilon)(n - i)^2.$$

Donc

$$S_1 = \int_{-\frac{k}{\sqrt{\Lambda''_i}}}^{\frac{k}{\sqrt{\Lambda''_i}}} e^{-\frac{\Lambda''(i)}{2}(1+\delta\varepsilon)u^2}\,du.$$

Au second membre, δ est évidemment une fonction de u.

Posons

$$\frac{\Lambda''(i)\,u^2}{2} = v^2;$$

$$S_1 = \sqrt{\frac{2}{\Lambda''(i)}}\,S'_1 \qquad \text{avec} \qquad S'_1 = \int_{-\frac{k}{\sqrt{2}}}^{\frac{k}{\sqrt{2}}} e^{-(1+\theta\varepsilon)v^2}\,dv.$$

Or

$$\int_{-\frac{k}{\sqrt{2}}}^{\frac{k}{\sqrt{2}}} e^{-(1+\varepsilon)v^2}\,dv < S'_1 < \int_{-\frac{k}{\sqrt{2}}}^{\frac{k}{\sqrt{2}}} e^{-(1-\varepsilon)v^2}\,dv;$$

d'où

$$S'_1 = \int_{-k\sqrt{\frac{1+\theta\varepsilon}{2}}}^{k\sqrt{\frac{1+\theta\varepsilon}{2}}} e^{-v^2}\,dv.$$

Si $\varepsilon < \frac{1}{2}$, S'_1, qui est inférieur à $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2}\,dv = \sqrt{\pi}$, est supérieur à $\int_{-\frac{k}{2}}^{\frac{k}{2}} e^{-v^2}\,dv$, expression supérieure elle-même à $\sqrt{\pi} - 2\varepsilon$, d'après (2). Donc

$$S_1 = \sqrt{\frac{2}{\Lambda''(i)}}\,(\sqrt{\pi} - 2\theta\varepsilon),$$

et, par suite,

$$S = \sqrt{\frac{2}{\Lambda''(i)}}\,(\sqrt{\pi} + 2\theta\varepsilon).$$

Rappelons que cette dernière inégalité est valable (avec $\theta^2 < 1$) si, k ayant été choisi satisfaisant aux conditions (2) et (3), i est supérieur à la valeur n_k correspondante, ce qui aura lieu à partir d'une certaine valeur de x.

65. En résumé, en posant $\log r = x$, i étant la fonction de x définie par $x = \Lambda'_i$, la somme de la série $\frac{r^n}{e^{\Lambda_n}}$ est

$$F(r) = \sqrt{\frac{2\pi}{\Lambda''_i}}\,e^{i\Lambda'_i - \Lambda_i}[1 + \eta(x)],$$

$\eta(x)$ tendant vers zéro avec $\frac{1}{x}$.

Pour les applications on pourra remarquer que

$$iA'_i - A_i = \int_{i_0}^{i} iA''_i\,di,$$

i_0 étant une certaine constante non arbitraire. Or, $dx = A''_i\,di$. Donc, l'expression devient, si $i(x)$ est connu,

$$F(r) = \sqrt{2\pi\frac{di}{dx}}\,e^{\int_{x_0}^{x} i\,dx}[1+\eta(x)].$$

i_0, je le répète, est déterminé. C'est, si l'on veut, l'abscisse du point de la courbe $y(i) = A_i$ où la tangente passe par l'origine et x_0 est le coefficient angulaire de cette tangente. Dans cette formule i est une fonction de x qui, pour ses valeurs entières, coïncide avec le rang du terme maximum, qui est croissante et dont la dérivée $\frac{di}{dx} = i'$ satisfait à la condition équivalente à (1),

$$\lim_{x=\infty} i'\left(x + \frac{k}{\sqrt{i'}}\right) : i'(x) = 1.$$

Nous montrerons par la suite l'équivalence des deux conditions [1].

La formule précédente donnera la somme de séries entières dont la croissance ne sera pas limitée dans le sens de la rapidité, mais seulement

[1] M. Le Roy a obtenu (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 1900) cette même formule. Les hypothèses moyennant lesquelles M. Le Roy en affirme la validité ne sont pas entièrement les mêmes que ci-dessus. La décroissance de A'' et la croissance infinie de $i^2 A''_i$ remplacent la condition (1). Les hypothèses

$$\lim_{i=\infty} A''_i = 0, \qquad \lim_{i=\infty} i^2 A'' = \infty$$

ne suffisent pas si l'on ne suppose pas en outre que le *sens de variation de* A'' *et de* $i^2 A''$ est constant. En revanche, *l'ensemble de ces hypothèses entraîne la condition* (1). Mais la condition que je donne est plus générale, puisque, bien qu'elle contraigne $i^2 A''$ à tendre vers l'infini, *elle n'implique rien sur le sens de variation de* A'' ni de $i^2 A''$. J'ai obtenu la formule sans connaître le travail de M. Le Roy. D'ailleurs, le calcul ci-dessus n'offre pour mon objet aucun intérêt en lui-même; il n'a représenté pour moi qu'une étape nécessaire dans la recherche de l'exposant de convergence et dans celle des caractères de grande régularité.

dans le sens de l'irrégularité et de la lenteur. La formule ne peut convenir que si A'' tend vers zéro. Si donc $f(r) = \sum \frac{r^m}{q^{m^2}}$, il faudra que q soit infiniment petit avec $\frac{1}{m}$.

Recherche conduisant au choix de l'exposant de convergence.

66. Je vais exposer sommairement la marche qui m'a conduit au choix de l'exposant p. J'ai eu besoin pour cela d'étudier la somme d'une série entière à termes positifs avec moins de détails que dans l'analyse précédente, mais de façon à en retenir surtout la remarque suivante : *si* A_i *croît avec une assez grande régularité, le terme maximum de la série la divise en deux parties équivalentes.*

Or, rappelons l'observation primordiale d'où découle le choix de p.

D'après la valeur de $\varphi(1, p)$ qui tend vers une limite pour p infini, il est naturel de partager les facteurs du produit pour chaque valeur de r en deux catégories, suivant que $r(n) < r$ ou que $r(n) > r$. La valeur du ou des termes médians [s'il en existe, $r(n) = r$] est sensiblement indépendante de la loi de croissance de l'exposant interposé ρ_n. Si je donne à ρ_n les valeurs les plus petites possibles, assurant strictement la convergence, la première partie du produit qui est un produit d'exponentielles de variables très grandes $\frac{r}{r_i}$ à exposants le plus faibles possible, sera relativement peu croissante. Le reste au contraire, puisque la convergence sera strictement assurée, sera très important, et d'autant plus que la convergence sera plus médiocrement assurée, c'est-à-dire que ρ_h sera moins croissant. Si, à partir de ce choix de ρ_h, qui sera par exemple

$$\rho_h = (1 + \alpha) \frac{\log h}{\log r_h},$$

je remplace ρ_h par une fonction plus croissante, la première partie du produit devient plus grande, tandis que, la convergence étant améliorée, le reste est moins important. Si je prends pour ρ_h des fonctions de plus en plus croissantes, je rends le produit infini de plus en plus convergent, je diminue donc le reste; mais j'augmente alors la première partie.

Donc la fonction ρ_n qui nous donnera la croissance totale la plus

restreinte sera telle que la première partie et le reste séparés par le facteur correspondant à $r_h = r$ soient du même ordre de grandeur.

67. On sait que la convergence absolue du produit canonique est assurée si l'on choisit $p_n = E(\rho_n)$ avec

$$\rho_n = k\frac{\log n}{\log r(n)}, \qquad k > 1 + \alpha > 1,$$

α fixe. $E(\rho)$ est la valeur de ρ à une unité près par défaut. On peut même prendre $k = 1 + \frac{A_n}{\log r(n)}$, si A_n croît indéfiniment, avec $p \geqq \rho_n$.

Je suppose que, i étant un entier arbitraire, il y a un nombre n_i tel que $\rho_{n_i} \geqq i$ si $n \geqq n_i$, $\rho_n < i$, si $n < n_i$. Ceci aura lieu en particulier si $k\frac{\log n}{\log r(n)}$ est croissant. Nous supposons que ρ_{n_i} est très sensiblement égal à i, et nous posons $R_i = r(n_i)$.

Limitons supérieurement le logarithme de chaque facteur par l'inégalité $M_p(u) < u^{p+1}$. Dans $\sum_1^\infty \varphi\left(\frac{r}{r_n}, p_n\right) r^{i+1}$ est alors en facteur devant la somme de termes $\sum_{n_i}^{n_{i+1}-1} \frac{1}{r^{i+1}(n)}$.

Cette somme, d'après $r_m^{\rho_m} = m^k$, est inférieure à $\sum_{n_i}^\infty \frac{1}{m^k}$, ou à

$$\frac{1}{k-1}\frac{1}{n_i^{k-1}}.$$

Donc, $\sum_1^\infty \varphi$ est inférieur à la série entière à termes positifs

$$\frac{1}{k-1}\sum_1^\infty \frac{r^{i+1}}{n_i^{k-1}}.$$

C'est ici que s'est présentée pour moi la nécessité d'étudier la somme d'une série entière à termes positifs. D'après la remarque faite plus haut, le terme maximum de cette série doit être tel que les termes situés avant lui correspondent à des valeurs de $r(n_i)$ inférieures à r et que les termes situés après lui correspondent à des valeurs de $r(n_i)$ supérieures à r.

68. La série $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{r^i}{n_i^{k-1}}$ sera mise sous la forme $\sum r^i e^{-A_i}$ si l'on pose

$$A_i = (k-1) \log n_i.$$

Il s'agit d'interpoler A_i pour toutes les valeurs non entières de i. Supposons $r(m)$ interpolé pour toutes les valeurs de m. Quel que soit m, nous supposons que i soit égal au nombre $k \frac{\log m}{\log r(m)}$ que nous avons désigné (quand m est entier) par ρ. Inversement, si nous supposons $k \frac{\log m}{\log r(m)}$ croissant, l'égalité $i = k \frac{\log m}{\log r(m)}$ nous définit une valeur bien déterminée de m, pour chaque valeur donnée, entière ou non, de i. Remplaçons de même $\log n_i$ par $\log m$. Nous n'aurons plus de difficulté à faire correspondre à chaque valeur de i une valeur de A_i. Nous verrons ensuite dans quel cas la fonction continue A_i satisfait aux conditions complémentaires.

Le rang i du terme maximum est fourni par

$$\log r = \frac{d}{di} A_i. \tag{1}$$

Or, nous voulons que le rang (interpolé) $n_i = m$ de ce terme maximum soit tel que $\log r(m) = \log r$. L'égalité (1) doit donc pouvoir s'écrire

$$\log r = \log r(n_i) = \log r(m).$$

Nous arrivons donc à la condition

$$\log r(m) = \frac{dA_i}{di}. \tag{2}$$

Or

$$A_i = k \log m - \log m = i \log r(m) - \log m.$$

Donc

$$\frac{dA_i}{di} = \log r(m) + i \frac{d \log r(m)}{di} - \frac{d \log m}{di}.$$

L'égalité (2) se réduit à

$$i = \frac{d \log m}{d \log r(m)}. \tag{3}$$

Posons

$$\log r(m) = x, \qquad \log m = y;$$

on a

$$i = y'.$$

Mais nous ne sommes assurés que le terme maximum divise la série entière en deux parties équivalentes que moyennant certaines conditions :

1° $A'' > 0$; 2° $\lim_{i=\infty} A''(i) = 0$; 3° $\lim_{i=\infty} A''\left(i + \frac{\theta k}{\sqrt{A''_i}}\right) : A''_i = 1$.

Traduisons ces conditions au moyen de la fonction $y(x)$.

On a

$$A_i = i \log r(m) - \log m = xy' - y.$$

Puis

$$\frac{dA_i}{di} = x,$$

d'après

$$\frac{dA_i}{dx} = xy'', \qquad \frac{dx}{di} = \frac{1}{y''},$$

$$\frac{d^2 A_i}{di^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dA_i}{di}\right)\frac{dx}{di} = \frac{1}{y''}.$$

La condition $A''_i > 0$ se traduit donc par $y'' > 0$. La seconde condition impose à y'' de croître indéfiniment. Étudions la troisième. Elle consiste en ceci que, y' s'augmentant de $\frac{\theta k}{\sqrt{A''_i}}$, l'altération relative de A_i tend vers zéro avec $\frac{1}{i}$.

Donc, si y' s'augmente de $\theta k \sqrt{y''}$, l'altération relative de y'' tend vers zéro avec $\frac{1}{x}$. Soit x_1 le nombre (unique, puisque y' est croissant) tel que

$$y'(x_1) = y'(x) + h\sqrt{y''(x)}.$$

On a, si x est supérieur à un certain nombre X_k,

$$y''(x_1) = y''(x)(1 + \delta\varepsilon),$$

avec $\delta^2 < 1$, pour toutes les valeurs de h comprises entre zéro et le

nombre fixe k. En multipliant les termes de cette égalité par dx_1 et en intégrant entre les limites x et x_1, il vient

$$y'(x_1) - y'(x) = y''(x)(x_1 - x)(1 + \delta\varepsilon).$$

Donc

$$x_1 - x = \frac{h}{(1 + \delta\varepsilon)\sqrt{y''(x)}}.$$

La troisième condition imposée à A''_i exige donc que

$$y''\left(x + \frac{\theta k}{\sqrt{y''}}\right) : y''(x)$$

tende vers 1 pour x infini, k étant fixe et θ arbitraire entre 0 et 1.

Réciproquement, si l'on suppose cette condition vérifiée, on démontre aisément que : 1° bien que k ne soit plus en général indépendant de m (d'après $k = \frac{d \log y}{d \log x}$, k est fixe si $r_n = e^{(\log n)^\alpha}$, α étant fixe inférieur à 1), la série $\sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{r}{r(m)}\right]^{p_m+1}$ est égale, avec une erreur infiniment petite, à $\frac{r}{k(n_i) - 1} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{r^i}{n_i^{k-1}}$; 2° cette dernière série est évaluée asymptotiquement par la formule donnée plus haut, et son terme maximum la divise en deux parties équivalentes.

Nous n'insistons pas sur ces points, car nous verrons que l'hypothèse

$$\lim_{x=\infty} y''\left(x + \frac{\theta k}{\sqrt{y''}}\right) : y''(x) = 1$$

permet l'évaluation asymptotique de la somme $\sum \varphi\left(\frac{r}{r(m)}, p_m\right)$ elle-même, et non plus seulement de son expression trop grossièrement approchée $\sum \left(\frac{r}{r(m)}\right)^{p_m+1}$.

En réalité, je ne suis pas arrivé aussi directement au résultat. Je me suis aidé de l'observation suivante :

69. Supposons la fonction entière mise sous la forme $\sum \left(\frac{r}{B_n}\right)^n$, B_n croissant indéfiniment avec n. Alors, *si i_1 est le rang du nombre* B_n

égal à r, si le rang du terme maximum est $i = \frac{i_1}{e + \alpha_i}$, α_i *tend vers zéro avec* $\frac{1}{i}$, *moyennant une certaine condition* (2) *de régularité.* En effet, le maximum de $\left(\frac{r}{B_n}\right)^n$ est pour $n = i$ si

$$\log r = \log B_i + i\frac{d\log B_i}{di} = \log B_i + \frac{d\log B_i}{d\log i},$$

ce qui détermine i, si le second membre est croissant; supposons donc

$$\frac{d\log B_i}{d\log i} + \frac{d^2\log B_i}{(d\log i)^2} > 0. \tag{1}$$

Or formons $B_{ie^{1+\alpha}}$. $\frac{d^2\log B_n}{(d\log n)^2}$ étant supposé continu, on a

$$\log B_{ie^{1+\alpha}} = \log B_i + (1+\alpha)\frac{d\log B_i}{d\log i} + \frac{(1+\alpha)^2}{2}\,\frac{d^2\log B_{ie^{\theta(1+\alpha)}}}{(d\log i)^2}.$$

Supposons, ce qui entraîne la condition (1), que

$$\lim_{n=\infty}\frac{d^2\log B_n}{(d\log n)^2} : \frac{d\log B_n}{d\log n} = 0 \quad (^1). \tag{2}$$

Si ce quotient est inférieur en valeur absolue à ε pour $i > i_0$, on a, si $i_2 > i$,

$$\frac{d\log B_{i_2}}{d\log i_2} = \frac{d\log B_i}{d\log i}e^{\delta\varepsilon(\log i_2 - \log i)} \qquad (\delta^2 < 1),$$

et par suite, si $i_2 = ie^{\theta(1+\alpha)}$,

$$\left|\frac{d^2\log B_{i_2}}{(d\log i_2)^2}\right| < \varepsilon\, e^{\varepsilon(1+\alpha)}\frac{d\log B_i}{d\log i}.$$

Donc

$$\log B_{ie^{1+\alpha}} = \log B_i + (1+\alpha)(1+h\varepsilon)\frac{d\log B_i}{d\log i},$$

h étant borné si α l'est, et si $\varepsilon < 1$. Il n'y a qu'un seul nombre i_1 tel que $B_{i_1} = r$. Or, il est visible que l'on peut satisfaire à cette égalité en prenant pour α une certaine valeur tendant vers zéro avec $\frac{1}{i}$. Donc,

---

(1) Si la série est mise sous la forme $r^i e^{-A_i}$, cette condition est remplie si iA''_i tend vers zéro en décroissant, ce qui borne inférieurement l'ordre de croissance de la fonction entière.

si $i_1 = i(e + \alpha_i)$, α_i tend vers zéro et est comparable à α. α a pour partie principale

$$-\frac{1}{2}\frac{d^2 \log B_i}{(d \log i)^2} : \frac{d \log B_i}{d \log i}.$$

En mettant la série $\sum_1^\infty \frac{r^i}{n_i^{k-1}}$ sous la forme $\sum_1^\infty \left[\frac{r}{(R_i)^{\frac{k-1}{k}}}\right]^i [R_i = r(n_i)]$,

on trouve que

$$\log R_i = \left[1 - \frac{1}{k(i_1)}\right] \log R_{i_1},$$

i_1 étant un nombre dont la partie principale est ei.

C'est de cette condition, nécessaire dans des cas d'assez grande régularité, que j'avais tout d'abord déduit $p = \frac{d \log m}{d \log r(m)}$.

70. Ouvrons une parenthèse pour citer une autre propriété analogue du nombre e. *Soit une fonction* $\varphi(n)$, *telle que* $\frac{d^2\varphi(n)}{(d \log n)^2} : \frac{d\varphi(n)}{d \log n}$ *tende vers zéro. Si l'on pose*

$$\varphi(N) + \varphi(N+1) + \ldots + \varphi(n) = n\,\varphi(hn),$$

N *étant fixe, h tend pour n infini vers* $\frac{1}{e}$. Posons

$$\varphi(e^y) = \psi(y).$$

Notre hypothèse est que $\frac{\psi''}{\psi'}$ tend vers zéro avec $\frac{1}{y}$. Il en résulte d'abord que ψ' a un signe constant et que $\int_N^n \varphi(n)\, dn$ diverge. En effet il existe, par hypothèse, un nombre $n_0 = e^{y_0}$ tel que, pour $y > y_0$, on ait $-\varepsilon < \frac{\psi''}{\psi'} < \varepsilon$. De là résulte

$$e^{-\varepsilon(y-y_0)} < \frac{\psi'(y)}{\psi'(y_0)} < e^{\varepsilon(y-y_0)}.$$

Donc, pour $y > y_0$, $\psi'(y)$ a le signe de $\psi'(y_0)$. D'ailleurs

$$J = \int_N^n \varphi(n)\, dn = \int_Y^y \psi(y)\, e^y\, dy \qquad (n = e^y;\ N = e^Y)$$

diverge manifestement. Cela étant, puisque $\varphi(n)$ varie toujours dans le même sens,

$$S_n = \sum_{N}^{n} \varphi(n) = \theta\,|\varphi(n) - \varphi(N)| + J.$$

Or

$$J = \int^{y} \psi(y)\, e^y\, dy = [\psi(y)\, e^y]_{Y}^{y} - \int_{Y}^{y} \psi'\, e^y\, dy$$

et

$$J_1 = \int_{Y}^{y} \psi'\, e^y\, dy = (\psi' e^y)_{Y}^{y} - \int_{Y}^{y} \psi''\, e^y\, dy.$$

Puisque $\frac{\psi''}{\psi'}$ tend vers zéro, J_1 qui croît indéfiniment est égal à $\psi' e^y$ avec une erreur relative infiniment petite avec $\frac{1}{y}\cdot$ Si

$$J_1 = \psi' e^y (1 + \delta\varepsilon),$$

δ^2 étant inférieur à 1 à partir d'une certaine valeur de y, on a

$$S_n = e^y \psi(y) - e^y \psi'(y)(1 + \delta\varepsilon) + \theta\,|\psi(y) - \psi(Y)|.$$

Or $e^y \psi'$ et $e^y \frac{\psi'}{\psi}$ sont infiniment grands. Donc

$$S_n\, e^{-y} = \psi(y) - \psi'(y)(1 + 2\delta\varepsilon),$$

δ^2 étant inférieur à 1 à partir d'une certaine valeur de y. Or, nous avons vu que, si l'on écrit le second membre sous la forme $\psi(y - 1 + \eta)$, η tend vers zéro avec $\frac{1}{y}$ $\left(\text{à cause de } \lim_{y=\infty} \frac{\psi''}{\psi'} = 0\right)\cdot$ En remplaçant e^y par n, on voit que

$$S_n = n\,\varphi\left(\frac{n}{e + \eta'}\right),$$

η' tendant vers zéro avec $\frac{1}{n}\cdot$ C. Q. F. D.

La croissance de φ est limitée par ce fait que $\frac{\log \varphi}{\log n}$ doit tendre vers zéro, positivement ou négativement d'ailleurs. La formule vaut pour $\varphi = (Ln)^\alpha$, quel que soit α, positif ou négatif, et donne

$$\sum_{2}^{n} (Ln)^\alpha = n[Ln - 1 - \eta(n)]^\alpha, \qquad \lim \eta(n) = 0.$$

Elle vaut pour $L_2 n, \ldots, L_h n, \ldots$ ou, encore, vers les plus grandes croissances pour $\varphi = e^{\alpha(Ln)^\beta}$, si $\beta < 1$, α étant arbitraire fixe, positif ou négatif. Mais déjà, pour $\varphi = n$,

$$\sum_1^n \varphi(n) = \frac{n(n+1)}{2} \neq \frac{n^2}{e+\eta(n)}.$$

La formule ne convient pas si l'une des séries $[\varphi(n)]^{p+1}$ ou $\frac{1}{[\varphi(n)]^{p+1}}$ converge pour une valeur assez grande de p, mais elle vaut dès que la divergence se produit pour toute valeur de p, et évidemment, moyennant les conditions de régularité. En appelant *genre* d'une série $\varphi(n)$ le plus petit entier p positif, négatif ou nul, tel que $[\varphi(n)]^{p+1}$ converge, il semble que la manière dont se comporte h relativement à e quand n croît indéfiniment puisse différencier les séries de genre fini d'avec les séries de genre infini.

Si l'on ne voulait pas interpoler explicitement la fonction $\varphi(n)$ pour prendre ses dérivées, on pourrait énoncer le théorème suivant :

Soit $\frac{v_n}{n}$ le terme général d'une série divergente, telle que $u_n = \sum_1^n \frac{v_n}{n}$ soit infiniment grand relativement à v_n (1). *Soit*

$$\varphi(n) = \sum_1 \frac{u_n}{n}.$$

Alors,

$$\sum_1^n \varphi(n) = n\varphi\left[\frac{n}{e+\eta(n)}\right],$$

$\eta(n)$ tendant vers zéro.

71. *Seconde voie conduisant à la valeur de p.* — Voici une autre voie totalement indépendante de la première, et conduisant, elle aussi,

(1) Si l'on suppose $\frac{v_n}{n}$ et $\frac{v_n}{u_n}$ décroissants, ceci se traduit par la condition *nécessaire et suffisante* que voici : à tout membre ε, je peux faire correspondre N, tel que, si $N < n' < n$, on a : $\frac{v_n}{v_{n'}} < \left(\frac{n}{n'}\right)^\varepsilon$. (*Voir* aux *Comptes rendus* ma Note du 13 avril 1909.)

à la valeur approchée $i = \frac{d \log m}{d \log r(m)}$. Mais ici la valeur optima de i n'est pas obtenue par une analyse de la condition $\Pi_1 \sim \Pi_2$, mais en perfectionnant une loi choisie *a priori* pour p.

Soit ρ_m l'exposant attaché à r_m. D'après la formule $u^\tau > M(u)$ nous ne supposerons pas ρ_m entier, mais variant continûment avec r_m si l'on a interpolé la fonction $m = \varphi(r)$ pour toutes les valeurs de r. *Nous cherchons à choisir ρ_m tel que*

$$(1) \qquad \left(\frac{r}{r_m}\right)^{\rho_m} \leqq \frac{V(r)}{m^k},$$

pour $r_m > r$, k étant supérieur à 1 et fixe.

On a, en faisant tendre r_m vers r,

$$V(r) \geqq [\varphi(r)]^k.$$

C'est une condition nécessaire. Choisissons

$$V(r) = [\varphi(r)]^k.$$

Nous voulons que

$$\left(\frac{r}{r_m}\right)^{\rho_m} \leqq \left[\frac{\varphi(r)}{\varphi(r_m)}\right]^k,$$

quel que soit $r_m > r$. Les deux membres sont égaux pour $r_m = r$. Il faut donc encore que la dérivée par rapport à r_m du premier soit inférieure à celle du second pour $r_m = r$. Il vient

$$\rho(r_m)\, d \log r_m \leqq k\, d \log \varphi(r_m).$$

Prenons

$$\rho(r_m) = k \frac{d \log m}{d \log r_m},$$

et cherchons à quelle condition l'inégalité (1) où tout est connu sera vérifiée, quel que soit m. Il faut que, quel que soit $r' = r_m > r$,

$$(\log r' - \log r) \frac{d \log \varphi(r')}{d \log r'} > \log \varphi(r') - \log \varphi(r), \qquad \text{si} \qquad r' > r.$$

Or, ceci exprime simplement que la courbe dont les points ont pour abscisse $\log r$ et pour ordonnée $\log \varphi(r)$ tourne sa concavité vers les $\log \varphi(r)$ positifs. Si l'on pose en effet

$$\log \varphi(r) = y, \qquad \log r = x,$$

la condition précédente s'écrit, si $x_1 < x_2$,

$$y'_2(x_2 - x_1) > y_2 - y_1$$

ou

$$\int_{x_1}^{x_2} (y'_2 - y')\, dx > 0.$$

Si, quel que soit le couple de points x_2, $x < x_2$, on n'a pas $y' < y'_2$, il sera possible de trouver un intervalle où y' décroisse; en prenant x_2 et x_1 dans cet intervalle, on aurait $y'_2(x_2 - x_1) < y_2 - y_1$. Donc, y' croît constamment. Donc $y'' \geqq 0$. Réciproquement, l'hypothèse $y'' \geqq 0$ nous donne, si y'' n'est pas continuellement nul dans un intervalle, $y'_2 - y' > 0$, si $x < x_2$ et par suite

$$y'_2(x_2 - x_1) > y_2 - y_1.$$

Donc, moyennant $y'' > 0$, on a, avec $\rho_m = k \dfrac{d \log m}{d \log r_m} = ky'$,

$$\left(\frac{r}{r_m}\right)^{\rho_m} < \left[\frac{\varphi(r)}{m}\right]^k \qquad \text{si} \qquad m > \varphi(r).$$

Donc

$$\sum_{\varphi(r)}^{\infty} \left(\frac{r}{r_m}\right)^{\rho_m} < [\varphi(r)]^k \sum_{\varphi(r)}^{\infty} \frac{1}{m^k} = \frac{1}{k-1}\varphi(r);$$

Évaluons la somme des termes pour lesquels $r_m < r$.

$$\sum_{1}^{\varphi(r)} \left(\frac{r}{r_m}\right)^{\rho_m} = \int_1^{\varphi(r)} \left(\frac{r}{r_m}\right)^{\rho_m} dm = \int_1^{Y} e^{ky'(X-x)+y}\, dy,$$

en posant

$$X = \log r \qquad \text{et} \qquad Y = \log \varphi(r).$$

Cette dernière intégrale est inférieure, d'après $y'(X - x) < Y - y$, à

$$e^{kY} \int_1^{Y} e^{-(k-1)y}\, dy = h[\varphi(r)]^k,$$

h étant égal à

$$\int_1^{Y} e^{-(k-1)y}\, dy < \int_1^{\infty} e^{-(k-1)y}\, dy$$

qui est borné. La limite inférieure pouvant être prise arbitrairement grande, mais fixe cependant, la somme des termes pour lesquels $x < X$ est égale à $\eta(r)[\varphi(r)]^k$, η tendant vers zéro.

72. L'égalité des ordres de la première partie et du reste n'est pas réalisée. On peut en approcher davantage, si l'on suppose que la courbe d'abscisse $\log r$ et d'ordonnée $\log \psi(r)$, avec

$$\psi(r) = \varphi(r) \log \varphi(r) \ldots \log_{h-1} \varphi(r) \log_h^k \varphi(r),$$

tourne sa concavité vers les $\log \psi(r)$ positifs.

Cherchons à déterminer ρ_m par la condition

$$\left(\frac{r}{r_m}\right)^{\rho_m} = \frac{X(r)}{m \log m \ldots \log_{h-1} m \log_h^k m}.$$

On voit comme ci-dessus que la question est résolue en posant

$$X(r) = \psi(r) \qquad \text{et} \qquad \rho_m = \frac{d \log \psi[r(m)]}{d \log r(m)}.$$

Moyennant ces hypothèses

$$\sum_{m=\varphi(r)}^{\infty} \left(\frac{r}{r_m}\right)^{\rho_m} < \frac{1}{k-1} \frac{\psi(r)}{\log_h^{k-1} \varphi(r)},$$

et

$$\sum_{1}^{\varphi(r)} \left(\frac{r}{r_m}\right)^{\rho_m} = \int_{y_0}^{Y} e^{(X-x)\frac{d\log\psi}{dx} + y}\, dy.$$

Or

$$(X - x)\frac{d \log \psi}{dx} < \log \Psi - \log \psi.$$

D'après

$$\log \psi = y + \log y + \ldots + \log_{h-1} y + k \log_h y,$$

l'intégrale est inférieure à

$$\psi(r) \int_{y_0}^{Y} \frac{dy}{y \log y \ldots \log_{h-2} y \log_{h-1}^k y} \qquad \text{ou à} \qquad \varepsilon\, \psi(r).$$

Les deux parties du produit ne sont toujours pas d'ordre équivalent; la première surpasse la seconde, mais leur rapport égal à $\log_h^{k-1} \varphi(r)$ est faiblement croissant relativement à l'ordre de la plus grande.

Seulement on s'aperçoit, quand la précision est poussée à ce point, que l'erreur commise en limitant $\varphi\left(\frac{r}{r_n}, p_n\right)$ par $\left(\frac{r}{r_n}\right)^\tau$ devient prépondérante, et, en reprenant le problème à pied d'œuvre avec $p = y' + \alpha$, et la seule hypothèse que y' soit sensiblement croissant, on arrive aux calculs et aux résultats développés dans le Chapitre II.

Expression asymptotique de $H(X)$ dans le cas des croissances très régulières.

73. Soit une fonction $y(x)$ telle que, pour toutes les valeurs $x(n)$ de x, y coïncide avec $y(n)$, et qui réalise l'hypothèse suivante que nous désignerons sous le nom d'hypothèse B : 1° y possède une dérivée seconde y''; 2° quel que soit le nombre k choisi, arbitraire et fixe, et quelle que soit la façon dont θ varie entre 0 et 1, on a (¹)

$$(1) \qquad \lim_{x=\infty} y''\left(x + \frac{\theta k}{\sqrt{y''}}\right) : y''(x) = 1.$$

Nous allons voir que cette hypothèse B permet d'obtenir l'expression asymptotique exacte de

$$H(X) = \sum_1^\infty \varphi\left(\frac{r}{r_n}, p_n\right) \qquad (X = \log r),$$

pour toutes les valeurs de r. Au contraire, la limite supérieure de H

(¹) Voici l'interprétation géométrique de cette condition analytique. Supposons construite la courbe représentative de la fonction $y(x)$. Menons la tangente T au point X, Y, la droite Δ parallèle à T, et ayant une ordonnée à l'origine qui excède de k celle de T. Δ est la corde d'un arc AB. J'opère une certaine transformation homographique du plan des xy en le plan des $\xi\eta$, de façon que T se transforme en $O\xi$, la droite $x = X$ en $O\eta$, les droites de l'infini des deux plans étant homologues. Si enfin le point B est assujetti à venir se placer au point de coordonnées $\left(\frac{k^2}{2}, k\right)$, la transformation homographique est déterminée et le transformé de l'arc AB tend, si X croît indéfiniment, vers l'arc de parabole $2\eta = \xi^2$, compris entre les droites $\xi = \pm k$. Il est à remarquer que, si y'' est infiniment grand, la projection de AB sur Ox, égale à $\frac{2k}{\sqrt{y''}}$, est infiniment petite.

trouvée au Chapitre I, moyennant l'hypothèse A et obtenue en négligeant certaines quantités que nous ne pouvions pas évaluer, n'est l'expression asymptotique exacte de II que dans le cas exceptionnel où l'exposant reste constant sur une très grande étendue de r_n, dans laquelle est choisi r. Ceci est évidemment insuffisant lorsque n et par suite p_n croissent très régulièrement en fonction de r_n, par exemple, si n est composé en r_n d'exponentielles, de logarithmes, etc., en nombre fini.

74. *Étude de l'hypothèse* B. — L'hypothèse B, qui exprime une condition suffisante pour que le calcul ci-dessus proposé soit possible, définit une famille de fonctions évidemment beaucoup plus générale que la précédente. D'ailleurs, si l'existence d'une dérivée seconde jouissant de la propriété imposée implique une assez grande régularité locale de la fonction y, cette fonction dans son ensemble peut être très irrégulière. Car les fonctions pour lesquelles $y'' = \left(a - \frac{\varepsilon}{k}x\right)^{-2}$ ou $y'' = \left(a + \frac{\varepsilon}{k}x\right)^{-2}$ sont telles que les courbes x, y correspondantes aient, la première une asymptote verticale, la seconde une asymptote de pente finie, bien que

$$y''\left(x + \frac{\theta k}{\sqrt{y''}}\right) = y''(x)\frac{1}{1 \pm \theta\varepsilon}$$

($-\theta\varepsilon$ pour la première, $+\theta\varepsilon$ pour la seconde). Il est donc possible d'avoir

$$y''\left[x + \frac{\theta k}{\sqrt{y''(x)}}\right] : y''(x) = 1 + \eta(x)$$

avec

$$\lim_{x=\infty} \eta(x) = 0,$$

et de faire décrire à y des arcs sur des courbes à asymptotes tour à tour verticales ou à pente finie.

Nous allons rechercher de quelle façon précise l'hypothèse B se trouve contraindre la fonction y.

75. *Je dis que* $\frac{y''}{y'^2}$ *tend vers zéro avec* $\frac{1}{x}$. Le choix de l'exposant 2

pour y' n'est pas arbitraire. Car, si on le remplace par $2-\alpha$, quelque petit que soit α, positif fixe, il est possible, avec une fonction conforme à l'hypothèse B, d'obtenir pour le rapport $\frac{y''}{y'^{2-\alpha}}$ des valeurs de plus en plus grandes pour une infinité de valeurs croissantes de x.

En faisant coïncider alternativement y'' avec les fonctions $\left(a-\frac{\varepsilon}{k}x\right)^{-2}$ et $\left(a+\frac{\varepsilon}{k}x\right)^{-2}$, les ε décroissant de chaque arc au suivant, comme il vient d'être indiqué (voir aussi Chap. II, p. 55), on a sur l'un des premiers arcs

$$\frac{y''}{y'^{2-\alpha}}=\left(\frac{\varepsilon}{k}\right)^{2-\alpha}\left(a-\frac{\varepsilon}{k}x\right)^{-\alpha}.$$

Si l'on fait approcher suffisamment x de $\frac{ka}{\varepsilon}$, on peut évidemment rendre ce rapport supérieur à tout nombre fixé d'avance.

Le rapport $\frac{y''}{y'^{2-\alpha}}$ pourrait même, pour une fonction y satisfaisant à l'hypothèse B, surpasser une fonction arbitrairement croissante donnée $\varphi(x)$ pour une infinité de valeurs de x. C'est donc un fait non évident *a priori* que $\frac{y''}{y'^2}$ tende vers zéro. Démontrons-le.

L'hypothèse B exprime que, k étant choisi fixe arbitrairement grand, il existe un nombre ξ_0 tel que, pour $x>\xi_0$,

$$y''\left(x+\frac{\theta k}{\sqrt{y''}}\right)=(1+\delta\varepsilon)\,y''(x)\qquad(\delta^2<1).$$

Considérons la suite des nombres $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ définie par la loi de récurrence

$$\xi_{n+1}=\xi_n+\frac{k}{\sqrt{y''_n}},$$

avec

$$y''_n=y''(\xi_n).$$

On a, si

$$\xi_n<x<\xi_{n+1},\qquad y''=(1+\delta\varepsilon)\,y''_n;$$

d'où, en intégrant,

$$y'_{n+1}-y'_n=(1+\delta\varepsilon)\,y''_n(\xi_{n+1}-\xi_n)=(1+\delta\varepsilon)\,k\sqrt{y''_n}$$

et

$$y'_{n+1} = y'_0 + (1 + \delta\varepsilon) k \left(\sqrt{y''_0} + \sqrt{y''_1} + \ldots + \sqrt{y''_n}\right).$$

Avant de former le rapport $\frac{y''_{n+1}}{y'^2_{n+1}}$, remplaçons les variables y''_i qui y figurent et *qui ne sont pas indépendantes* les unes des autres puisque toute modification dans le champ de variation de l'une entraîne une modification dans le champ de toutes les suivantes, par les variables $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ définies par

$$y''_{n+1} = t_n y''_n.$$

Les variables t_i sont rigoureusement indépendantes, chacune varie à son gré dans le champ $1 - \varepsilon$ à $1 + \varepsilon$. L'artifice de ce changement de variable va nous conduire au résultat cherché. On a

$$\frac{y''_{n+1}}{y'^2_{n+1}} = \frac{y''_0 t_1 t_2 \ldots t_n}{\left[y'_0 + (1 + \delta\varepsilon) k \sqrt{y''_0}\left(1 + \sqrt{t_1} + \sqrt{t_1 t_2} + \ldots + \sqrt{t_1 \ldots t_n}\right)\right]^2}.$$

Or, si nous remarquons que $\frac{x}{(A\sqrt{x} + B)^2}$, où A et B sont positifs, est une fonction croissante de x, puisque c'est $\frac{1}{\left(A + \frac{B}{\sqrt{x}}\right)^2}$, nous augmentons la valeur du second membre, chaque fois que nous y remplaçons l'un des t_i par $1 + \varepsilon$. On aura donc une limite supérieure de $\frac{y''_{n+1}}{y'^2_{n+1}}$ en faisant

$$t_1 = t_2 = \ldots = t_n = 1 + \varepsilon,$$

en prenant $\delta = -1$ et en supprimant au dénominateur y'_0 supposé positif. Donc

$$\frac{\sqrt{y''_{n+1}}}{y'_{n+1}} < \frac{1 - (1 + \varepsilon)^{\frac{1}{2}}}{(1 - \varepsilon) k \left[1 - (1 + \varepsilon)^{-\frac{n+1}{2}}\right]}.$$

Le second membre tend pour n infini vers $\frac{1}{1 - \varepsilon} \frac{1 - (1 + \varepsilon)^{\frac{1}{2}}}{k}$ inférieur à $\frac{\varepsilon}{2k(1 - \varepsilon)}$ [d'après $(1 + x)^m > 1 + mx$ si x est positif, quel que soit m]. Il y a donc une valeur n_0 calculable au moyen de k et ε seuls, telle que, si $n > n_0$, on a certainement $\left(\text{en supposant } \varepsilon < \frac{1}{2}\right)$

$$\frac{y''_n}{y'^2_n} < \frac{\varepsilon^2}{k^2}.$$

D'ailleurs, si $n > n_0$, d'après

$$y' = y'_n - (1 + \partial\varepsilon)\,\theta' k \sqrt{y''_n},$$

moyennant $\xi_n < x < \xi_{n+1}$, on a

$$y' = y'_n \left[1 + \sqrt{1 + \partial\varepsilon}\,\theta''\varepsilon\right].$$

Donc, si $\xi_n < x < \xi_{n+1}$, et si $n > n_0$,

$$\frac{y''}{y'^2} < \frac{\varepsilon^2}{k^2}(1 + \varepsilon).$$

Comme

$$\xi_{n_0+1} = \xi_0 + k\left(\frac{1}{\sqrt{y''_0}} + \frac{1}{\sqrt{y''_1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{y''_{n_0}}}\right)$$
$$< \xi_0 + \frac{k}{\sqrt{y''_0}}\left[1 + \frac{1}{(1-\varepsilon)^{\frac{1}{2}}} + \ldots + \frac{1}{(1-\varepsilon)^{\frac{n_0}{2}}}\right] = \xi_0,$$

si $x > \xi_0$, qui est calculable au moyen de ξ_0, y''_0, n_0 (ou k et ε) seuls, on aura certainement

$$\frac{y''}{y'^2} < \frac{\varepsilon^2}{k^2}(1 + \varepsilon).$$

Comme ε ou $\frac{1}{k}$ au choix peuvent être pris arbitrairement petits, ceci exprime que $\frac{y''}{y'^2}$ tend vers zéro avec $\frac{1}{x}$.

Montrons de même que

$$y'\left(x + \frac{\theta k}{y'}\right) : y'(x)$$

tend vers 1. En effet,

$$x + \frac{\theta k}{y'} = x + \frac{\theta k}{\sqrt{y''}},$$

à partir de la valeur de x où $y'' < y'^2$. Or, nous avons vu ci-dessus que

$$y'\left(x + \frac{\theta k}{\sqrt{y''}}\right) : y'(x)$$

tend vers 1.

76. Il nous sera enfin utile d'établir le fait suivant : $x\sqrt{y''}$ *croît indéfiniment avec* x.

Montrons d'abord qu'il en est de même de $\xi_n \sqrt{y''_n}$. On a

$$\xi_{n+1} = \xi_0 + k\left(\frac{1}{\sqrt{y''_0}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{y''_n}}\right),$$

d'où, avec les notations employées,

$$\xi_{n+1}\sqrt{y''_{n+1}} = \left(\xi_0 + \frac{k}{\sqrt{y''_0}}\overline{1 + \frac{1}{\sqrt{t_1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{t_1 \ldots t_n}}}\right)\sqrt{t_1 t_2 \ldots t_n y''_0}.$$

Le second membre est linéaire et à coefficients positifs par rapport à chacune des variables $\sqrt{t_i}$. Il est minimum pour

$$t_1 = t_2 = \ldots = t_n = 1 - \varepsilon.$$

En supprimant ξ_0 au second membre, il vient, tous calculs effectués,

$$\xi_{n+1}\sqrt{y''_{n+1}} > k\,\frac{1 - (1-\varepsilon)^{\frac{n+1}{2}}}{1 - (1-\varepsilon)^{\frac{1}{2}}}.$$

Quand n croît indéfiniment, le second membre tend vers $\dfrac{k}{1 - (1-\varepsilon)^{\frac{1}{2}}}$. Pour $n > n_0$, si ε est assez petit, on a donc

$$\xi_{n+1}\sqrt{y''_{n+1}} > \frac{k}{\varepsilon}.$$

Il résulte de là que $\xi_n\sqrt{y''_n}$ croît indéfiniment. Si $\xi_n < x < \xi_{n+1}$, on a

$$x = \xi_n + \frac{\theta k}{\sqrt{y''_n}} = \xi_n\left(1 + \frac{\theta k}{\xi_n\sqrt{y''_n}}\right).$$

Donc, $\frac{x}{\xi_n}$ tend vers 1, de même que $\frac{y''(x)}{y''(\xi_n)}$. Donc, $x\sqrt{y''(x)}$ est infiniment grand avec x.

On achèverait le raisonnement avec précision en montrant que, connaissant ξ_0, y''_0 et n_0 déduit de k, ε, on peut calculer un nombre ξ''_0 tel que, si $x > \xi''_0$,

$$x\sqrt{y''} > \frac{k}{2\varepsilon}.$$

$\frac{1}{k}$ et $\frac{1}{\varepsilon}$ étant, séparément au moins, arbitrairement petits, ceci exprime que $x\sqrt{y''}$ est infiniment grand avec x.

77. *Calcul de* H(X). — Nous allons calculer la fonction H(X) quand on définit p par les inégalités $p \leqq y < p + 1$.

Étant donné un nombre ε positif fixe arbitrairement petit au moyen duquel nous mesurerons nos approximations, rappelons que nous avons décomposé

$$\mathrm{H}(\mathrm{X}) = \sum_{1}^{\infty} \varphi\left(\frac{r}{r_n}, p_n\right)$$

en quatre parties :

$$\sum_{1}^{\mathrm{N}_0 - 1} + \sum_{\mathrm{N}_0}^{\mathrm{N}_1 - 1} + \sum_{\mathrm{N}_1}^{\mathrm{N}_2 - 1} + \sum_{\mathrm{N}_2}^{\infty} = \mathrm{S}_0 + \mathrm{S}_1 + \mathrm{S}_2 + \mathrm{S}_3.$$

Le nombre des termes de la première partie est indépendant de r, N_0 est choisi aussi grand que l'exigent certaines inégalités où figure ε, mais, comme N_0 est fixe, S_0 devient négligeable relativement à la partie restante. N_1 et N_2 sont respectivement les valeurs, à une unité près par excès, de e^{Y_1} et e^{Y_2}. Au précédent Chapitre Y_1 et Y_2 étaient définis par

$$\mathrm{Y} - \mathrm{Y}_1 = \mathrm{Y}_2 - \mathrm{Y} = h.$$

Ici, nous les définirons par

$$\mathrm{X} - \mathrm{X}_1 = \mathrm{X}_2 - \mathrm{X} = \frac{h}{\mathrm{Y}'}.$$

Les modifications apportées à Y_1 et à Y_2 sont de la sorte infiniment petites avec $\frac{1}{\mathrm{Y}'}$. Car

$$\mathrm{Y} - \mathrm{Y}_1 = (\mathrm{X} - \mathrm{X}_1)\, y'(\lambda) = h\,\frac{y'(\lambda)}{\mathrm{Y}'},$$

λ étant un certain nombre compris entre X_1 et X. Mais de

$$\lambda = \mathrm{X} - \frac{\theta h}{\mathrm{Y}'},$$

il résulte

$$\lim_{\mathrm{X} = \infty} y'(\lambda) : \mathrm{Y}' = 1.$$

Donc, $\mathrm{Y} - \mathrm{Y}_1$ et pareillement $\mathrm{Y}_2 - \mathrm{Y}$ ne diffèrent de h que par une

quantité infiniment petite avec $\frac{1}{X}$. Ceci nous montre que

$$\sum_{N_1}^{N_2-1} \varphi\left(\frac{r}{r_n}, p_n\right)$$

est inférieur à $C_2 e^X$, C_2 étant borné. Je dis que, si $x < X_1$, le produit $(X - x)y'$ est supérieur à un nombre qui tend vers h pour X infini.

En effet, puisque $\frac{y''}{y'^2}$ tend vers zéro, supposons X_0 assez grand pour que, si $x > X_0$,

$$h\frac{y''}{y'^2} < \frac{1}{2}.$$

Alors, $x + \frac{h}{y'}$ est croissant si $x > X_0$, et ne prend qu'une fois chaque valeur supérieure à X_0. Soit x'_1 le nombre tel que

$$x'_1 + \frac{h}{y'_1} = X \qquad [y'_1 = y'(x'_1)].$$

D'après

$$x'_1 + \frac{h}{Y'} < X \qquad (Y' > y'_1 \text{ d'après } x'_1 < X),$$

x'_1 est inférieur à X_1. Mais, d'une part, pour $x < x'_1$,

$$y'(X - x) > h.$$

Pour $x'_1 < x < X_1$,

$$y'(X - x) > y'_1(X - x'_1) > y'_1(X - X_1) = h\frac{y'_1}{Y'}.$$

Or, $\frac{Y'}{y'_1}$ tend vers 1, d'après la relation qui lie X à x'_1. En rapprochant de ceci le fait que $\frac{y'}{p}$ tend vers 1, on en conclut que h puis X_0 peuvent être pris assez grands pour que, si $X_0 < x < X_1$, $\varphi\left(\frac{r}{r_n}, p_n\right)$ puisse être remplacé par $\frac{1}{p}\left(\frac{r}{r_n}\right)^{p+1}\frac{1}{\frac{r}{r_n} - 1}$ avec une erreur relative inférieure à ε.

De même, $x - \frac{h}{y'}$ est toujours croissant et ne prend par suite qu'une

fois la valeur X. Si

$$x'_2 - \frac{h}{y'_2} = X \qquad [y'_2 = y'(x'_2)],$$

on a

$$x'_2 < X + \frac{h}{Y'}$$

et par suite, pour $x > X_2$,

$$(X - x)y' > h.$$

Nous pouvons donc supposer h et X_0 (limités inférieurement une première fois) assez grands pour que $\varphi\left(\frac{r}{r_n}, p_n\right)$ puisse être, à ε près, remplacé par $\frac{1}{p+1}\left(\frac{r}{r_n}\right)^{p+1}\frac{1}{1-\frac{r}{r_n}}$, si $x > X_2$. Nous écrivons donc

$$S_1 = (1 + \partial\varepsilon)\int_{X_0}^{X - \frac{h}{Y'}} e^{y - Y + (p+1)(X-x)} \frac{dx}{e^{X-x} - 1},$$

$$S_3 = (1 + \partial\varepsilon)\int_{X + \frac{h}{Y'}}^{\infty} e^{y - Y + (p+1)(X-x)} \frac{dx}{1 - e^{X-x}}.$$

Évaluons ces intégrales. Occupons-nous d'abord de S_3. Pour plus de commodité, désignons par $\varphi(x, X)$ les coefficients différentiels de S_1 et de S_3; φ est parfaitement déterminé selon qu'on suppose $x < X$ ou $x > X$.

78. Examinons l'intégrale

$$\int_{X + \frac{k}{\sqrt{Y''}}}^{\infty} \varphi(x, X)\,dx.$$

Montrons en particulier que, si $\sqrt{Y''}$ est limité inférieurement, cette intégrale est infiniment petite avec $\frac{1}{k}$.

Posons

$$\xi_1 = X + \frac{k}{\sqrt{Y''}}.$$

Soit X_0 un nombre tel que, pour $x > X'_0$,

$$y''\left(x + \frac{\theta k}{\sqrt{y''}}\right) : y''(x) = 1 + \delta\varepsilon, \qquad \delta^2 < 1.$$

Soient

$$\xi_2 = \xi_1 + \frac{k}{\sqrt{y''_1}}, \qquad \ldots, \qquad \xi_{n+1} = \xi_n + \frac{k}{\sqrt{y''_n}}, \qquad \ldots$$

avec

$$y''_n = y''(\xi_n).$$

Calculons

$$\Phi_n = \int_{\xi_n}^{\xi_{n+1}} e^{y - Y + y'(x - X)} \frac{dx}{1 - e^{X - x}}.$$

On a

$$\Phi_n > \int_{\xi_n}^{\xi_{n+1}} \varphi(x, X)\, dx,$$

d'après $y' < p + 1$.

On a, si

$$-\psi(x, X) = y - Y + y'(X - x),$$

$$\psi(x, X) = \psi(\xi_n, X) + \frac{\partial\psi(\xi, X)}{\partial\xi}(x - \xi_n),$$

ξ étant un nombre compris entre ξ_n et x.

D'après

$$\frac{\partial\psi(x, X)}{dx} = y''(x - X) \qquad \text{et} \qquad y''(\xi) = (1 + \delta\varepsilon) y''_n,$$

$$-\psi(x, X) = \eta_n - Y - y'_n(\xi_n - X) - (x - \xi_n)(\xi - X) y''_n (1 + \delta\varepsilon),$$

en posant $\eta_n = y(\xi_n)$.

D'ailleurs,

$$\xi - X = \xi_n - X + \theta(x - \xi_n).$$

Donc,

$$(x - \xi_n)(\xi - X) y''_n = (x - \xi_n)(\xi_n - X) y''_n + \theta(x - \xi_n)^2 y''_n,$$

et, en supprimant dans $-\psi(x, X)$ le terme négatif $-\theta(x - \xi_n)^2 y''_n$ qui est d'ailleurs supérieur à $-k^2$,

$$\Phi_n < \frac{e^{\eta_n - Y - y'_n(\xi_n - X)}}{1 - e^{X - \xi_n}} \int_{\xi_n}^{\xi_{n+1}} e^{-(x - \xi_n)(\xi_n - X) y''_n (1 - \varepsilon)}\, dx.$$

Si

$$(\xi_n - X) y''_n (1 - \varepsilon) = B,$$

l'intégrale qui figure au second membre est égale à $\frac{1}{B}(1 - e^{-B(\xi_{n+1} - \xi_n)})$.
D'après $1 - e^{-u} < u$, quel que soit u, ceci est inférieur à

$$\xi_{n+1} - \xi_n = \frac{k}{\sqrt{y''_n}}.$$

Cette expression simplifiée sera assez exacte si $Y'' > 1$. Mais, si $Y'' < 1$, nous remarquons que

$$B(\xi_{n+1} - \xi_n) = k(\xi_n - X)\sqrt{y''_n}(1 - \varepsilon) > k^2(1 - 2\varepsilon).$$

En tous cas,

$$\Phi_n < \frac{k}{\sqrt{y''_n}} \frac{e^{y_n - Y - y'_n(\xi_n - X)}}{1 - e^{X - \xi_n}} = \psi_n.$$

Totalisons $\psi_1 + \ldots + \psi_n$ et pour cela faisons le rapport de chaque terme au précédent. Le rapport $\frac{\psi_{n+1}}{\psi_n}$ est égal au produit de plusieurs rapports : d'abord $\frac{\sqrt{y''_n}}{\sqrt{y''_{n+1}}} < \sqrt{1 + \varepsilon}$; en second lieu $\frac{1 - e^{X - \xi_n}}{1 - e^{X - \xi_{n+1}}} < 1$; enfin, $e^{\psi(\xi_n, X) - \psi(\xi_{n+1}, X)}$. L'exposant de e est égal à $\psi'_\xi(\xi, X)(\xi_{n+1} - \xi_n)$, ξ étant compris entre ξ_n et ξ_{n+1}. Or,

$$\psi'_x = y''(x - X), \qquad y''(\xi) = y''_n(1 + \theta\varepsilon), \qquad \xi' - X > \xi_n - X.$$

L'exposant de e est donc inférieur à $-k(1 - \varepsilon)\sqrt{y''_n}(\xi_n - X)$. En résumé,

$$\frac{\psi_{n+1}}{\psi_n} < \sqrt{1 + \varepsilon}\, e^{-k(1 - \varepsilon)\sqrt{y''_n}(\xi_n - X)}.$$

D'ailleurs

$$\xi_n - X > \xi_n - \xi_{n-1} > \frac{k}{\sqrt{y''_{n-1}}} > \frac{k}{(1 + \varepsilon)\sqrt{y''_n}}$$

(si $n = 1$, nous remplaçons ξ_{n-1} par X et y''_{n-1} par Y''). Donc

$$\frac{\psi_{n+1}}{\psi_n} < \sqrt{1 + \varepsilon}\, e^{-k^2 \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}}.$$

En réalité, un raisonnement analogue à celui qui nous a montré

$$\lim \frac{y''}{y'^2} = 0$$

donnerait, pour limite supérieure du rapport $\frac{\psi_{n+1}}{\psi_n}$, $\sqrt{1 + \varepsilon\, e^{-\frac{k^2}{\varepsilon}}}$; mais le résultat que nous avons nous suffit. Si $\varepsilon < \frac{1}{2}$, et si $2e^{-\frac{k^2}{3}} < \frac{1}{2}$, le rapport $\frac{\psi_{n+1}}{\psi_n}$ sera inférieur à $\frac{1}{2}$. Donc, la série $\psi_1 + \psi_2 + \ldots$ a ses termes inférieurs à ceux d'une progression géométrique de raison $\frac{1}{2}$. Elle ne diffère que par un facteur inférieur à 2 de son premier terme

$$\frac{k}{\sqrt{y''_1}} \frac{e^{\eta_1 - Y - y'_1(\xi_1 - X)}}{1 - e^{X - \xi_1}}.$$

La convergence de S_3 est ainsi démontrée. Évaluons

$$\eta_1 - Y - y'_1(\xi_1 - X).$$

On a, si $x \leqq X + \frac{k}{\sqrt{Y''}}$,

$$y - Y = Y'(x - X) + \frac{Y''}{2}(x - X)^2(1 + \delta\varepsilon),$$

$$y' = Y' + Y''(x - X)(1 + \delta\varepsilon).$$

Donc

$$y - Y + y'(X - x) = -(x - X)^2 \frac{Y''}{2}(1 + 3\delta\varepsilon),$$

et enfin

$$\eta_1 - Y - y'_1(\xi_1 - X) = -\frac{k^2}{2}(1 + 3\delta\varepsilon).$$

Donc,

$$\psi_1 + \psi_2 + \ldots < 2\frac{k}{\sqrt{Y''}} \frac{e^{-\frac{k^2}{2}(1 - 3\varepsilon)}}{1 - e^{-\frac{k}{\sqrt{Y''}}}}.$$

Si alors $\sqrt{Y''} > 1$, il est manifeste que le second membre est borné et arbitrairement petit en même temps que $\frac{1}{k}$. Si $\sqrt{Y''} < 1$, nous voyons en tous cas que le second membre peut être supposé arbitrairement petit relativement à $\frac{1}{\sqrt{Y''}}$.

79. Évaluons de même dans quelle mesure il est loisible de remplacer S_1 par

$$\int_{X-\frac{k}{\sqrt{Y''}}}^{X-\frac{h}{\sqrt{Y''}}} \varphi(x, X)\,dx.$$

Nous avons vu que $x\sqrt{y''}$ croît indéfiniment avec x. De là résulte que le nombre $x - \frac{A}{\sqrt{y''}}$, quel que soit A fixe, s'éloigne indéfiniment avec x. Car, si $y'' > 1$, il est supérieur à $x - A$, qui croît indéfiniment. Si $y'' < 1$, il est supérieur à $x\sqrt{y''} - A$ qui croît aussi indéfiniment.

Examinons

$$R_1 = \int_{X_0}^{X-\frac{k}{\sqrt{Y''}}} \varphi(x, X)\,dx.$$

Nous augmentons cette intégrale en y remplaçant $p + 1$ par $y' + 1$. Posons

$$\xi_{-1} = X - \frac{k}{\sqrt{Y''}}, \qquad \ldots, \qquad \xi_{-n-1} = \xi_{-n} - \frac{k}{\sqrt{y''_{-n}}}, \qquad \ldots,$$

avec

$$y''_{-n} = y''(\xi_{-n}).$$

Si

$$x < \xi_{-1}, \qquad \frac{e^{X-x}}{e^{X-x}-1} < \frac{e^{\frac{k}{\sqrt{Y''}}}}{e^{\frac{k}{\sqrt{Y''}}}-1},$$

$$R_1 < \frac{e^{\frac{k}{\sqrt{Y''}}}}{e^{\frac{k}{\sqrt{Y''}}}-1} \int_{x_0}^{X-\frac{k}{\sqrt{Y''}}} e^{y-Y+y'(X-x)}\,dx.$$

Posons

$$\chi_{-n} = \int_{\xi_{-n-1}}^{\xi_{-n}} e^{-\psi(x,X)}\,dx.$$

Si

$$\xi_{-n-1} < x < \xi_{-n},$$

$$y - Y + y'(X - x) = \eta_{-n} - Y + y'_{-n}(X - \xi_{-n}) + (x - \xi_{-n})(X - \xi')\,y''(\xi')$$

avec

$$x < \xi' < \xi_{-n},$$

et d'après

$$X - \xi' = X - \xi_{-n} + \theta(\xi_{-n} - x),$$

$$\begin{aligned} & y - Y + y'(X - x) \\ & \quad = -\psi(\xi_{-n}, X) + y''_{-n}(x - \xi_{-n})(X - \xi_{-n})(1 + \delta\varepsilon) - \theta k^2(1 + \delta\varepsilon). \end{aligned}$$

Donc

$$\chi_{-n} < e^{-\psi(\xi_{-n}, X)} \int_{\xi_{-n-1}}^{\xi_{-n}} e^{B_{-n}(x - \xi_{-n})}\, dx$$

avec

$$B_{-n} = y''_{-n}(1 - \varepsilon)(X - \xi_{-n}).$$

L'intégrale est égale à

$$\frac{1}{B_{-n}}\left[1 - e^{-B_{-n}(\xi_{-n} - \xi_{-n-1})}\right]$$

qui est inférieur à

$$\xi_{-n} - \xi_{-n-1} = \frac{k}{\sqrt{y''_{-n}}}.$$

On voit comme ci-dessus que la série $\chi_{-1} + \chi_{-2} + \ldots + \chi_{-n_0+1} + \chi'_{-n_0}$ $\left(\text{si } \xi_{-n_0-1} \leqq x_0 < \xi_{-n_0} \text{ et si } \chi'_{-n_0} = \int_{x_0}^{\xi_{-n_0}}\right)$ a ses termes inférieurs à ceux d'une progression géométrique de raison inférieure à un nombre fixe, soit $\frac{1}{2}$, inférieur à 1.

Elle est donc de l'ordre de son premier terme qui est inférieur à

$$\frac{k}{\sqrt{Y''}} e^{-\eta_{-1} - Y + y'_{-1}(\xi_{-1} - X)} = \frac{k}{\sqrt{Y''}} e^{-\frac{k^2}{2}(1 - 3\delta\varepsilon)}.$$

Donc

$$R_1 < \frac{k}{\sqrt{Y''}} e^{-\frac{k^2}{2}(1 - 3\varepsilon)} \frac{1}{1 - e^{-\frac{k}{\sqrt{Y''}}}}.$$

R_1 est borné et arbitrairement petit avec $\frac{1}{k}$, si $\sqrt{Y''} > 1$. Si $Y'' < 1$, R_1 est arbitrairement petit avec $\frac{1}{k}$, relativement à $\frac{1}{\sqrt{Y''}}$.

80. Évaluons maintenant

$$I_1=\int_{X-\frac{k}{\sqrt{Y''}}}^{X-\frac{h}{Y'}}\varphi(x,X)\,dx \qquad \text{et} \qquad I_3=\int_{X+\frac{h}{Y'}}^{X+\frac{k}{\sqrt{Y''}}}\varphi(x,X)\,dx.$$

Nous avons, à partir d'une certaine valeur de X,

$$y''=Y''(1+\delta\varepsilon),$$

quand x varie de $X-\frac{k}{\sqrt{Y''}}$ à $X+\frac{k}{\sqrt{Y''}}$. D'après

$$p+1=y'+\theta,$$

θ étant positif et inférieur *ou égal* à 1, comme

$$y-Y+y'(X-x)=-\frac{Y''}{2}(x-X)^2(1+\delta\varepsilon),$$

nous trouvons, en faisant le changement de variable $X-x=u$ dans I_1 et $x-X=u$ dans I_3,

$$I_1=\int_{\frac{h}{Y'}}^{\frac{k}{\sqrt{Y''}}}e^{-\frac{Y''}{2}(1+\delta\varepsilon)u^2+\theta u}\frac{du}{e^u-1}$$

et

$$I_3=\int_{\frac{h}{Y'}}^{\frac{k}{\sqrt{Y''}}}e^{-\frac{Y''}{2}(1+\delta\varepsilon)u^2-\theta u}\frac{du}{1-e^{-u}}.$$

L'une et l'autre intégrales sont comprises entre

$$J=\int_{\frac{h}{Y'}}^{\frac{k}{\sqrt{Y''}}}e^{-\frac{Y''}{2}(1-\varepsilon)u^2}\frac{du}{1-e^{-u}} \qquad \text{et} \qquad J'=\int_{\frac{h}{Y'}}^{\frac{k}{\sqrt{Y''}}}e^{-\frac{Y''}{2}(1+\varepsilon)u^2}\frac{du}{e^u-1}.$$

81. *Supposons d'abord* $Y''>1$. — Afin de mettre en évidence la partie principale de l'élément différentiel de J et de J' au voisinage de $u=0$, j'écris

$$\frac{1}{1-e^{-u}}=\frac{1}{u}+\frac{u-1+e^{-u}}{u(1-e^{-u})} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{e^u-1}=\frac{1}{u}+\frac{u+1-e^u}{u(e^u-1)}.$$

On a

$$J = J_0 + J_1,$$

en posant

$$J_0 = \int_{\frac{h}{Y'}}^{\frac{k}{\sqrt{Y''}}} e^{-\frac{Y''}{2}(1-\varepsilon)u^2} \frac{du}{u}, \qquad J_1 = \int_{\frac{h}{Y'}}^{\frac{k}{\sqrt{Y''}}} e^{-\frac{Y''}{2}(1-\varepsilon)u^2} \frac{u - 1 + e^{-u}}{u(1-e^{-u})} du.$$

La seconde intégrale est bornée puisque

$$u < \frac{k}{\sqrt{Y''}} < k.$$

La première, par le changement de variable

$$\frac{Y''}{2}(1-\varepsilon)u^2 = v^2,$$

devient

$$J_0 = \int_{h\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{2}}\frac{\sqrt{Y''}}{Y'}}^{k\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{2}}} e^{-u^2} \frac{du}{u} = L\frac{Y'}{\sqrt{Y''}} + C_0,$$

C_0 étant borné en même temps que h, indépendamment de k.

J' est comme J égal à $L\frac{Y'}{\sqrt{Y''}} + C'$, C' étant borné. Comme I_1 et I_3 sont compris entre J et J', I_1 et I_3 ont pour valeur asymptotique

$$L\frac{Y'}{\sqrt{Y''}}.$$

Remarquons que la condition $Y'' > 1$ peut être réalisée avec des croissances telles que $y = ax^2$, a étant constant. Cette fois, nous n'avons pas de terme hétérogène, ni indépendant de la répartition des zéros (comme $X^{1+\alpha}$) pour des croissances même égales à celle de ax^2, tandis que ces termes hétérogènes figuraient déjà pour la croissance $y = e^x$ avec le seul secours des hypothèses du Chapitre II.

82. *Supposons en second lieu* $Y' < 1$. — Le calcul présente plus de difficultés.

Prenons la première intégrale J. Pendant que sa limite inférieure $\frac{h}{Y'}$ tend vers zéro, sa limite supérieure $\frac{h}{\sqrt{Y''}}$ prend des valeurs arbitrairement grandes (si elle pouvait être bornée, les calculs faits pour $Y'' > 1$ seraient évidemment valables). Nous décomposons J en $J_0 = \int_{\frac{h}{Y'}}^{1}$ et $J_1 = \int_{1}^{\frac{k}{\sqrt{Y''}}}$.
Dans l'intervalle d'intégration de J_0, nous écrivons

$$\frac{1}{1-e^{-u}} = \frac{1}{u} + \frac{u-1+e^{-u}}{u(1-e^{-u})},$$

et dans celui de J_1,

$$\frac{1}{1-e^{-u}} = 1 + \frac{e^{-u}}{1-e^{-u}}.$$

Chacune des intégrales J_0 et J_1 se trouve décomposée en deux autres que nous écrirons J_{00} et J_{01}, J_{10} et J_{11}. On a

$$J_{00} = \int_{\frac{h}{Y'}}^{1} e^{-\frac{Y''}{2}(1-\varepsilon)u^2} \frac{du}{u} = \int_{h\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{2}}\frac{\sqrt{Y''}}{Y'}}^{\sqrt{\frac{2}{(1-\varepsilon)Y''}}} e^{-u^2} \frac{du}{u}.$$

Si l'on sépare, dans J_{00} dont la limite inférieure est infiniment petite, les deux limites par $\sqrt{\frac{2}{1-\varepsilon}}$, la valeur de la première partie J_{000} s'obtient en remplaçant e^{-u^2} par $1-(1-e^{-u^2})$ et l'on trouve

$$L\frac{Y'}{\sqrt{Y''}} + C_{000},$$

C_{000} étant borné.

La valeur de la seconde partie

$$J_{001} = \int_{\sqrt{\frac{2}{1-\varepsilon}}}^{\sqrt{\frac{2}{(1-\varepsilon)Y''}}} e^{-u^2} \frac{du}{u}$$

est bornée par

$$C_{001} = \int_{\sqrt{2}}^{\infty} e^{-u^2} \frac{du}{u}.$$

Finalement,

$$J_{00} = L\frac{Y'}{\sqrt{Y''}} + C_{00},$$

C_{00} étant borné.

On a

$$J_{01} = \int_{\frac{h}{Y'}}^{1} e^{-\frac{Y''}{2}(1-\varepsilon)u^2}\frac{u-1+e^{-u}}{u(1-e^{-u})}du < \int_0^1 \frac{u-1+e^{-u}}{u(1-e^{-u})}du,$$

qui existe et a une certaine valeur numérique C_{01}.

Donc

$$J_0 = J_{00} + J_{01} = L\frac{Y'}{\sqrt{Y''}} + C_0,$$

C_0 étant borné.

Évaluons

$$J_1 = \int_1^{\frac{k}{\sqrt{Y''}}} e^{-\frac{Y''}{2}(1-\varepsilon)u^2}\left(1 + \frac{e^{-u}}{1-e^{-u}}\right)du,$$

qui se décompose en J_{10} et J_{11}. On a

$$J_{10} = \int_1^{\frac{k}{\sqrt{Y''}}} e^{-Y''\frac{1-\varepsilon}{2}u^2}du,$$

intégrale qui n'est altérée que d'une quantité bornée si je lui donne zéro pour limite inférieure. Donc

$$J_{10} = \sqrt{\frac{2}{Y''(1-\varepsilon)}}\int_0^{k\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{2}}} e^{-u^2}du + \gamma_{1.0} \qquad (\gamma_{1.0} \text{ borné}).$$

Le coefficient de $\sqrt{\frac{2}{Y''}}$ diffère, si k a été choisi assez grand, arbitrairement peu de $\int_0^\infty e^{-u^2}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Il reste

$$J_{10} = \sqrt{\frac{\pi}{2Y''}}(1 + 2\delta\varepsilon) + C_{1.0} \qquad (\delta^2 < 1).$$

Enfin

$$J_{11} = \int_1^{\frac{k}{\sqrt{Y''}}} e^{-\frac{Y''}{2}(1-\varepsilon)u^2}\frac{e^{-u}}{1-e^{-u}}du < \frac{1}{1-\frac{1}{e}}\int_1^\infty e^{-u}du.$$

Donc

$$J_1 = J_{1.0} + J_{1.1} = (1 + 3\delta\varepsilon)\sqrt{\frac{\pi}{2Y''}},$$

δ^2 étant inférieur à 1 à partir d'une certaine valeur de X.

Finalement,

$$J = J_0 + J_1 = (1 + 4\delta\varepsilon)\left(LY' + \sqrt{\frac{\pi}{2Y''}}\right),$$

en supprimant dans la parenthèse $L\frac{1}{\sqrt{Y''}}$ qui est positif et négligeable devant $\frac{1}{\sqrt{Y''}}$.

La formule

$$(1 + 2\delta'\varepsilon)\left(L\frac{Y'}{\sqrt{Y''}} + \sqrt{\frac{\pi}{2Y''}}\right)$$

représenterait aussi bien J dans le premier cas, puisque $\frac{1}{\sqrt{Y''}}$ est alors borné.

Étudions maintenant

$$J' = \int_{\frac{h}{Y'}}^{\frac{k}{\sqrt{Y''}}} e^{-\frac{Y''}{2}(1-\varepsilon)u^2}\frac{du}{e^u - 1}.$$

Je décompose J' en $J'_0 = \int_{\frac{h}{Y'}}^{1}$ et $J'_1 = \int_{1}^{\frac{k}{\sqrt{Y''}}}$. J'_1 est borné et inférieur à $\int_1^\infty \frac{du}{e^u - 1}$. J'_0 est égal à $LY' + C'_0$. Donc

$$J' = LY' + C',$$

C' étant borné.

Donc ici les deux expressions asymptotiques des limites J et J' de S_1 et S_3 diffèrent, tout au moins d'aspect. Elles ne coïncident que si $\frac{1}{\sqrt{Y''}}$ est infiniment petit relativement à LY'.

Soit $y = \frac{x^2}{(Lx)^{2+\alpha}}$, α étant fixe. Si $\alpha < 0$, LY' est prépondérant relativement à $\frac{1}{\sqrt{Y''}}$, et l'expression asymptotique de J et de J' est LY'.

Si $\alpha > 0$, c'est au contraire $\frac{1}{\sqrt{Y''}}$ qui prédomine dans J et la valeur asymptotique reste à préciser, d'autant plus que les termes correspondant à des valeurs de x telles que $|x - X| > \frac{k}{\sqrt{Y''}}$ qui peuvent être supposés négligeables, à ε près, à l'égard de $\frac{1}{\sqrt{Y''}}$ ne le sont plus nécessairement à l'égard de LY'. Ici, il n'y a pas d'expression asymptotique à forme analytique unique. On montrerait facilement que, le terme en $\frac{1}{\sqrt{Y''}}$ est exact si y' est voisin d'une valeur entière, tandis que, si y' est suffisamment voisin d'un multiple impair de $\frac{1}{2}$, il ne doit rester que LY'. Ceci concerne les croissances de r_n telles que

$$r_n = (\log n)^{A\sqrt{\log n}},$$

A croissant indéfiniment.

83. En résumé, $2S_1$, $2S_3$ *et par suite* $\Pi(X)$ *ont pour expression asymptotique :*

1° Si $Y'' > 1$,

$$e^Y L \frac{Y'^2}{Y''};$$

2° Si $Y'' < 1$,

$$e^Y\left(LY'^2 + \theta\sqrt{\frac{2\pi}{Y''}}\right), \qquad \text{avec} \qquad 0 < \theta < 1,$$

sans qu'on puisse, d'après les calculs précédents, préciser autrement la valeur de θ qui doit certainement osciller jusqu'à ces limites quand X croît indéfiniment.

84. *Limite inférieure du module maximum d'un produit canonique.* — Donnons une limite inférieure du module maximum du produit $F(z)$. Cette limite est, d'après le théorème de M. Jensen, $\frac{r^N}{r_1 r_2 \ldots r_N}$, si $r_N \leq r < r_{N+1}$. Donc

$$M(r) > N \log r - \log r_1 - \ldots - \log r_N.$$

Supposons que la suite $y(n)$ fonction de la suite $x(n)$ soit interpolée par une fonction $y(x)$ satisfaisant à l'hypothèse A. S'il n'en était pas ainsi, on substituerait à la fonction $y(n)$ une autre fonction moins croissante et jouissant des propriétés invoquées, comme il a été expliqué au début du Chapitre II, et c'est cette fonction qui serait désignée par $y(x)$. Soient Y la valeur correspondant à X et N la partie entière de e^{Y}. On a, *a fortiori*,

$$M(r) > NX - \int_{1}^{N} x\,dn - \theta[X - x(1)].$$

En remplaçant N par $e^{Y} - \theta_1$, et en remarquant que $\int_{N}^{e^{Y}} x\,dn = \theta_2 X$, il vient

$$M > e^{Y} X - \int_{1}^{e^{Y}} x\,dn - 2\delta X + h \qquad (h \text{ étant borné}).$$

D'après

$$\int_{1}^{e^{Y}} x\,dn = (nx)_{x_0}^{X} - \int_{x_0}^{X} n\,dx,$$

en posant

$$x(1) = x_0,$$

il reste

$$M > \int_{x_0}^{X} e^{y}\,dx - 2\delta X + h.$$

Or, nous savons que, si $x < X$,

$$Y - y + (P + 1 - \alpha)(x - X) < 0,$$

ou

$$y > Y - (P + 1 - \alpha)(X - x).$$

Donc

$$\int_{x_0}^{X} e^{y}\,dx > e^{Y} \int_{x_0}^{X} e^{-(P+1-\alpha)(X-x)}\,dx = \frac{e^{Y}}{P + 1 - \alpha}\left(1 - e^{-(P+1-\alpha)(X-x_0)}\right).$$

Le rapport de cette dernière expression à $\frac{e^{Y}}{P}$ tend vers 1 quand X croît

indéfiniment. Donc, pourvu que $\frac{n}{px}$ soit infiniment grand,

$$M(r) > \frac{N}{P}(1 - \varepsilon).$$

Si l'on suppose que le point X, Y passe successivement par toutes les positions $x(n)$, $y(n)$, les fonctions Y utilisées pour chercher une limite supérieure et une limite inférieure de M(X) sont les mêmes, et cette limite inférieure s'écrit $\frac{n}{p}$.

85. *Tolérance dans le choix de p.* — Nous avons défini p par la relation $p + \omega = y'$, avec $0 \leqq \omega < 1$. En réalité, le choix de p comporte plus d'arbitraire, sans que l'on modifie l'ordre de grandeur de $\sum_1^\infty \varphi\left(\frac{r}{r_n}, p_n\right)$ et sans que Π_1 et Π_2 cessent d'être du même ordre de grandeur.

Supposons p croissant, mais simplement assujetti aux inégalités $p \leqq y' + \lambda\sqrt{y''}$, et $p + 1 > y' - \lambda\sqrt{y''}$.

Nous allons voir (en supposant $Y'' > 1$) que λ peut être pris quelconque, arbitrairement grand positif, s'il est fixe.

Les intégrales I_1 et I_3 sont comprises entre

$$J = \int_{\frac{h}{Y'}}^{\frac{k}{\sqrt{Y''}}} e^{-\frac{Y''}{2}(1-\varepsilon)u^2 + \lambda\sqrt{Y''}u} \frac{du}{1 - e^{-u}}$$

et

$$J' = \int_{\frac{h}{Y'}}^{\frac{k}{\sqrt{Y''}}} e^{-\frac{Y''}{2}(1+\varepsilon)u^2 - \lambda\sqrt{Y''}u} \frac{du}{e^u - 1}.$$

Dans J, nous remplaçons $\frac{1}{1 - e^{-u}}$ par $\frac{1}{u} + \frac{1 - u - e^{-u}}{u(1 - e^{-u})}$. Nous décomposons J en deux intégrales J_0 et J_1. On a

$$J_0 = \int_{\frac{h}{Y'}}^{\frac{k}{\sqrt{Y''}}} e^{-\frac{Y''}{2}(1-\varepsilon)u^2 + \lambda\sqrt{Y''}u} \frac{du}{u} = \int_{h\frac{\sqrt{Y''}}{Y'}}^{k} e^{-\frac{(1-\varepsilon)}{2}v^2 + \lambda v} \frac{dv}{v},$$

λ étant fixe,

$$J_0 = L\frac{Y'}{\sqrt{Y''}} + C_0,$$

C_0 étant borné. De même

$$J_1 = \int_{\frac{h}{Y'}}^{\frac{k}{\sqrt{Y''}}} e^{-\frac{Y''}{2}(1-\varepsilon)u^2 + \lambda\sqrt{Y''}u}\, \frac{1 - u e^{-u}}{u(1 - e^{-u})}\, du$$

est borné en même temps que k, λ étant fixe.

On démontre exactement de même que l'expression asymptotique de J' est encore $L\frac{Y'}{\sqrt{Y''}}$.

Pour être assurés que S_1 et S_3 ont encore la même expression asymptotique, il faudrait montrer que

$$\int_{X + \frac{k}{\sqrt{Y''}}}^{\infty} e^{y - Y + (y' - \lambda\sqrt{y''})(X - x)}\, \frac{dx}{1 - e^{x - X}}$$

et la quantité analogue relative à S_1 sont infiniment petites relativement à $L\frac{Y'}{\sqrt{Y''}}$. La démonstration ne présente aucune difficulté nouvelle. Il n'en serait pas de même si l'on voulait envisager des valeurs infiniment grandes de λ, par exemple la valeur $\sqrt{2\,L_2\frac{Y'}{\sqrt{Y''}}}$ qui laisse à J et J' les mêmes expressions asymptotiques.

Enfin, il convient de rappeler que les intégrales qui remplacent S_1 et S_3 ont été obtenues avec l'hypothèse que $\frac{y'}{p}$ tend vers 1. Si

$$p = y' + \delta\lambda\sqrt{y''},$$

$\frac{y'}{p}$ tend vers 1, si λ est borné, puisque $\frac{\sqrt{y''}}{y'}$ tend vers zéro.

86. *Zéros dont la répartition n'influe pas sur le module maximum.* — Cherchons, pour les produits dont les zéros ont des modules satisfaisant à l'hypothèse B, hors de quelles limites toutes les variations possibles des arguments des zéros sont sans influence sur le module

maximum du produit canonique $F(z)$. Ce module maximum est certainement supérieur à $\frac{e^Y}{Y^7}$. Si donc

$$\int_{X_0}^{\xi_1} \varphi(x, X)\, dx$$

et

$$\int_{\xi_2}^{\infty} \varphi(x, X)\, dx$$

sont infiniment petits à l'égard de $\frac{1}{Y^7}$, comme ces expressions changées de signes limitent inférieurement, avec une erreur infiniment petite, le logarithme total du module des facteurs dont les zéros correspondent à des x inférieurs à ξ_1 ou supérieurs à ξ_2, ξ_1 et ξ_2 seront de part et d'autre de X les limites cherchées aux logarithmes des modules des zéros.

Posons

$$-\psi_{n+1} = \eta_{n+1} - Y + y'_{n+1}(X - \xi_{n+1});$$

en posant

$$\xi_1 = X + \frac{k}{\sqrt{Y''}}, \qquad \dots, \qquad \xi_{n+1} = \xi_n + \frac{k}{\sqrt{y''_n}}, \qquad \dots.$$

L'erreur commise en arrêtant la somme $\Phi_1 + \Phi_2 + \dots$ (*voir* p. 116) au terme Φ_n est inférieure, à un facteur borné près, à

$$\frac{k}{\sqrt{y''_{n+1}}} \frac{e^{-\psi_{n+1}}}{1 - e^{X - \xi_{n+1}}}.$$

Calculons ψ_{n+1}. On a

$$\eta_{n+1} = \eta_n + y'_n(\xi_{n+1} - \xi_n) + \frac{y''_n}{2}(1 + \delta\varepsilon)(\xi_{n+1} - \xi_n)^2,$$

$$y'_{n+1} = y'_n + y''_n(1 + \delta\varepsilon)(\xi_{n+1} - \xi_n).$$

Donc

$$-\psi_{n+1} = -\psi_n + \frac{k^2}{2}(1 + \delta\varepsilon) - k\sqrt{y''_n}(1 + \delta\varepsilon)(X - \xi_{n+1})$$

$$= -\psi_n - \frac{k^2}{2}(1 + 3\delta\varepsilon) - k\sqrt{y''_n}(1 + \delta\varepsilon)(X - \xi_n).$$

Donc, d'après $\psi_0 = 0$, si $\xi_0 = X$, et

$$X - \xi_n = k\left(\frac{1}{\sqrt{Y''}} + \frac{1}{\sqrt{y''_1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{y''_{n-1}}}\right),$$

$$-\psi_{n+1} = -n\frac{k^2}{2}(1+3\delta\varepsilon) - k^2(1+\delta\varepsilon)$$

$$\times\left[\sqrt{y''_n}\left(\frac{1}{\sqrt{Y''}} + \frac{1}{\sqrt{y''_1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{y''_{n-1}}}\right)\right.$$

$$\left. + \sqrt{y''_{n-1}}\left(\frac{1}{\sqrt{Y''}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{y''_{n-2}}}\right) + \ldots + \sqrt{y''_1}\frac{1}{\sqrt{Y''}}\right].$$

Supposons que

(2) $$\sqrt{y''_{n-1}}\left(\frac{1}{\sqrt{Y''}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{y''_{n-2}}}\right) + \ldots + \sqrt{y''_1}\frac{1}{\sqrt{Y''}} < \frac{LY'}{k^2(1-\varepsilon)}$$

$$\leq \sqrt{y''_n}\left(\frac{1}{\sqrt{Y''}} + \ldots\right) + \ldots + \sqrt{y''_1}\frac{1}{\sqrt{Y''}}.$$

Alors, la somme $\sum_{n+1}^{\infty} \Phi_p$ est inférieure à

$$\frac{k}{\sqrt{y''_{n+1}}}\,\frac{e^{-n\frac{k^2}{2}(1-3\varepsilon)}}{1-e^{X-\xi_n}}\,\frac{1}{Y'}.$$

Or, limitons inférieurement $\alpha_{n+1} = \sqrt{y''_{n+1}}(1 - e^{X-\xi_n})$. Si $y''_{i+1} = t_i^2 y''_i$, cette expression est égale à

$$\sqrt{Y''}\,t_1 t_2 \ldots t_n\left[1 - e^{-\frac{k}{\sqrt{Y''}}\left(1 + \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_1 t_2} + \ldots + \frac{1}{t_1 \ldots t_n}\right)}\right].$$

Or, on se rend compte aisément que $x\left(1 - e^{-\frac{A}{x}B}\right)$ est croissant avec x, si A et B sont positifs. Le minimum de l'expression est donc pour

$$t_i = 1 - \varepsilon' = \sqrt{1-\varepsilon}$$

et il est égal à

$$\sqrt{Y''}(1-\varepsilon')^n\left[1 - e^{-\frac{k}{\sqrt{Y''}}\frac{(1-\varepsilon')^{n-1}}{\varepsilon'}(1-\varepsilon')}\right].$$

Cette expression varie dans le même sens que Y''. Si $Y'' > 1$, et si $e^{-\frac{k^2}{2}(1-3\varepsilon)} < 2(1-\varepsilon')$, la somme $\sum_{n+1}^{\infty} \Phi_p$ sera inférieure à $\frac{1}{Y'}$. Si $Y'' < 1$, nous prendrons dans les inégalités (2) le terme médian égal à $L\frac{Y'}{\sqrt{Y''}}$;

alors

$$\sum_{n+1}^{\infty} \Phi_p < \frac{k\sqrt{Y''}}{Y'} \alpha_{n+1} e^{-n\frac{k^2}{2}} < \frac{1}{Y'} k e^{-n\frac{k^2}{2}} (1-\varepsilon')^{-\frac{n}{2}} (1+\theta\varepsilon),$$

qui est inférieur à $\frac{1}{Y'}$, si k est choisi convenablement.

Reprenons l'inégalité (2). On a, la notation $E(u)$ au second membre signifiant que le premier est inférieur à u pour n, et supérieur à u pour $n+1$,

$$(2') \quad t_1 t_2 \ldots t_n \left(1 + \frac{1}{t_1} + \ldots + \frac{1}{t_1 \ldots t_{n-1}}\right) + t_1 \ldots t_{n-1} \left(1 + \ldots + \frac{1}{t_1 \ldots t_{n-2}}\right) + \ldots + t_1 t_2 \left(1 + \frac{1}{t_1}\right) + t_1 = E\left(\frac{LY'}{k^2}\right)$$

et

$$(3) \qquad \xi_n - X = \frac{k}{\sqrt{Y''}} \left(1 + \frac{1}{t_1} + \ldots + \frac{1}{t_1 \ldots t_{n-1}}\right).$$

Le premier membre de $(2')$ croît avec chaque t_i, et le second membre de (3) décroît.

Soient N la valeur de n telle que $t_i = 1 - \varepsilon' = \sqrt{1-\varepsilon}$, et ξ_N la valeur de ξ_n correspondante. Si certains t_i sont supérieurs à $1-\varepsilon'$, la valeur de n correspondante est certainement inférieure à N, le second membre de (3) contient moins de termes, et ceux qu'il contient sont inférieurs aux termes de même rang de x_N. Donc, pour avoir le maximum de $\xi_n - X$ (en même temps que celui de n), je fais $t_i = 1 - \varepsilon'$. Le premier membre de l'équation $(2')$ devient

$$\frac{(1-\varepsilon') - (1-\varepsilon')^{n+1}}{\varepsilon'} + \frac{(1-\varepsilon') - (1-\varepsilon')^{n}}{\varepsilon'} + \ldots + \frac{(1-\varepsilon') - (1-\varepsilon')^{3}}{\varepsilon'}$$
$$= n\frac{1-\varepsilon'}{\varepsilon'} - \frac{(1-\varepsilon')^2 - (1-\varepsilon')^{n+2}}{\varepsilon'^2}.$$

Donc N a pour partie principale : $\frac{\varepsilon'}{1-\varepsilon'} \frac{LY'}{k^2}$, à un facteur près tendant vers 1. Alors

$$x_N - X = \frac{k}{\sqrt{Y''}} \frac{(1-\varepsilon')^{-N} - 1}{\varepsilon'} (1-\varepsilon') = \frac{k(1-\varepsilon')}{\varepsilon'\sqrt{Y''}} e^{\varepsilon' N(1+\delta\varepsilon')},$$

δ^2 étant inférieur à 1, si N est assez grand,

$$x_N - X = \frac{k}{\varepsilon'} \frac{1}{\sqrt{Y''}} e^{\frac{\varepsilon'^2}{k^2} LY'(1+3\delta\varepsilon')}.$$

Si je donne à k une valeur arbitraire fixe, et à $\frac{\varepsilon}{k}$ une valeur α aussi petite que je veux,

$$\xi_N - X = \frac{1}{\alpha}\frac{Y'^{\alpha}}{\sqrt{Y''}} < \frac{Y'^{2\alpha}}{\sqrt{Y''}},$$

dès que X dépasse une certaine valeur. Donc

$$\xi_n - X < \frac{Y'^{\varepsilon}}{\sqrt{Y''}}.$$

On trouverait que les nombres ξ_{-n} limitant inférieurement les valeurs de x qui peuvent influer sur le maximum de $|F(z)|$ sont supérieurs à $X - \frac{Y'^{\varepsilon}}{\sqrt{Y''}}$.

Donc, *seuls peuvent influer sur la valeur du maximum de* $F(z)$ *les zéros tels que* $|x - X| < \frac{Y'^{\varepsilon}}{\sqrt{Y''}}$.

Si l'on suppose que Y'' croisse constamment, la valeur de N s'obtient en faisant $t_i = 1$ dans l'égalité (2'). On trouve

$$N = \sqrt{\frac{[2+\eta(x)]\,LY'}{k}} \qquad \text{et} \qquad |\xi_n - X| < \frac{\sqrt{(2+\varepsilon)\,LY'}}{\sqrt{Y''}}.$$

87. *Application aux fonctions à croissance très régulière et rapide.* — Est-il possible qu'on ait, pour toutes les valeurs de x supérieures à un nombre fixe, $y^{1-\varepsilon} > y'$ ou $y' > y^{1+\varepsilon}$. La seconde inégalité nous conduirait à cette conclusion que y doit être infini pour une valeur finie de x, la première à ceci que y croîtrait moins vite qu'une certaine puissance de x. Si $y'' > y'^{1+\varepsilon}$, y' devient infini pour une certaine valeur de x; si $y'' < y'^{1-\varepsilon}$, y croît moins vite qu'une certaine puissance de x.

De même si le rapport $\frac{y'^2}{yy''}$ est supposé constamment supérieur à $1+\varepsilon$, pour toutes les valeurs de x supérieures à x_0, en intégrant l'inégalité $\frac{y'}{y} > (1+\varepsilon)\frac{y''}{y'}$, on trouve, si $x > x_0$,

$$\frac{y}{y_0} > \left(\frac{y'}{y'_0}\right)^{1+\varepsilon},$$

et l'on a la première relation examinée entre y et y'. Si le rapport $\frac{y'^2}{yy''}$

restait inférieur à $1-\varepsilon$ pour $x > x_0$, on aurait $\frac{y'}{y'_0} > \left(\frac{y}{y_0}\right)^{1+\varepsilon}$, et y devrait devenir infini pour une valeur finie de x.

D'ailleurs, la condition $\lim\limits_{x=\infty} \frac{yy''}{y'^2} = 1$ entraîne la condition

$$\lim_{x=\infty} y''\left(x+\frac{k}{\sqrt{y''}}\right) = y''(x) = 1,$$

si $|k|$ est borné. En effet, ε étant donné, il existe un nombre ξ tel que, si $x > \xi$,

$$1-\varepsilon < \frac{yy''}{y'^2} < 1+\varepsilon.$$

On tire de là, si $\xi < x_0 < x$,

$$(1) \qquad \left(\frac{y}{y_0}\right)^{1-\varepsilon} < \frac{y'}{y'_0} < \left(\frac{y}{y_0}\right)^{1+\varepsilon},$$

ou encore en prenant à part chacune de ces inégalités et par intégration entre les limites x_0 et x,

$$\left[1+\varepsilon\frac{y'_0}{y_0}(x-x_0)\right]^{\frac{1}{\varepsilon}} < \frac{y}{y_0} < \left[1-\varepsilon\frac{y'_0}{y_0}(x-x_0)\right]^{-\frac{1}{\varepsilon}}.$$

Or, soit $x = x_0 + \frac{k}{\sqrt{y''_0}}$. On a

$$x = x_0 + k'\frac{\sqrt{y_0}}{y'_0},$$

k' étant borné en même temps que k. Donc

$$(2) \qquad \left(1+\varepsilon\frac{k'}{\sqrt{y_0}}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}} < \frac{y}{y_0} < \left(1-\varepsilon\frac{k'}{\sqrt{y_0}}\right)^{-\frac{1}{\varepsilon}}.$$

ε étant fixe et k' borné, si x_0 et par suite y_0 croissent indéfiniment, les nombres extrêmes tendent vers 1. D'après (1), $\frac{y'}{y'_0}$ tend aussi vers 1, et d'après $\lim\limits_{x=\infty} \frac{yy''}{y'^2} = 1$, il en est de même de $\frac{y''}{y''_0}$.

Si donc nous nous bornons aux fonctions telles que y soit plus croissant que x^n, quel que soit n, et telles que $\lim\limits_{x=\infty} \frac{y'^2}{yy''} = 1$, nous

sommes assurés que les résultats acquis dans le présent Chapitre sont applicables.

88. Nos formules deviennent

$$p = y' + \delta h \sqrt{y''} = y'\left(1 + \delta h \frac{\sqrt{y''}}{y'}\right)$$

ou

$$p = \frac{d \log n}{d \log r}\left(1 + \delta \frac{h}{\sqrt{\log n}}\right),$$

h étant fixe. La tolérance relative sur l'exposant p est $\frac{h}{\sqrt{\log n}}$,

$$\mathrm{H}(\mathrm{X}) = [1 + \eta(x)]\, n \mathrm{L} p = [1 + \eta(r)]\, n \mathrm{L}_2 n,$$

$$\mathrm{Q}(\mathrm{X}) = [1 + \eta(\mathrm{X})]\frac{n}{p} = n \frac{d \log r}{d \log n}.$$

Remarquons que la limite de $\mathrm{H}(\mathrm{X})$ fournie au second Chapitre par la simple hypothèse A était seulement *deux fois* trop forte.

Soit, par exemple,

$$r_n = (\log_k n)^{\frac{1}{\sigma}}.$$

Si e_k est la fonction inverse de $\log_k$, on a

$$y = e_k(\sigma x),$$

$$p = \sigma \log n \ldots \log_k n \left(1 + \delta \frac{h}{\sqrt{\log n}}\right),$$

et le module maximum du produit canonique est à partir d'une certaine valeur de r, ε étant fixe, inférieur à

$$(1 + \varepsilon) e_k(r^\sigma)\, e_{k-2}(r^\sigma)$$

et supérieur à

$$\frac{1}{\sigma + \varepsilon} \frac{e_k(r^\sigma)}{e_{k-1}(r^\sigma)\, e_{k-2} \ldots e_1(r^\sigma)\, r^\sigma}.$$

La première de ces limites, où je remplace ε par $-\varepsilon$, peut être dépassée pour une infinité de valeurs croissantes de r, moyennant une répartition convenable des arguments des zéros.

Les formules sont valables même pour $k = 1$, en faisant $e_{-1} = \log n$.

Ces fonctions ont déjà été étudiées par M. Boutroux, qui a remarqué

que, pour $k = 1$, l'exposant de convergence $h \log n$ donne la croissance minima pour $h = \sigma$.

Les exemples pourraient être aisément multipliés. On pourrait varier à l'infini les combinaisons d'exponentielles, de logarithmes, de constantes numériques. Tant qu'on ne créerait pas de types de croissance échappant aux conditions de régularité précédentes, toutes les formules qu'on trouverait rentreraient dans les trois que nous venons d'écrire.

Sur les singularités des équations différentielles rationnelles du premier ordre et du premier degré;

Par M. Pierre BOUTROUX.

---

1. — Introduction.

J'ai donné ailleurs [1] (*Leçons sur les fonctions définies par les équations différentielles du premier ordre*, 1908; *Équations différentielles et fonctions multiformes*, ap. *Rendiconti del Circ. matem. di Palermo*, t. XXIX, 1910) les premiers résultats auxquels m'ont conduit les recherches que j'ai entreprises sur les singularités transcendantes des équations différentielles. Jusqu'ici, toutefois, je n'ai analysé, avec quelques détails, qu'un seul type d'équations (du premier ordre et du premier degré), savoir le type

$$\frac{dy}{dx} = \text{polynome en } x \text{ et } y. \tag{1}$$

Il est donc assez opportun de rechercher, avant même de poursuivre l'étude de l'équation (1), quelle est la généralité et la portée des résultats auxquels conduit cette équation. C'est pourquoi je vais examiner, dans ce travail, l'équation rationnelle

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \qquad (\text{P et Q polynomes}). \tag{2}$$

Je voudrais montrer que les singularités de l'équation (2) se laissent

---

[1] Ayant à faire de fréquents renvois à ces deux travaux, je désignerai, pour abréger, le premier par la lettre L, le second par la lettre P.

ramener à un petit nombre de types dont l'équation (1) fournit les spécimens les plus simples, en sorte que l'analyse de cette équation polynomale *conduit bien à une classification générale des singularités transcendantes présentées par les équations rationnelles du premier ordre.* Dès maintenant, nous pouvons prévoir qu'il n'y aurait rien d'essentiel à changer aux méthodes que nous allons employer pour les rendre applicables à des équations plus complexes. D'ailleurs, la plupart des résultats que nous obtiendrons se trouveront démontrés pour des équations plus générales que (2), ainsi que nous le constaterons chemin faisant.

Je rappelle en quelques mots ce que j'entends par *étude d'une singularité transcendante.* Il ne s'agit pas seulement de former certaines familles d'intégrales représentées, sur des chemins déterminés, par des développements convergents. Je veux obtenir l'ensemble total des déterminations d'une même intégrale qui se permutent au voisinage du point transcendant, et je veux déterminer le mécanisme suivant lequel s'échangent ces déterminations. Ainsi, par exemple, quoique j'aie fréquemment à me servir des formes d'équations données par Briot et Bouquet, je ne me place pas, pour les étudier, au point de vue généralement adopté. En effet, l'effort des analystes qui ont poursuivi les recherches de Briot et Bouquet a presque exclusivement porté sur les équations réduites de la forme

$$(e) \qquad x^k \frac{dy}{dx} = \text{développement en } x \text{ et } y \text{ nul pour } x = y = 0.$$

Il s'agissait de savoir si l'équation (e) a des intégrales qui s'annulent au point origine lorsqu'on tend vers ce point sur certains chemins. Or, le problème ainsi posé me paraît être à la fois trop particulier et trop général. Il est trop particulier parce qu'il n'épuise pas l'étude des intégrales $y(x)$ dans un domaine entourant l'origine où x se mouvrait librement. Il est trop général parce que l'étude d'une singularité transcendante conduit, le plus souvent, à plusieurs équations (e), et qu'en isolant l'une de ces équations des équations associées, on est exposé à confondre, dans une même analyse, des cas très différents.

Tout en passant en revue les singularités transcendantes de l'équation (2), je mettrai en lumière certaine propriété qui leur est commune.

Considérons une aire γ *contenant un seul point transcendant,* ξ, *de l'équation* (2), *et un chemin du plan* x *qui traverse* γ (*pénétrant dans* γ *en un point* $\bar{x}$ *et en ressortant en un point* $\bar{x}_1$). *Soient, d'autre part,* $\bar{y}$, $\bar{y}_1$ *les valeurs prises en* $\bar{x}$ *et* $\bar{x}_1$ *par une intégrale* y *de* (2) *suivie le long de* $\bar{x}\,\bar{x}_1$. Nous ne modifions pas l'intégrale y si nous déformons le chemin $\bar{x}\,\bar{x}_1$ sans lui faire traverser aucun point singulier de ladite intégrale; en particulier, si l'intégrale définie par la valeur initiale $\bar{y}$ n'était point singulière dans γ, nous pourrions déformer le chemin $\bar{x}\,\bar{x}_1$ de manière à le faire entièrement sortir de γ; mais supposons que, lorsque $\bar{y}$ varie, l'intégrale y devienne singulière dans γ pour une certaine valeur de $\bar{y}$; il en sera alors de même pour un ensemble de valeurs $\bar{y}$ contiguës, appartenant à une aire Δ. On peut dès lors se demander *pour quelles valeurs particulières* $\bar{y}$, *appartenant à l'aire* Δ, *l'intégrale suivie sur* $\bar{x}\,\bar{x}_1$ *présentera des points critiques confondus avec le point transcendant* ξ (circonstance qui *oblige* le chemin $\bar{x}\,\bar{x}_1$ à traverser ξ). Je me propose de montrer que, QUELLE QUE SOIT LA NATURE DU POINT ξ, LES VALEURS EXCEPTIONNELLES DE $\bar{y}$ AINSI DÉFINIES SONT DES VALEURS ISOLÉES.

Ce théorème (théorème A) se présentera, suivant les cas, sous diverses formes. Pour les classes de points transcendants que nous étudierons tout d'abord [classes A et B (voir *infra*, n° 2)] il pourra être déduit d'un théorème connexe (théorème B) que nous énoncerons comme il suit :

Considérons une intégrale, singulière au voisinage du point transcendant ξ, et appelons x', x'' deux points critiques quelconques présentés par cette intégrale lorsqu'on la suit, au voisinage de ξ, le long d'un *chemin direct* [1] (par exemple : sur un rayon ou un arc de cercle). Le point x'' est fonction continue de x' et voisin de ξ pour x' voisin de ξ. Envisageons alors, *au voisinage de* ξ, la fonction $x''(x')$; j'établirai que *cette fonction ne peut prendre la valeur* ξ *que pour* x' *égal à* ξ.

---

(1) *Cf.* mon Mémoire des *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, t. III, 1909, p. 322. Je suppose que le chemin qu'il faut suivre de x à x'', pour passer en ces deux points avec la valeur critique, est un chemin direct.

Lorsque le théorème $\mathcal{A}$ se trouvera en défaut (pour les points de la classe C, *voir* n° 2), nous y suppléerons par une proposition voisine en particularisant la nature du chemin direct qui relie les deux points critiques x', x''; ces deux points critiques seront, par exemple, supposés se rapprocher arbitrairement du point transcendant dans une direction déterminée.

Le théorème $\mathcal{A}$ donne lieu à diverses conséquences. Faisons, par exemple, varier $\overline{y}$ dans Δ, et considérons $\overline{y}_1$ comme fonction de $\overline{y}$. On voit de suite (*cf.* les travaux de M. Painlevé) que la fonction $y_1(\overline{y})$ ne peut présenter, dans Δ, que des singularités algébriques en dehors des valeurs $\overline{y}$ exceptionnelles définies ci-dessus. Notre proposition établit donc que les singularités transcendantes présentées dans Δ par la fonction $\overline{y}_1(\overline{y})$ sont des singularités isolées.

Plus généralement, considérons dans le plan x, deux points x_0, x_1, et soient y_0, y_1 les valeurs prises en ces points par une intégrale de (2) suivie le long d'un chemin qui les joint. Lorsque y_0 varie, y_1 est une certaine fonction de y_0 (c'est l'intégrale *fonction de la constante arbitraire* dont l'étude a été faite par M. Painlevé); d'ailleurs le chemin $x_0\,x_1$ (sur lequel on doit suivre l'intégrale pour arriver en z_1 avec $y = y_1$) doit varier avec continuité en même temps que y_0; il faut le déformer de manière à éviter les points critiques de l'intégrale suivie. Quelles seront, dans ces conditions, les singularités transcendantes de la fonction $y_1(y_0)$? De telles singularités ne peuvent se présenter que *si certains points critiques contournés par le chemin x_0x_1 viennent coïncider avec des points transcendants ξ de l'équation différentielle ou bien deviennent indéterminés.*

Écartons d'abord cette seconde hypothèse et appelons η une valeur de y_0 pour laquelle le chemin x_0x_1 passe *entre* deux points critiques infiniment rapprochés, c'est-à-dire traverse un point transcendant ξ de l'équation. Je dis que *la valeur η est nécessairement isolée.*

En effet, supposons d'abord que, pour $y_0 = \eta$, le chemin x_0x_1 ne traverse pas d'autre point transcendant que ξ, et entourons ξ d'une aire γ contenant ce seul point transcendant; nous pouvons faire en sorte que, pour y_0 voisin de y_1, le chemin x_0x_1 entre toujours dans γ en un même point $\overline{x}$ et en ressorte en un même point $\overline{x}_1$ (les points $\overline{x}$, $\overline{x}_1$ étant choisis parmi les points ordinaires de l'intégrale définie par la valeur

initiale η); dans ces conditions la valeur $\overline{y}$, prise en $\overline{x}$ par l'intégrale qui est égale à y_0 en x_0 est (d'après un théorème bien connu) fonction algébrique de y_0; pareillement, y_1 est fonction algébrique de la valeur $\overline{y}_1$ prise en $\overline{x}_1$ par notre intégrale. J'en conclus que *les deux fonctions* $y_1(y_0)$ et $\overline{y}_1(\overline{y})$ *sont, au voisinage de* $y_0 = \eta$, *singulières (transcendantes)* en même temps; elles présentent ce caractère pour des valeurs isolées de $\overline{y}$ et y_0 et, par conséquent, la valeur η est isolée.

La démonstration serait encore valable, si le chemin $x_0 x_1$ traversait, pour $y_0 = \eta$, plusieurs points transcendants ξ, ξ'_1, ... Entourons, en effet, les points ξ, ξ'_1, ... de petites aires γ, γ'_1, ...; pour $\overline{y}$ voisin de η, notre chemin $x_0 x_1$ traversera toutes ces aires, savoir la première de $\overline{x}$ en $\overline{x}_1$ (valeurs correspondantes de y : $\overline{y}$ et $\overline{y}_1$), la seconde de $\overline{x}$ en $\overline{x}'_1$ (valeurs correspondantes de y : $\overline{y}'$ et $\overline{y}'_1$), etc. Nous constatons alors que la fonction $y_1(y_0)$ ne peut présenter une singularité transcendante que lorsqu'il en est de même d'une des fonctions $\overline{y}_1(\overline{y})$, $\overline{y}'_1(\overline{y}')$, etc. Or, le nombre des singularités transcendantes de l'équation (2) est *fini*; donc les singularités transcendantes de $y_1(y_0)$ sont sûrement isolées.

Ainsi, il est démontré [dans le cas de l'équation rationnelle (2)] que *les singularités transcendantes* η *de la fonction* $y_1(y_0)$ *pour lesquelles le chemin* $x_0 x_1$ *traverse un ou plusieurs points transcendants* ξ *de l'équation différentielle sont des singularités isolées*. Cet énoncé peut-il être généralisé et étendu [1] à *toutes* les singularités trans-

---

[1] L'énoncé ainsi généralisé entraîne cette conséquence que les singularités transcendantes de la fonction $y_1(y_0)$ ne peuvent former un ensemble parfait discontinu. C'est là un théorème que M. Painlevé a admis dans ses travaux sur les équations (2) dont l'intégrale ne possède qu'un nombre fini de branches, mais qui n'a point encore été rigoureusement établi. On était tenté, en effet, de le déduire du théorème suivant : Une fonction uniforme, continue dans une aire Δ, ne peut pas cesser d'être holomorphe en un ensemble parfait discontinu de points de Δ. Or, sous cette forme, le théorème est inexact. Au lieu de chercher à le rectifier, on a peut-être avantage, en ce qui concerne les équations différentielles, à déduire le résultat requis de l'analyse directe des singularités transcendantes. C'est ce que je fais ici pour l'équation (2) et ce qu'on pourrait faire, par une méthode semblable, pour des équations plus compliquées.

cendantes de la fonction $y_1(y_0)$? Pour répondre à la question ainsi posée, il faut que nous examinions si, et dans quelles conditions, la fonction $y_1(y_0)$ peut présenter une singularité transcendante sans que le chemin $x_0 x_1$ traverse un point ξ.

Supposons que η soit une telle singularité et faisons approcher y_0 de η. Pour une valeur $\overline{y_0}$ voisine de η nous pouvons toujours donner au chemin $x_0 x_1$ la forme suivante : ligne brisée composée de segments rectilignes joignant successivement x_0 à un point critique x'_1, puis x'_1 à un point critique x'_2, ... et enfin un point critique x'_m à x_1. D'ailleurs, les points critiques $x'_1, \ldots, x'_m$ sont, ou des points critiques algébriques, ou des points critiques transcendants autour desquels se permutent *directement* une infinité de déterminations (points transcendants directement critiques). Si x'_i est un tel point transcendant, nous remplacerons le sommet x'_i de notre ligne brisée par un point x''_i arbitrairement voisin de x'_i et tracerons le petit cercle γ_i de centre x'_i passant par x''_i ; alors, au voisinage de x'_i, le chemin $x_0 x_1$ aura la forme suivante : segment rectiligne aboutissant à x''_i, circonférence γ_i (décrite une ou plusieurs fois), segment rectiligne partant de x''_i.

Ces préliminaires posés, faisons tendre $\overline{y_0}$ vers y. Nous supposons qu'aucun des points critiques $x'_i \ldots x'_m$ ne tend vers un point ξ. Supposons de plus, pour un moment, que (lorsque $\overline{y_0}$ tend vers y) le chemin $x_0 x_1$ (construit comme il vient d'être dit) ne tourne qu'un nombre fini de fois autour de chacun des points transcendants qui figurent parmi les points x'_i.

Dans ces conditions, la ligne $x_0 x_1$ comprend, lorsque $\overline{y_0}$ tend vers η, un nombre fini de côtés, plus des arcs de circonférences γ_i de longueur finie; donc, sur ce chemin, l'intégrale suivie ne cesse pas d'être algébroïde; par conséquent, il n'est pas possible que η soit une singularité transcendante de $y_1(y_0)$.

Ainsi (dans l'hypothèse où le chemin $x_0 x_1$ ne traverse, pour $y_0 = \eta$, aucun point transcendant de l'équation), la valeur $y_0 = \eta$ ne peut être singularité transcendante de $y_1(y_0)$ que si (lorsque $\overline{y_0}$ tend vers η), le le chemin brisé $x_0 x_1$ défini plus haut contourne une infinité de fois un ou plusieurs points transcendants directement critiques x'_i. Dans cette hypothèse, le chemin $x_0 x_1$ aura la forme suivante au voisinage de x'_i: segment rectiligne aboutissant en x''_i (*voir* plus haut), circonférence γ_i

de centre x'_i *décrite un nombre n de fois qui augmente indéfiniment lorsque* $\overline{y}_0$ tend vers η, et enfin segment rectiligne partant de x''_i.

Nous concluons de là que, pour obtenir les valeurs singulières de η et pour voir, en particulier, si ces valeurs singulières sont isolées, nous avons à résoudre la question suivante : *Appelant* ξ *un point transcendant directement critique de l'équation différentielle et* $\overline{x}$ *un point voisin de* ξ, *suivons une intégrale (singulière en* ξ) *sur un lacet élémentaire issu de* $\overline{x}$ *et entourant* ξ; *vers quelles limites tend l'intégrale lorsque* x *décrit une infinité de fois (de suite)* le lacet considéré ?

Ce problème est très voisin de ceux qui font l'objet des théorèmes 𝔄 et 𝔅 et il se trouvera résolu par la suite de ce Mémoire dans un grand nombre de cas; dans tous ces cas, les limites sont isolées et il en est, par conséquent, de même des singularités transcendantes correspondantes de la fonction $y_1(y_0)$. L'élucidation complète du problème posé pourrait sans doute être achevée par des méthodes analogues.

Je ne chercherai pas à faire, dans ce travail, une analyse complète des caractères propres aux divers types de singularités offerts par l'équation (2). Je veux seulement montrer, je le répète, comment l'étude de ces types peut être ramenée à l'étude des singularités présentées par les équations les plus simples.

2. — Classification des singularités transcendantes.

Je répartirai les singularités transcendantes de l'équation (2) entre trois classes principales que j'étudierai successivement :

A. *Points* ξ *qui sont, pour des valeurs isolées de* y, *racines du système des deux équations algébriques*

$$P(x, y) = Q(x, y) = 0,$$

B. *Points* ξ *qui sont, quel que soit* y, *des pôles du premier ordre du coefficient différentiel* $\frac{P}{Q}$.

C. *Points* ξ *qui sont, quel que soit* y, *des pôles d'ordre supérieur à* 1 *du coefficient différentiel* $\frac{P}{Q}$.

On sait que tout point transcendant de l'équation (2) (le point $x = \infty$ étant, s'il est transcendant, ramené à distance finie par un changement de variable) appartient à l'une des trois classes : A, B, C. A l'étude de ces trois classes se réduira donc notre tâche.

Les classes A, B, C seront subdivisées ainsi qu'il suit :

Classe A. — (La singularité transcendante est supposée avoir lieu pour $x = \xi = 0$, $y = 0$) :

I. Le coefficient de y dans Q, soit $\frac{\partial Q(0,0)}{\partial y}$ est non-nul (point transcendant simple, nos **3**, **4**; point transcendant multiple, no **5**).

II. $\frac{\partial Q(0,0)}{\partial y}$ est nul (point transcendant simple, nos **7**, **8**, **9**; point transcendant multiple, no **10**).

Classe B. — (La singularité transcendante est supposée avoir lieu pour $x = \xi = 0$), no **12**.

Cas du point transcendant simple, nos **13**, **14**.

Cas du point transcendant multiple, no **12**.

Classe C. — No **16**.

Cas du point transcendant simple, nos **17**, **18**.

Cas du point transcendant multiple, no **19**.

J'indiquerai, chemin faisant, quelles sont les équations *non-rationnelles* auxquelles il est permis d'étendre les résultats obtenus.

3. — Classe A. I. — 1° $a_{10} \neq 0$.

Nous supposons que

$$P(0, 0) = Q(0, 0) = 0, \qquad \frac{\partial Q(0, 0)}{\partial y} \neq 0.$$

Dans ces conditions, la relation implicite $Q(x, y) = 0$ donne

$$y = q(x),$$

la fonction y étant holomorphe au vosinage de $x = 0$. Posons

$$[y = v + q(x)].$$

L'équation (2) se transforme en

$$(3)\qquad \frac{dv}{dx} = -\frac{dq}{dx} + \frac{P[x, v+q(x)]}{Q[x, v+q(x)]} = \frac{P_1(x, v)}{vQ_1(x, v)},$$

où P_1 et H_1 sont polynomes en v et fonctions holomorphes de x au voisinage de $x = 0$ (Q_1 *est non-nul pour* $x = v = 0$). Nous pouvons aussi écrire en développant $\frac{P}{Q}$,

$$(4)\qquad v\frac{dv}{dx} = a_{10}x + a_{01}v + a_{20}x^2 + \ldots,$$

le second membre ne contenant pas v en facteur (s'il contenait v en facteur, l'intégrale v, nulle en $x = 0$, y serait holomorphe).

Nous avons à étudier *les intégrales de* (4) *qui sont voisines de zéro au voisinage de* $x = 0$. C'est là une étude que j'ai faite ailleurs [L. Chap. III et IV, P. Chap. III; j'ai appelé le point transcendant $x = 0$ de l'équation (4) : *point de Briot et Bouquet*]. Je me bornerai donc à reprendre, parmi les résultats de cette étude, ceux qui conduisent aux théorèmes $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ énoncés au n° **1**.

Nous distinguerons deux cas suivant que a_{10} *est différent de zéro ou égal à zéro*, et nous traiterons dans ce numéro le cas $a_{10} \neq 0$.

D'ailleurs, tout ce que nous dirons est applicable non seulement à l'équation rationnelle (4), mais A TOUTE ÉQUATION (4) DONT LE SECOND MEMBRE EST UN DÉVELOPPEMENT HOLOMORPHE EN x ET v.

1° $a_{10} \neq 0$. — Appelons w_1, w_2 les racines du polynome

$$w^2 - a_{01}w - a_{10},$$

puis posons

$$\lambda_1 = -\left(2 + \frac{a_{01}}{2w_1}\right), \qquad \lambda_2 = -\left(2 + \frac{a_{01}}{2w_2}\right) \qquad (\lambda_1^{-1} + \lambda_2^{-1} = -1).$$

Si l'on fait successivement les changements de variable

$$v = x\sqrt{w_1^2 + t}, \qquad v = x\sqrt{w_2^2 + u},$$

on décomposera l'équation (4) au voisinage de $x = 0$ en les deux équations

$$\begin{cases} xt' = \lambda_1 t + \text{termes en } x,\ t^2,\ xt,\ \ldots \\ xu' = \lambda_2 u + \text{termes en } x,\ u^2,\ xu, \end{cases}$$

et les branches v, critiques au voisinage de $x=0$, seront représentées en général (*voir* la note ci-dessous) par un développement en x et $C_1 x^{\lambda_1}$, et un développement en x et $C_2 x^{\lambda_2}$. *Pour avoir toutes les branches qui se permutent au voisinage de* $x=0$, *il suffit* (*sauf peut-être lorsque les* λ *sont réels*) *de considérer les deux développements pour l'ensemble des valeurs de* C_1 *et* C_2 *liées par la relation*

$$C_1^{\lambda_1^{-1}} = k C_2^{\lambda_2^{-1}} \qquad (k \text{ constante}).$$

Le mécanisme, suivant lequel se permutent ces branches, peut être analysé en détail, ainsi que je l'ai montré ailleurs (*loc. cit.*). Il présentera des caractères différents suivant qu'on se trouvera dans l'un ou dans l'autre des cas suivants :

a. λ_1 et λ_2 sont complexes, la partie réelle de λ_1 (ou λ_2) étant positive;

b. λ_1 et λ_2 sont réels irrationnels, λ_1 étant positif;

c. λ_1 et λ_2 sont réels fractionnaires, dans les mêmes conditions;

d. Mêmes hypothèses, λ_1 étant entier;

e. λ_1 et λ_2 sont complexes, leurs parties réelles étant négatives;

f. λ_1 et λ_2 sont réels irrationnels négatifs;

g. λ_1 et λ_2 sont réels rationnels négatifs;

h. λ_1 et λ_2 sont complexes, λ_1 étant purement imaginaire;

i. λ_1 et λ_2 sont nuls.

Dans les cas [1] *a*, *b et c*, l'origine est, pour l'équation (4), un point

---

[1] Rappelons brièvement les principaux caractères qui distinguent les cas *a*, ..., *i* les uns des autres (*L.*, Chap. IV, *P.*, III, et mon Mémoire des *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 1908).

J'appelle *caractéristique* une branche d'intégrale suivie, à partir d'une valeur initiale donnée, le long d'un chemin rectiligne, et *branche d'intégrale* (au sens restreint) l'ensemble des caractéristiques issues d'un point donné avec une valeur donnée. Au voisinage d'un point singulier transcendant, une infinité de branches d'intégrales (au sens restreint) se permutent; il s'agit de mettre en évidence le mécanisme suivant lequel se font les permutations.

Dans le cas *a*, les branches d'intégrales qui admettent $x=0$ comme point transcendant ont une infinité de déterminations z nulles confondues à l'origine; ces déterminations, d'autre part, peuvent s'échanger, autour de points cri-

directement critique, et les points critiques algébriques voisins de l'origine opèrent des *permutations-impasses* (*loc. cit.*). Considérons, d'autre part, l'aire γ (définie au n° **1**) qui entoure l'origine et le chemin $\overline{x}\,\overline{x_1}$ qui la traverse; appelons $\overline{v}$, $\overline{v_1}$ les valeurs prises en $\overline{x}$ et $\overline{x_1}$ par une intégrale de (4) suivie le long de $\overline{x}\,\overline{x_1}$; j'ai démontré (*loc. cit.*) que l'intégrale suivie sur $\overline{x}\,\overline{x_1}$ ne peut présenter des points

---

tiques x_i voisins de l'origine, avec des déterminations non-nulles (et holomorphes) à l'origine; mais soit c l'une de ces déterminations non-nulles, les caractéristiques issues de o avec la valeur c ne sauraient être permutées (au voisinage de $x = 0$) par un point critique de x_i. Ainsi, on ne peut opérer une infinité de permutations au voisinage de $x = 0$ qu'à condition de tourner une infinité de fois autour de l'origine directement. On opérera les permutations en décrivant indéfiniment (à partir d'une valeur initiale voisine de o) le contour d'un petit cercle γ, entourant $x = 0$. S'il arrive qu'on tourne autour d'un point x_i, on effectuera une permutation qui se défera d'elle-même à l'un des tours suivants; cette permutation est une *permutation-impasse*.

Dans le cas e [$\mathcal{R}(\lambda_1) < 0$, $\mathcal{R}(\lambda_2) < 0$], les branches d'intégrales qui admettent l'origine comme point transcendant présentent un ensemble infini de points critiques algébriques (dont chacun permute deux déterminations) convergeant vers $x = 0$; d'ailleurs les caractéristiques singulières en ces points critiques ne sont pas singulières à l'origine. Les points critiques algébriques forment une suite unilinéaire; on peut les affecter des indices 1, 2, ..., en les rangeant dans l'ordre où il faut les contourner pour engendrer la suite des déterminations d'une même branche qui se permutent au voisinage de $x = 0$; d'ailleurs pour opérer, dans l'ordre des indices croissants ou décroissants, la suite des permutations $x_{i-1}, \ldots, x_i, x_{i+1}$, il suffit de décrire indéfiniment le contour d'un même petit cercle, γ, entourant $x = 0$.

Les mécanismes ci-dessus décrits subsistent, le premier dans les cas b, c et d, le second dans les cas e et f. Les seules circonstances spéciales qui puissent se présenter dans ces nouveaux cas sont : 1° non-existence de branches-limites vers lesquelles tend l'ensemble des branches d'une même intégrale qui se permutent au voisinage du point transcendant; 2° non-existence des développements en x^{λ_1}, x^{λ_2}, lesquels sont remplacés par des développements où entrent des termes logarithmiques; 3° dégénérescence de la singularité transcendante en une singularité algébrique.

L'agencement des points critiques montre, dans tous les cas, que si l'on considère deux points critiques x', x'' présentés, au voisinage de l'origine, par une même intégrale suivie sur un chemin direct, *la fonction* $x''(x')$ *ne peut s'annuler que pour* $x' = 0$. C'est le théorème $\mathcal{B}$ énoncé au n° **1**.

critiques confondus à l'origine que si elle coïncide avec *l'intégrale particulière* V_2 (nulle et holomorphe à l'origine) *qui est donnée par le développement en* x_1 $C_2x^{\lambda_2}$, lorsqu'on y fait $C_2 = 0$. Cette intégrale existe toujours et elle est unique.

Maintenant, la valeur $V_2(\bar{x})$ peut-elle être singularité transcendante de la fonction $\overline{v_1}(\bar{v})$? Pour définir $\overline{v_1}(\bar{v})$, nous imaginons que nous partions d'un chemin $\bar{x}\,\overline{x_1}$ qui ne traverse ni ne contourne γ. Supposons que $\bar{v}$ se rapproche de $V_2(\bar{x})$ et que le chemin $\bar{x}\,\overline{x_1}$ pénètre dans γ. Nous pouvons remplacer le chemin $\bar{x}\,\overline{x_1}$, à l'intérieur de γ, par un chemin ainsi composé : 1° chemin fermé $(\overline{x_1}\,\bar{x})$ intérieur à γ; 2° arc $\bar{x}\,\overline{x_1}$ du contour γ. Appelons alors $\bar{v}$, $\bar{v}'$, les valeurs prises par l'intégrale V au début et à la fin du chemin fermé $(\overline{x_1}\,\bar{x})$. D'après les propriétés rappelées en note, ces valeurs sont toutes deux représentées par le développement de Briot-Bouquet en x, $C_2x^{\lambda_2}$. Soit $\overline{C_2}$ la valeur de C_2 correspondant à $\bar{v}$; alors (puisque $\bar{v}$ et $\bar{v}'$ appartiennent à la même intégrale) la valeur de C_2 correspondant à $\bar{v}'$ sera $e^{2ik\pi}\overline{C_2}$ (k entier). Lorsque $\bar{v}$ prendra la valeur $V_2(\bar{x})$, $e^{2ik\pi}\overline{C_2}$ restera fonction holomorphe de $\overline{C_2}$. Donc $\bar{v}'$ (et par suite $\overline{v_1}$) est *fonction holomorphe* de $\bar{v}$. Ainsi (*dans le cas a*), *la singularité transcendante* o *de l'équation* (4) *ne définit aucune singularité transcendante de la fonction* $\overline{v_1}(v)$.

Dans le cas d, les développements en x, $C_1x^{\lambda_1}$ et x, $C_2x^{\lambda_2}$ peuvent cesser d'exister. En ce cas, l'intégrale suivie le long de $\bar{x}\,\overline{x_1}$ cesse d'être fonction continue de λ_1 (ou fonction continue des coefficients a_{01}, a_{10} que nous faisons varier pour parcourir la série des cas a à i). Mais, donnons-nous des valeurs fixes de a_{01}, a_{10} pour lesquelles λ_1 soit entier positif; nous pouvons remplacer les développements en x, $C_1x^{\lambda_1}$ et x, $C_2x^{\lambda_2}$ par des développements en x et $(C_1 + \gamma \log x)x^{\lambda_1}$ et en x, $C_2x^{\lambda_2}$, $C_2x^{\lambda_2}\log x$ (γ étant une fonction rationnelle des coefficients de l'équation). Nous constatons alors que la singularité transcendante $x = 0$ est du même type que tout à l'heure (point directement critique auquel sont associées des permutations-impasses). Le chemin $\bar{x}\,\overline{x_1}$ ne pourra, en ce cas encore, traverser l'origine que si l'intégrale suivie sur ce chemin coïncide avec l'intégrale particulière V_2 nulle

et holomorphe au voisinage de l'origine. De là on déduit le théorème 4.

Dans le cas e, l'origine est un point indirectement critique de première espèce (*loc. cit.*). Considérons, d'autre part, le chemin $\overline{x}\,\overline{x_1}$ et les valeurs $\overline{v}$, $\overline{v_1}$. Ces valeurs sont représentées par l'un ou par l'autre des deux développements en x, $C_1 x^{\lambda_1}$ et x, $C_2 x^{\lambda_2}$. Si elles sont représentées par le même développement, il résulte des propriétés du point transcendant que *le chemin $\overline{x}\,\overline{x_1}$ peut toujours être déformé de manière à rester extérieur à l'aire γ entre les points $\overline{x}$* et $\overline{x_1}$; nous ne rencontrons alors, pour $\overline{v}$ voisin de 0, aucune singularité transcendante de la fonction $\overline{v_1}(\overline{v})$. Mais supposons que les déterminations $\overline{v}$ et $\overline{v_1}$ soient représentées, l'une (par exemple $\overline{v}$) par le développement en x, $C_1 x^{\lambda_1}$, la seconde ($\overline{v_1}$) par le développement en x, $C_2 x^{\lambda_2}$; alors la fonction $\overline{v_1}(\overline{v})$ présente une singularité transcendante lorsque $\overline{x}\,\overline{x_1}$ traverse l'origine. Or, dans l'hypothèse actuelle, il résulte de l'analyse que j'ai faite que le chemin $\overline{x}\,\overline{x_1}$ n'est amené *à travers l'origine que si l'intégrale définie par la valeur $\overline{v}$ coïncide avec l'intégrale particulière V_1 (nulle et holomorphe à l'origine) qui est donnée par le développement* en x, $C_1 x^{\lambda_1}$ *lorsqu'on y fait* $C_1 = 0$. L'intégrale égale à $\overline{v_1}$ au point $\overline{x_1}$ coïncide alors avec l'intégrale holomorphe V_2. Les deux intégrales V_1, V_2 existent sûrement (puisque, actuellement, λ_1, λ_2 sont des nombres finis à parties réelles négatives); elles se croisent en $x = 0$.

Les développements en C_1 et C_2 cessent en général d'exister dans le cas *g*. Il en résulte que lorsque λ_1 et λ_2 deviennent réels (négatifs), l'intégrale suivie sur $\overline{x}\,\overline{x_1}$ cesse d'être fonction continue de λ_1 (ou des coefficients $a_{0,1}$, $a_{1,0}$). Mais donnons-nous des valeurs *fixes* de a_{01}, a_{10} pour lesquelles λ_1 et λ_2 soient réels négatifs. Si ces exposants sont irrationnels, les développements en C_1, C_2 sont encore convergents (dans une couronne entourant $x = 0$) pour les petites valeurs de ces paramètres. Si λ_1 et λ_2 sont rationnels, les développements peuvent être remplacés par des développements procédant suivant les puissances de x, $C_1 x^{\lambda_1}$, $C_1 x^{\lambda_1} \log x$ et de x, $C_2 x^{\lambda_2}$, $C_2 x^{\lambda_2} \log x$. Dans un cas comme dans l'autre, le chemin $\overline{x}\,\overline{x_1}$ ne traverse l'origine que si l'intégrale suivie sur ce chemin coïncide avec V_1 ou avec V_2.

Pour arriver directement à ce dernier résultat, on peut écrire l'équation (4) sous la forme

$$(4\ bis) \qquad v\frac{dv}{dx} = a_{10}x + a_{01}v + \mu(a'_{20}x^2 + \ldots)$$

et faire varier μ avec continuité depuis o jusqu'à 1. Quel que soit μ entre o et 1, l'intégrale v suivie sur $\overline{x}\,\overline{x_1}$ est, tout le long de ce chemin, fonction continue de μ; il s'ensuit qu'elle ne peut présenter plusieurs points identiques confondus à l'origine que si $v = V_1$ ou $v = V_2$.

Le *cas h* est le cas-limite (¹) qui sépare le cas *a* du cas *e*. L'origine est, dans ce cas, point indirectement critique; les deux développements en x, $C_1x^{\lambda_1}$ et x, $C_2x^{\lambda_2}$ sont convergents dans des couronnes circulaires, et $\overline{x}\,\overline{x_1}$ ne peut traverser l'origine que si l'intégrale coïncide avec V_1 ou V_2.

4. — Classe A. I. — 1° $a_{10} \neq 0$ (suite).

Ne m'étant point, dans mes précédents travaux, arrêté sur le *cas i*, je donne ici quelques indications sur le mécanisme des permutations qui caractérise ce cas.

Considérons d'abord l'intégrale générale (5) de l'*équation* (4 *bis*),

---

(¹) Voyons comment s'opérera, lorsque $\mathcal{R}(\lambda_1) = 0$, le passage du cas *a* au cas *e* ou le passage inverse. Considérons un petit cercle γ de centre $x = 0$, et une petite couronne circulaire Σ, de même centre, ayant la circonférence γ pour bord intérieur. A supposer que le module de λ_1 soit constant, nous pouvons prendre $|C_1|$ assez petit pour que le développement en x et $C_1x^{\lambda_1}$ converge à l'intérieur de Σ aussi bien pour $\mathcal{R}(\lambda_1) < 0$ que pour $\mathcal{R}(\lambda_1) > 0$. Ainsi, lorsque λ_1 traverse une valeur imaginaire, le développement ne cesse pas de converger sur le contour γ pour les petites valeurs de $|C_1x^{\lambda_1}|$; nous pouvons suivre ce développement sans discontinuité. En revanche, l'allure de la branche d'intégrale définie par le développement en x, $C_1x^{\lambda_1}$, va se trouver modifiée à l'intérieur du cercle γ. Voyons, par exemple, ce qui se passera lorsque $\mathcal{R}(\lambda_1)$ passera du signe — au signe +. Considérons [pour $\mathcal{R}(\lambda_1) < 0$] une caractéristique voisine de l'intégrale holomorphe V_1. Cette caractéristique s'annule, nous le savons, en un point critique x_1 voisin de o. La branche d'intégrale à laquelle elle appartient présente d'ailleurs une infinité de points critiques convergeant vers l'origine, et, si l'on veut passer successivement par tous ces points critiques avec la valeur

où $\mu = 0$. Cette intégrale s'écrit

$$(5)\quad v = xw, \qquad Cx = \frac{e^{\frac{b}{w-b}}}{w-b} \qquad \left(b = \frac{a_{01}}{2} - \sqrt{-a_{10}}.\ C\ \text{const. d'intégration}\right).$$

Nous voyons que, pour $x = 0$, l'égalité (5) donne :

soit $w = \infty$ avec $\lim Cxw = 1$; soit $w = b$.

D'autre part, l'intégrale (5) ne présente qu'un seul point critique algébrique, savoir, le point $x_0 = \frac{-1}{Cbe}$ où $w = 0$. Ainsi donc, au voisinage de l'origine, toute intégrale, v, de (4 *bis*) se décomposera en :

1° Une caractéristique holomorphe, égale à C^{-1} pour $x = 0$;

2° Une infinité de caractéristiques nulles et singulières en $x = 0$.

Pour distinguer ces dernières caractéristiques, considérons leurs valeurs en un point $\bar{x}$ arbitrairement rapproché de 0; nous avons, en ce point, une infinité de déterminations différentes..., $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, ... (voisines de 0), qui se permutent entre elles lorsque la variable x tourne une infinité de fois autour de l'origine. D'ailleurs, parmi les caractéristiques issues de $\bar{x}$ avec les valeurs $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, ..., une seule présentera un point critique autre que l'origine (le point x_0) : ce sera, par exemple, la caractéristique correspondant à $\bar{v}_0$.

---

critique 0, il faut faire décrire à x une spirale s'enroulant une infinité de fois autour de $x = 0$. Cela posé, lorsque $\mathcal{R}(\lambda_1)$ diminue en valeur absolue, le nombre des spires de la spirale diminue ; et, à la limite $\mathcal{R}(\lambda_1) = 0$, le chemin qui passe par la suite des points critiques devient un chemin simple direct (*Cf.* mon Mémoire des *Annales de l'École Normale*, n° 3). J'en conclus que, pour $\mathcal{R}(\lambda_1) = 0$, *il ne peut exister aucune couronne circulaire où la branche d'intégrale, qui s'annule au point critique x, voisin de 0, soit représentable par un développement en x et $C_1 x^{\lambda_1}$.*

De là résulte que les caractéristiques définies sur le contour γ par le développement de Briot et Bouquet ne s'annulent en aucun point intérieur à γ; elles ne présentent dans γ d'autre point critique que l'origine (point transcendant directement critique) ; d'ailleurs elles ne s'y annulent pas; elles ne tendent vers aucune limite lorsque x tend vers 0 le long d'un rayon. Pour obtenir des caractéristiques qui présentent des points critiques algébriques à l'intérieur de γ, il faudrait (dans le développement de Briot et Bouquet) faire tendre $|C_1|$ vers une valeur pour laquelle le développement est divergent.

Ces résultats subsisteront, à l'intérieur d'un petit cercle γ de centre $x = 0$ et de rayon non-nul, pour l'équation (4 *bis*) où μ croît de 0 à 1. Toute intégrale de (4 *bis*) possède une infinité de caractéristiques nulles à l'origine et se permutant autour de l'origine; parmi ces caractéristiques, une seule (celle qui est définie en $\overline{x}$ par la valeur initiale $\overline{v_0}$) présente un point critique algébrique, x_0, à l'intérieur de γ; ce point critique la permute avec une caractéristique holomorphe dans γ et égale à C^{-1} pour $x = 0$.

Ainsi, *l'origine est pour l'équation* (4) *un point transcendant directement critique.* Le point critique x_0 opère une permutation-impasse.

Représentation des caractéristiques qui s'annulent à l'origine. — Soit γ_1 un cercle arbitrairement petit de centre $x = 0$; d'après ce qui précède, nous pourrons toujours représenter les caractéristiques singulières à l'origine par *un développement qui reste convergent dans la couronne circulaire comprise entre les cercles* γ_1 *et* γ.

Développons, en effet, ces caractéristiques par rapport aux puissances de μ

$$v = v_0 + \mu v_1 + \mu^2 v_2 + \ldots;$$

le développement converge bien pour ($|\mu| < 1$) entre γ_1 et γ; cherchons comment les coefficients dépendent de x. Le premier coefficient, v_0, n'est autre que le produit par x de la fonction w liée à x par la relation (5). Or, par inversion de cette relation, on obtient [1] w sous forme d'un développement qui procède suivant les puissances négatives

---

[1] Posons $\omega = \dfrac{\log(w - b)}{\log Cx}$. L'intégrale générale (5) s'écrira

$$\frac{b}{w - b} = (1 + \omega) \log Cx,$$

ou en prenant les logarithmes

$$\omega = \frac{\log b}{\log Cx} - \frac{\log(1 + \omega)}{\log Cx} - \frac{\log \log Cx}{\log Cx}.$$

Or, cette dernière égalité est de la forme $F\left(\omega, \dfrac{1}{\log Cx}, \dfrac{\log \log Cx}{\log Cx}\right) = 0$.

F étant un développement holomorphe par rapport aux trois quantités

de $\log Cx$ et les puissances positives de $\log\log Cx$. Les coefficients suivants, $v_1, v_2, \ldots$, sont alors donnés par des équations différentielles linéaires dépendant de x, de $(\log Cx)^{-1}$ et de $\log\log Cx$; ils sont développables par rapport à ces mêmes quantités.

Ayant ainsi brièvement caractérisé le cas *i*, demandons-nous maintenant pour quelles valeurs de $\bar{v}$ l'intégrale de (4), suivie sur le chemin $\overline{x\,x_1}$ du n° 3, peut présenter des points critiques confondus en $x = 0$ (il est clair que cette intégrale cesse d'être fonction continue de λ, lorsque λ_1 traverse la valeur 0).

Considérons, d'abord, l'équation (4 *bis*) où $\mu = 0$. Nous voyons que, pour cette équation, notre chemin $\overline{x\,x_1}$ ne peut être amené à traverser l'origine que si v coïncide avec l'intégrale particulière $w = b\,(v = bx)$, pour laquelle $C = \infty$.

Faisons maintenant varier μ à partir de 0. Dans le cas présent, l'équation (4 *bis*) possède une et une seule intégrale nulle et holomorphe à l'origine que nous désignerons par V_1. En effet, les deux équations en t et u du n° 3 se trouvent coïncider; elles s'écrivent

$$V = x\sqrt{b^2 + t}; \qquad xt' = \text{termes en } x,\ t^2,\ xt,\ \ldots,$$

équation vérifiée par un et un seul développement nul et holomorphe en $x = 0$.

Nous savons, d'autre part, que, le long du chemin $\overline{x\,x_1}$, et sur tout autre chemin issu de x, l'intégrale v est fonction continue de μ. En particulier, si cette intégrale s'annule en un point critique x_0 voisin de l'origine, elle ne présente (pour μ voisin de 0) aucun autre point critique (voisin de 0) sur l'ensemble des rayons issus de x_0. On en conclut que, lorsque x_0 tend vers 0, l'intégrale tend vers une intégrale particulière qui ne possède, au voisinage de l'origine, d'autre point singulier que l'origine elle-même; *cette intégrale est nécessairement* V_1.

ω, $\dfrac{1}{\log Cx}$, $\dfrac{\log\log Cx}{\log Cx}$ (quantités voisines de 0 pour la branche d'intégrale considérée). D'ailleurs $\dfrac{\partial F}{\partial \omega} \neq 0$. Donc ω est développable par rapport aux puissances croissantes de $\dfrac{1}{\log Cx}$ et $\dfrac{\log\log Cx}{\log Cx}$.

De proche en proche, la conclusion s'étend au cas où $\mu = 1$, c'est-à-dire à l'équation (4).

5. — Classe A. I. — 2° $a_{10} = 0$.

Nous venons d'examiner successivement les diverses équations (4) pour lesquelles λ_1 et λ_2 ont des valeurs finies. Il nous reste à examiner le cas où l'un de ces exposants est infini. Ce cas se présente lorsque PLUSIEURS POINTS TRANSCENDANTS DU TYPE ÉTUDIÉ CI-DESSUS *viennent à se confondre* (en d'autres termes, lorsque $a_{10} = 0$).

Nous remarquerons d'abord qu'un point transcendant multiple de la classe A, I peut toujours être regardé comme un *point de la classe* C. Il suffit, en effet (si $a_{01} \neq 0$), de faire le changement de variable $v = x^k w$ (k étant l'indice du premier des coefficients $a_{10}, a_{20}, \ldots$, qui n'est pas nul) pour ramener l'équation (4) à l'un des types (¹) que nous étudierons aux n^{os} **16** et suivants.

(¹) Montrons, sur un exemple simple, comment l'équation transformée se ramènera aux types de la classe C que nous étudierons plus bas (n^{os} **16** et suiv.). Soit l'équation

$$vv' = av + bx^2$$

que le changement de variable $v = x^2\omega$ transforme en

$$x^2\omega' = \frac{b + a\omega - 2x\omega^2}{\omega}.$$

Pour ramener cette équation à la forme normale [polynomes p d'une part, polynomes q d'autre part, tous de même degré (*voir* n° **16**), le degré des p surpassant de deux unités le degré des q], je poserai $\omega = \frac{u}{u-1}$. J'obtiendrai alors

$$x^2 u' = \frac{-a(u-1)^2 - (u+b)(u+1)^3 + 2xu^2(u-1)}{u}.$$

Le polynome en u qui joue le rôle de p_0 (*voir* n° **16**) est ici

$$-(u+b)(u-1)^3 - a(u-1)^2.$$

Ce polynome admet $u = 1$ comme racine double. Il résulte alors de la théorie développée au n° **16** que les caractéristiques u ne prennent pas la valeur 1 au voisinage de l'origine mais tendent vers 1 à la façon d'une fonction rationnelle lorsque $|x|$ tend vers 0; *le rapport* $\frac{x^2}{u-1}$ *tend vers une limite finie.*

Si a_{01} était nul, on effectuerait d'une manière générale, un double changement de variables de la forme

$$x = \xi^p, \qquad v = \xi^q \omega.$$

Ainsi les propriétés (¹) des singularités de la classe C que nous énoncerons plus bas appartiennent également aux points multiples de la classe A, I. Mais ces derniers points jouissent aussi de propriétés qui leur sont spéciales. Pour les étudier complètement, il faudra donc raisonner directement sur l'équation (4) à point transcendant multiple en considérant cette équation comme limite d'une équation (4) présentant des points transcendants très rapprochés.

Donnons-nous une équation (4) dont le second membre s'annule (pour $v = 0$) en k points du plan x très rapprochés de l'origine, mais distincts. Dans un domaine γ contenant ces k points, nous connaissons le mécanisme des permutations que subit une intégrale V; car ce mécanisme est la *combinaison de k mécanismes indépendants appartenant à l'un des types étudiés ci-dessus* (à chacun des k points transcendants correspond un exposant λ_1 très grand en valeur absolue et un exposant λ_2 voisin de -1).

Mais bornons-nous à la question particulière que nous avons posée au n° **1**. Nous considérons le chemin $\overline{x}\,\overline{x_1}$ qui traverse γ de $\overline{x}$ en $\overline{x_1}$, et, sur ce chemin, une intégrale v définie par la valeur $\overline{v}$ qu'elle prend en $\overline{x}$.

Nous supposons qu'on parte de valeurs de $\overline{v}$ pour lesquelles l'intégrale v ne présente pas de point critique dans γ_1, puis qu'on fasse varier $\overline{v}$.

Nous nous demandons alors pour quelles valeurs de $\overline{v}$ l'intégrale v pourra avoir des points critiques confondus en $x = 0$.

Le chemin $\overline{x}\,\overline{x_1}$ pourra toujours être décomposé en : 1° lacets élémentaires contournant des points critiques x', lacets que nous supposerons issus du contour et du petit cercle γ (de centre $x = 0$) et *dirigés*

(¹) Les points de la classe A, qui sont, d'après la terminologie de M. Painlevé, des *points ordinaires* lorsqu'ils sont simples, sont en général des *points essentiels* lorsqu'ils sont multiples.

suivant les prolongements (¹) *des rayons* Ox'; 2° arcs du contour γ reliant entre eux les lacets élémentaires. Considérons alors le lacet élémentaire relatif à un point critique x'. Soit $\overline{x'}$ l'origine de ce lacet, $\overline{v'}$ la valeur prise en $\overline{x'}$ par l'intégrale suivie sur le lacet. Je me demande *vers quelle limite tend* $\overline{v'}$ (ou, ce qui revient au même, *vers quelle limite tend la caractéristique suivie sur* $\overline{x'}x'$) *lorsque le point critique* x' *tend vers* o.

Soit d'abord une équation (4) qui possède, au voisinage de $x = 0$, k points transcendants distincts $\xi_1, \ldots, \xi_k$ *ayant un même module très petit et des arguments différents*. Supposons que l'intégrale v définie au point $\overline{x}$ par la valeur initiale $\overline{v}$ possède un point critique x' arbitrairement rapproché de ξ_j; alors, sur le prolongement $x'\overline{x'}$ du rayon $\xi_j x'$ compris entre x' et le contour γ, l'intégrale possède deux caractéristiques (nulles en x') qui tendent (lorsque x' tend vers ξ_j) vers l'une des deux intégrales holomorphes $V_{j,1}$, $V_{j,2}$.

Considérons en particulier la caractéristique $v_{j,2}$ qui tend vers $V_{j,2}$. Puis, faisons décroître indéfiniment le module commun des points $\xi_1, \ldots, \xi_k$ sans toucher à leurs arguments. Il suffit, pour cela, d'introduire dans l'équation un certain paramètre ν qui tend vers o lorsque les points transcendants se rapprochent. Pour toute valeur de ν voisine de o, la caractéristique $v_{j,2}$ est au point $\overline{x'}$, fonction continue de x' au voisinage de $x' = 0$; elle devient égale à $V_{j,2}$ pour $x' = 0$.

Lorsque, d'autre part, ν tend vers o, la caractéristique $v_{j,2}$ ne cesse pas d'être holomorphe et fonction continue de ν sur tout rayon aboutissant à l'origine. D'ailleurs, $V_{j,2}$ tend vers une limite déterminée; savoir l'intégrale holomorphe V_2, donnée (pour $C_2 = 0$) par le développement en x, $C_2 x^{\lambda_2}$, $C_2 x^{\lambda_2} \log x$ relatif à l'équation (4) où $\nu = a_{10} = 0$. J'en conclus que l'intégrale $v_{j,2}$ est encore, pour $\nu = 0$, fonction continue de x' en $x' = 0$ et qu'elle prend, en $x = 0$, la valeur V_2. En d'autres termes, *lorsque* x' *tend vers* o, *l'une des deux caractéristiques issues de* x' *avec la valeur critique* o *tend* (*sur le rayon* Ox' *ou un*

(¹) En évitant, par des crochets infiniment petits, les points critiques qui pourraient se trouver sur ces prolongements.

rayon voisin) vers la limite V_2. Réciproquement, si l'une des caractéristiques issues de x' tend vers V_2, x' tend nécessairement vers o.

Ayant démontré que l'une des deux caractéristiques issues du point critique x' tend vers la limite déterminée V_2, nous établirons facilement que l'autre caractéristique tend également vers une limite déterminée V_1 (la branche d'intégrale V_1 n'étant pas, dans le cas général, holomorphe à l'origine). D'ailleurs, l'existence de la limite V_1 sera établie directement au n° **17**.

En résumé ([1]), *lorsque* λ_1 *devient infini, les seules valeurs de* $\bar{v}$ *pour lesquelles l'intégrale* v (*suivie sur* $\overline{x}\,\overline{x_1}$) *puisse présenter des points critiques confondus sont des valeurs isolées.*

La proposition ainsi énoncée se trouve établie maintenant pour une équation (4) quelconque [et, par conséquent, pour toutes les équations (2) de la classe A, I, puisque le résultat obtenu pour la variable v s'étend immédiatement à la variable y (*voir* la définition de v au début du n° **3**)]. De cette proposition nous déduirons le théorème A, puisque (dans les conditions prévues au n° **1**) la fonction v_1 $(\bar{v})$ ne peut être singulière que lorsque l'intégrale v, suivie sur $\overline{x}\,\overline{x_1}$, présente des points critiques confondus.

6. — Classe A. II. — Cas particulier.

Nous allons maintenant supposer (*voir* n° **2**) que

$$P(0, 0) = Q(0, 0) = 0, \qquad \frac{\partial Q(0, 0)}{\partial y} = 0.$$

([1]) Nous pourrions pousser plus à fond cette analyse en nous servant de l'équation auxiliaire

$$(e) \qquad \frac{dx}{dv} = P(P' - a_{01}) + a_{01}v + \mu[P\varphi_1(x) + v\varphi_2(x, v)],$$

équation où P est un polynome de degré K s'annulant aux k points transcendants, et où φ_1, φ_2 sont des développements holomorphes en x et en x et v. Faisons, tout d'abord, dans cette équation $\mu = 0$. Nous obtenons une équation que j'ai étudiée en détail (*loc. cit.*) dans l'hypothèse où P est du second degré. Le mécanisme des permutations opérées au voisinage des k points transcendants peut être ainsi déterminé et il subsiste lorsque μ varie de 0 à 1. Faisant ensuite tendre P vers bx^k (b constante), nous passerons de l'équation (e) à l'équation (4).

Dans ces conditions, la relation implicite $Q(x, y) = 0$ ne donne plus y sous forme d'un développement holomorphe en x. Nous ne pouvons donc plus tirer parti du changement de variable effectué au n° **3** (changement de variable qui nous a conduits à une équation dont tous les points critiques se présentent pour une même valeur v de l'intégrale). Nous chercherons donc une autre méthode.

Supposons d'abord que P contienne un terme du premier degré en x. Nous pouvons alors regarder y comme variable indépendante. *Les intégrales $x(y)$ qui sont singulières et voisines de* 0 *au voisinage de $y = 0$ présentent en ce point une singularité transcendante de l'un des types déjà étudiés.* Nous connaissons donc l'allure, sinon des intégrales $y(x)$ proprement dites, du moins de leurs inverses. En particulier, considérons une intégrale suivie, au voisinage de $x = 0$, $y = 0$ sur un chemin déterminé; puis faisons varier cette intégrale avec continuité et déformons en même temps les chemins correspondants du plan x et du plan y, de manière que ces chemins ne traversent jamais aucun point critique; nous ne sommes arrêtés que si notre intégrale traverse un point transcendant; or, d'après ce qui précède, cette circonstance ne peut se produire que si $x(y)$ coïncide avec une ou deux intégrales particulières, nulles et holomorphes en $y = 0$; $y(x)$ coïncide alors avec les inverses de ces intégrales, inverses qui sont elles-mêmes nulles et holomorphes en $x = 0$. Le théorème $\mathcal{A}$, énoncé dans l'Introduction, est donc encore vrai dans le cas actuel.

Plus généralement, supposons maintenant que *les polynomes* P *et* Q *contiennent au moins un terme du premier degré en x ou y.* Nous constatons que nous pouvons toujours *ramener la singularité $x = 0$ à une singularité connue en effectuant une double transformation linéaire*

$$x = \alpha_0 u + \alpha_1 v, \qquad y = \beta_0 u + \beta_1 v,$$

Supposant le déterminant $\alpha_0 \beta_1 - \alpha_1 \beta_0$ non nul, nous voyons que, pour $x = y = 0$, on a nécessairement $u = v = 0$; aux intégrales de (2), singulières au voisinage de $x = 0$, correspondent donc des intégrales $v(u)$ voisines de 0 au voisinage de $u = 0$. Ces intégrales sont données par l'équation

$$\frac{dv}{du} = \frac{\alpha_0 P - \beta_0 Q}{\beta_1 Q - \alpha_1 P},$$

où le dénominateur contient un terme en v ayant pour coefficient

$$[\alpha_1\beta_1(b_{10}-a_{01})-\alpha_1^2 a_{10}].$$

On peut toujours choisir les α et β de manière à rendre ce coefficient non nul, à moins qu'on n'ait à la fois : $b_{10}=a_{01}$, $a_{10}=0$. Dès lors, le théorème $\mathcal{A}$, s'appliquant à l'équation transformée, s'applique également à l'équation proposée.

Dans le cas où $b_{10}=a_{01}$, $a_{10}=0$, les conclusions précédentes sont en défaut. Mais effectuons, en ce cas, le changement de variable $y=xw$: nous obtenons l'équation

$$(6)\qquad x\frac{dw}{dx}=\frac{x^{-1}P_2-wx^{-1}Q_2}{b_{10}+x^{-1}Q_2};$$

or, les polynomes P_2 et Q_2, supposés exprimés en fonction de x et w, contiennent x^2 en facteur; donc, si b_{10} est non nul, *l'origine n'est pas point singulier transcendant.*

Remarque. — Pour étudier directement, au voisinage de l'origine, l'allure des branches d'intégrales $y(x)$, on effectuerait la double transformation

$$x=\xi^2,\qquad y=\xi\theta,$$

qui conduit à l'équation

$$(7)\qquad \xi\frac{d\theta}{d\xi}+\theta=\frac{2a_{10}\xi+2a_{01}\theta+\text{termes en }\xi\theta^2,\ \xi^2\theta,\ \ldots}{b_{10}+c\theta^2+\text{termes en }\xi\theta,\ \xi^2,\ \ldots}.$$

Les intégrales θ, finies au voisinage de l'origine, ont même allure que les intégrales de l'équation réduite

$$\xi\frac{d\theta}{d\xi}=\frac{-c\theta^3+(a_{01}-b_{10})\theta}{c\theta^2+b_{10}}.$$

On les étudie par la méthode que nous exposerons au numéro suivant.

7. — Classe A. II. — Cas général.

Soient les termes de plus bas degré, dans P et Q, de degré k. Nous écrirons

$$P=a_{k0}x^k+\ldots+a_{0k}y^k+P_{k+1},$$
$$Q=b_{k0}x^k+\ldots+b_{0k}y^k+Q_{k+1},$$

et nous supposerons d'abord que b_{0k} soit non nul.

Posant $y = xw$, nous transformons l'équation (2) en l'équation

$$(8) \qquad y = xw, \qquad x\frac{dw}{dx} + w = \frac{a_{k0} + \ldots + a_{0k}w^k + x^{-k}P_{k+1}}{b_{k0} + \ldots + b_{0k}w^k + x^{-k}Q_{k+1}} = F(x, w).$$

Étant donné que x et y sont supposés voisins de o, les fonctions $x^{-k}P_{k+1}$, $x^{-k}Q_{k+1}$, $wx^{-k}Q_{k+1}$ restent très petites au voisinage de $x = 0$. Écrivons alors l'équation auxiliaire

$$(8\ bis) \qquad x\frac{dw}{dx} = -w + \frac{a_{k0} + \ldots + a_{0k}w^k}{b_{k0} + \ldots + b_{0k}w^k} + \mu\left[F(x, w) - \frac{a_{k0} + \ldots + a_{0k}w^k}{b_{k0} + \ldots + b_{0k}w_k}\right]$$

qui coïncide avec (8) pour $\mu = 1$ et se réduit, pour $\mu = 0$, à

$$(9) \qquad x\frac{dw}{dx} = \frac{-b_{0k}w^{k+1} + \ldots + a_{k0}}{b_{0k}w^k + \ldots + b_{k0}};$$

w sera pour $0 < \mu < 1$, fonction continue de μ, et *nous pourrons passer, avec continuité, de l'équation* (9), *qui est intégrable, à l'équation* (8).

Nous avons supposé que le coefficient $b_{o,k}$ n'était pas nul. En quoi l'étude qui va suivre serait-elle changée si ce coefficient devenait nul ?

Je dis qu'on peut (¹) *toujours effectuer sur x et y une double transformation linéaire*

$$(10) \qquad x = \alpha_0 u + \alpha_1 v, \qquad y = \beta_0 u + \beta_1 v$$

(*le déterminant $\alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0$ étant non nul, cf.* n° 6) *qui ramène le cas $b_{0,k} = 0$ au cas $b_{0,k} \neq 0$. Si la transformation est impossible, c'est que l'origine n'est pas point transcendant.*

En effet, supposons effectuée la transformation (10) et posons $v = \omega u$. L'équation (8) devient

$$(11) \qquad u\frac{d\omega}{du} = \frac{\omega(\alpha_1 P - \beta_1 Q) + \alpha_0 P - \beta_0 Q}{\beta_1 Q - \alpha_1 P}.$$

(¹) Pour étudier directement l'allure des branches d'intégrales $y(x)$, on effectuerait un changement de variables semblable à celui que nous avons indiqué dans la Remarque qui termine le n° 6.

Calculons le coefficient de $u^k \omega^k$ dans $(\beta_1 Q - \alpha_1 P)$; nous obtenons

$$\beta_1(b_{k0}\alpha_1^k + \ldots + b_{0k}\beta_1^k) - \alpha_1(a_{k0}\alpha_1^k + \ldots + a_{0k}\beta_1^k),$$

ou, en posant $\frac{\beta_1}{\alpha_1} = t$,

$$\alpha_1^{k+1}[b_{0k}t^{k+1} + (b_{1,k-1} - a_{0k})t^k + (b_{2,k-2} - a_{1,k-1})t^{k-1} + \ldots - a_{k0}].$$

Ainsi, si nous n'avons pas simultanément les égalités

$$(12) \qquad b_{0k} = a_{k0} = 0, \qquad a_{1,k-1} = a_{0k}, \qquad b_{2,k-2} = a_{1,k-1}, \qquad \ldots,$$

nous pouvons toujours choisir α_1 et β_1 de manière à rendre non nul le coefficient considéré, et l'équation (11) est alors de la forme

$$u\frac{d\omega}{du} = \frac{-b'_{0,k}\omega^{k+1} + \ldots}{b'_{0,k}\omega^k + \ldots}.$$

c'est-à-dire de la forme (8).

Si, au contraire, les égalités (12) sont satisfaites en même temps, l'équation (11) s'écrit

$$x\frac{dw}{dx} = \frac{xR}{b_{k0} + \ldots} \qquad (\text{R holomorphe en } x \text{ et } w)$$

et l'origine n'est plus un *point transcendant*.

Remarque I. — Dans le cas particulier où l'on aurait $a_{0k} = b_{0k} = 0$, $b_{1,k-1} \neq 0$, l'équation (8) s'écrirait

$$(13) \qquad x\frac{dw}{dx} = \frac{-b_{1,k-1}w^k + \ldots}{b_{1,k-1}w^{k-1} + \ldots},$$

équation qui ne diffère de l'équation générale (8) que par le changement de $k+1$ en k, et qui peut, par conséquent, être étudiée de la même manière.

Remarque II. — Nous établirons aux nos **9** et **10** que le théorème $\mathcal{A}$, énoncé au no **1** (théorème relatif aux intégrales qui traversent un point transcendant), se trouve exact dans le cas de l'équation (8). Il en résulte (*cf.* no **6**) que *ce théorème reste exact lorsqu'on effectue la transformation linéaire* (10).

8. — Étude de l'équation (8) (cas général où les exposants sont finis).

L'équation (8) est comparable à l'équation (4) du n° **3**. Nous pourrons donc faire sur la singularité $x = 0$ de l'équation (8) une étude semblable à celle que nous avons faite sur le *point de Briot-Bouquet* de l'équation (4) (*voir* début du n° **3**). Pour marquer cette analogie, nous appellerons la singularité $x = 0$ de (8) *point de Briot-Bouquet d'espèce finie*.

Voyons comment se généralisent les propriétés de l'équation (4) lorsqu'on passe de cette équation à l'équation (8). Je n'entrerai pas ici dans le détail des démonstrations, et je me bornerai à énoncer les faits les plus saillants, comme je l'ai fait au n° **3**.

Considérons d'abord les premiers termes de l'équation (8), c'est-à-dire l'équation (9). Appelant $\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_{k+1}$, les $(k+1)$ racines du numérateur de (9), nous mettrons cette équation sous la forme

$$(14) \qquad y = x\varpi, \qquad x\frac{d\varpi}{dx} = \frac{\mp(\varpi - \varpi_1)(\varpi - \varpi_2)\ldots(\varpi - \varpi_{k-1})}{\varpi^k + l\varpi^{k-1} + \ldots},$$

l'intégrale générale de (14) s'écrit alors

$$(15) \qquad Cx = (\varpi - \varpi_1)^{\frac{1}{\lambda_1}}(\varpi - \varpi_2)^{\frac{1}{\lambda_2}}\ldots(\varpi - \varpi_{k+1})^{\frac{1}{\lambda_{k+1}}},$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots,$ étant donnés par les égalités

$$\lambda_1 = \frac{(\varpi_3 - \varpi_1)(\varpi_2 - \varpi_1)\ldots(\varpi_{k+1} - \varpi_1)}{\varpi_1^k + l\varpi_1^{k-1} + \ldots},$$

$$\lambda_2 = \frac{(\varpi_1 - \varpi_2)(\varpi_3 - \varpi_2)\ldots(\varpi_{k+1} - \varpi_2)}{\varpi_2^k + l\varpi_2^{k-1} + \ldots}$$

et *satisfaisant à la relation invariante*

$$(16) \qquad \lambda_1^{-1} + \lambda_2^{-1} + \ldots + \lambda_{k+1}^{-1} = -1.$$

Nous supposerons, dans ce numéro, que les nombres $\varpi_1, \varpi_2, \ldots,$ sont distincts des racines de $\varpi^k + l\varpi^{k-1} + \ldots$ [valeurs de ϖ donnant des points critiques de l'équation (14)]. Cela revient manifestement à supposer qu'aucun des exposants λ n'est infini.

Caractéristiques de l'équation (8) *à l'origine.* — Pour étudier ces caractéristiques, nous partirons de l'équation (14) et nous passerons à l'équation (8) par l'intermédiaire de l'équation (8 *bis*) qui contient le paramètre variable μ. Soient d'abord *les parties réelles* $\mathcal{R}(\lambda_1)$, $\mathcal{R}(\lambda_2)$, $\mathcal{R}(\lambda_3)$, ..., *toutes négatives.* Alors l'équation (14) n'admet [en dehors des $(k+1)$ intégrales particulières $w = w_1$, ..., $w = w_{k+1}$] aucune caractéristique qui soit finie à l'origine. Il en est de même [1] de l'équation (8); à l'exception de $(k+1)$ caractéristiques holomorphes, toutes les caractéristiques w de (8) sont infinies à l'origine; les caractéristiques y correspondantes $(y = xw)$ sont finies et holomorphes. Pour obtenir les $(k+1)$ caractéristiques exceptionnelles, nous poserons successivement

$$y = xw = x(w_1 + s), \qquad y = x(w_2 + t), \qquad \ldots,$$

Nous obtiendrons ainsi $(k+1)$ équations de Briot-Bouquet

$$xs' = \lambda_1 s + \ldots; \qquad xt' = \lambda_2 t + \ldots; \qquad \ldots$$

ayant pour intégrales

$$s = \text{développement } [2] \text{ en } x \text{ et } C_1 x^{\lambda_1},$$
$$t = \text{développement en } x \text{ et } C_2 x^{\lambda_2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

A ces développements correspondent des développements de y ordonnés par rapport aux mêmes quantités. Cela dit, faisons dans le premier développement $C_1 = 0$; nous obtenons une intégrale particulière Y_1 qui est nulle et holomorphe à l'origine $\left(\text{on a } \lim\limits_{x=0} \dfrac{Y_1}{x} = w_1\right)$; faisant de même dans le second, le troisième, etc., développement, $C_2 = C_3 = \ldots = 0$, nous obtenons des intégrales Y_2, ..., Y_{k+1} nulles et holomorphes à l'origine. Les caractéristiques w définies par les $(k+1)$ intégrales Y_1, ..., Y_{k+1} sont les seules qui soient finies à l'origine.

---

[1] Cf. *L*, Chap. IV, n° 1. Pour établir ce point, nous remontons à la forme primitive (en y) de l'équation (8). En d'autres termes, nous nous appuyons sur ce fait que dans le numérateur et le dénominateur du second membre de (8), les termes du premier degré en x sont, par rapport à x et w, de degré $k+1$ au plus, et ainsi de suite.

[2] Nous définirons plus loin les régions où ces développements convergent.

Soit maintenant $\mathcal{R}(\lambda_1) > 0, \mathcal{R}(\lambda_2) < 0, \ldots, \mathcal{R}(\lambda_{k+1}) < 0$. L'équation (8) admet alors à l'origine : 1° une infinité de caractéristiques w infinies (auxquelles correspondent des caractéristiques y finies holomorphes); 2° une caractéristique w holomorphe et égale à w_2 $\left(\text{c'est } w = \frac{Y_2}{x}\right)$, une caractéristique w holomorphe et égale à w_3 $\left(\text{c'est } w = \frac{Y_3}{x}\right)$, etc.; 3° une infinité de caractéristiques w égales à w_1; à ces dernières caractéristiques correspondent des caractéristiques y nulles et confondues en $x = 0$ (pour lesquelles, par conséquent, l'origine est point transcendant directement critique).

On fait des constatations analogues *lorsque deux, trois des* $(k+1)$ *parties réelles* $\mathcal{R}(\lambda_1)$, $\mathcal{R}(\lambda_2)$, $\mathcal{R}(\lambda_{k+1})$ *sont positives* [*il est impossible que les parties réelles soient toutes positives, puisqu'on a la relation* (16)]. Quant aux cas limites où certaines parties réelles sont nulles, nous les laisserons de côté pour le moment; ils ne présentent, d'ailleurs, aucune difficulté nouvelle (*cf.* la note de la fin du n° 5).

Mécanisme des permutations dans le cas où les exposants λ *sont des nombres complexes à parties réelles négatives* (*exemple du cas où* $k = 3$). — On peut tracer, autour de l'origine, un cercle fini γ à l'intérieur duquel le mécanisme des permutations est le même, pour l'équation (8), que pour l'équation (14). Voilà ce que nous établirons, en passant, comme d'habitude, par l'intermédiaire de l'équation (8 *bis*).

Pour simplifier l'écriture, je me contenterai de considérer ici le cas où $k = 3$. Commençons par considérer l'équation (14) où $k = 3$, et supposons, pour fixer les idées, que $\mathcal{R}(\lambda_1^{-1}) < \mathcal{R}(\lambda_2^{-1}) < \mathcal{R}(\lambda_3^{-1})$. Les points critiques des intégrales de (14) se présentent lorsque w prend l'une des deux valeurs τ_1, τ_2 qui annulent le dénominateur $w^2 + lw + m$. D'ailleurs, si nous appelons x_0 un point quelconque où l'intégrale w prend la valeur τ_1 et x'_0 un point quelconque où w prend la valeur τ_2, l'ensemble total des points critiques de l'intégrale sera donné par les formules

$$(17) \qquad x_{j,k} = x_0 e^{\frac{2ij\pi}{\lambda_1} + \frac{2ik\pi}{\lambda_2}}; \qquad x'_{j,k} = x'_0 e^{+\frac{2ij\pi}{\lambda_1}\frac{2ik\pi}{\lambda_2}},$$

où j et k sont des entiers quelconques. Chaque point critique permute deux déterminations.

Considérons, d'autre part, les valeurs prises à l'origine par les diverses caractéristiques $y(x)$ que permutent les points critiques (17). Ces valeurs sont

$$y_0 = C^{-1}, \qquad y_{j,k} = C^{-1} e^{\frac{2ij\pi}{\lambda_1} + \frac{2ik\pi}{\lambda_2}}.$$

On peut toujours disposer des indices 1, 2, 0 de manière que le point critique x_0 permute (lorsqu'on suit le rayon $x_0 O$) les déterminations y_0, $y_{1,0}$, tandis que le point x'_0 permute les déterminations $y_{1,0}$, $y_{1,1}$. On parvient (¹) alors aisément aux constatations suivantes : 1° *L'ensemble des caractéristiques issues de l'origine avec la valeur $y_{j,k}$ présente au voisinage de l'origine (si $|y_{j,k}|$ est suffisamment petit) quatre points critiques algébriques, savoir les points $x_{j,k}$, $x_{j-1,k}$, $x'_{j-1,k}$, $x'_{j-1,k-1}$*; 2° *les deux caractéristiques (suivies sur le rayon $x_{j,k}O$) que permute le point $x_{j,k}$ prennent à l'origine les valeurs $y_{j,k}$, $y_{j+1,k}$*; 3° *les deux caractéristiques que permute le point $x'_{j,k}$ prennent à l'origine les valeurs $y_{j+1,k}$, $y_{j+1,k+1}$.*

Le mécanisme ainsi défini subsiste lorsqu'on passe de l'équation (14) à l'équation (8).

En effet, le dénominateur du second membre de (8) (où $k=3$) admet deux racines de la forme

$$(18) \qquad w = \tau_1 + q_1(x), \qquad w = \tau_2 + q_2(x),$$

(¹) Soient $O\overline{x}$ un rayon quelconque issu de l'origine, $O\overline{x_1}$ le transformé de ce rayon par la transformation $\left(x, xe^{\frac{2i\pi}{x_1}}\right)$; il y a, dans l'angle $\overline{x}O\overline{x_1}$ un et un seul point critique de chacune des deux familles $x_{i,j}$, $x'_{i,j}$. Pour cette raison, il est commode de commencer par supposer que les deux racines τ_1, τ_2 de $w^2 + lw + m$ sont confondues. Supposons-les, par exemple, égales à 0. L'équation (14) coïncide avec l'équation

$$y = xw, \quad xw^2 \frac{dw}{dx} = -(w - w_1)(w - w_2)(w - w_3)$$

que j'ai étudiée ailleurs (*P.*, Chap. III, n° **18**); les points $x_{j,k}$, $x'_{j,k}$, sont confondus et $x_{j,k}$ permute les *trois* déterminations $y_{j,k}$, $y_{j+1,k}$, $y_{j+1,k+1}$. De ce cas particulier (où l'on a, si l'on peut dire, *autant* de déterminations $y_{j,k}$ que de points critiques) on passe par continuité au cas général, où il est nécessaire de distinguer deux familles de points critiques.

q_1 et q_2 étant des développements holomorphes. Lorsque l'intégrale w vérifie l'une ou l'autre de ces égalités (18), elle présente un point critique algébrique permutant deux déterminations.

Faisons alors varier μ de 0 à 1 dans l'équation (8 *bis*). Chaque point critique $x_{j,k}$ se déplace, mais jamais ne se dédouble ni ne vient se confondre avec un autre point critique; d'ailleurs, au point critique $x_{j,k}$, w satisfait toujours à la première égalité (18). On peut en dire autant des points $x'_{j,k}$ où w satisfait à la seconde inégalité (18). Partant de là, on constate que toute branche d'intégrale singulière w (ou y) présente, au voisinage de l'origine, un *double ensemble de points critiques* $x_{j,k}$, $x'_{j,k}$ *opérant exactement suivant le mécanisme décrit plus haut.*

Ces points critiques permutent à l'origine un ensemble de déterminations $y_{j,k}$.

Pour les points critiques comme pour les déterminations, LES INDICES j ET k SONT COMMUTABLES ([1]); si l'on opère la suite des permutations qui changent $y_{0,0}$ en $y_{j,0}$, puis $y_{j,0}$ en $y_{j,k}$, ou si l'on opère, au contraire, la suite des permutations qui changent $y_{0,0}$ en $y_{0,k}$, puis $y_{0,k}$ en $y_{j,k}$ on parvient à *la même détermination* $y_{j,k}$. Le point transcendant, qui est en apparence de deuxième espèce (*L.*, Chap. III, *P.*, Chap. II), est donc en réalité un *point de première espèce de la seconde sorte.* L'ensemble des déterminations peut être rangé (dans l'ordre où on les obtient) suivant une série unilinéaire; mais, originairement, cet ensemble se présente sous forme de série à double entrée [et non plus, comme il arrivait pour l'équation (4), sous forme de série simple].

Cas où l'un des exposants, λ_1, a sa partie réelle positive. — Le mécanisme des permutations pourra toujours être étudié par la même méthode. L'origine sera point transcendant à la fois *directement et indirectement* critique.

Cas où les deux exposants λ_1, λ_2 ont leur partie réelle positive. — En ce cas, l'origine est un *point transcendant directement critique du second type* (*L.*, Chap. III). Les points critiques $x_{i,j}$, $x'_{i,j}$ opèrent des permutations-impasses (*cf.* n° **5**, cas *a*).

([1]) C'est en s'appuyant sur les relations (19), données plus bas, qu'on établira le plus simplement cette commutabilité.

Quel que soit d'ailleurs celui des cas ci-dessus énumérés qu'on considère, l'agencement des points critiques montre que, si l'on envisage deux points critiques x', x'' présentés, au voisinage de l'origine, par une intégrale suivie sur un chemin direct, la fonction $x''(x')$ ne peut s'annuler que pour $x' = 0$. C'est le théorème ℬ du n° **1** (*cf.* n° **5**).

Représentation de l'ensemble des déterminations qui se permutent au voisinage de l'origine. — Faisant, pour fixer les idées, $k = 3$, plaçons-nous, par exemple, dans l'hypothèse où les parties réelles des trois exposants sont négatives. Les branches d'intégrales qui s'échangent au voisinage de l'origine seront représentées *dans les couronnes circulaires de centre* O par les développements de Briot-Bouquet en x et $C_1 x^{\lambda_1}$, x et $C_2 x^{\lambda_2}$, x et $C_3 x^{\lambda_3}$. Les couronnes où les développements convergent sont limitées par des cercles concentriques; dans les cercles intérieurs aux couronnes il y a des points critiques algébriques.

Appelons γ le bord extérieur d'une couronne où les trois développements soient convergents pour les petites valeurs de $|C_1|$, $|C_2|$, $|C_3|$, et prenons sur γ un point fixe $\overline{x}$. Lorsqu'à partir d'une détermination représentée par l'un des trois développements, on tourne indéfiniment (dans un sens convenable) sur le contour γ, on obtient en $\overline{x}$ un ensemble infini de déterminations qui converge vers l'une des limites $Y_1(\overline{x})$, $Y_2(\overline{x})$, $Y_3(\overline{x})$; d'ailleurs les points critiques autour desquels on se trouve tourner se rapprochent de plus en plus de l'origine.

Considérons, d'autre part, un chemin du plan x qui traverse le cercle γ de $\overline{x}$ en $\overline{x_1}$ et une intégrale y (définie par la valeur $\overline{y}$ qu'elle prend en $\overline{x}$) suivie sur ce chemin. Je constate que *l'intégrale y ne peut présenter des points critiques confondus à l'origine que lorsqu'elle coïncide avec l'une des trois intégrales nulles et holomorphes à l'origine* Y_1, Y_2, Y_3.

Posons-nous enfin la question suivante : *Quelles valeurs faut-il donner à* C_1, C_2, C_3 *dans les trois développements pour obtenir (en un point tel que $\overline{x}$) l'ensemble des déterminations d'une même intégrale qui se permutent au voisinage de l'origine? L'ensemble*

des valeurs cherchées est donné par la double égalité

$$C^{\lambda_1^{-1}} = h_2 C^{\lambda_2^{-1}} = h_3 C^{\lambda_3^{-1}} \tag{19}$$

où h_2 et h_3 sont des constantes (arbitraires, car les valeurs de C_1, C_2, C_3 ne sont déterminées qu'à un facteur constant près). Supposons maintenant qu'on ait $\mathcal{R}(\lambda_1) > 0$, $\mathcal{R}(\lambda_2) < 0$, $\mathcal{R}(\lambda_3) < 0$. Nous parviendrons à des conclusions analogues, le développement en $C_1 x^{\lambda_1}$ convergeant cette fois, non plus dans une couronne circulaire, mais dans un cercle de centre $x = 0$. Considérons, d'autre part, le chemin du plan x qui traverse γ de $\overline{x}$ en $\overline{x_1}$, et l'intégrale y suivie sur ce chemin : l'intégrale ne peut présenter des points critiques confondus à l'origine que si elle coïncide avec Y_2 ou Y_3 (*cf.* n° **3**, cas *a*).

Dans le cas où $\mathcal{R}(\lambda_1) > 0$, $\mathcal{R}(\lambda_2) > 0$, $\mathcal{R}(\lambda_3) < 0$, l'intégrale ne peut présenter des points critiques algébriques confondus avec l'origine que si elle coïncide avec Y_3.

Cas où un ou plusieurs λ sont réels. — J'ai supposé tout à l'heure que les exposants λ étaient complexes. Lorsque certains de ces exposants deviennent réels, les résultats énoncés ci-dessus sont en défaut. Ainsi, pour étudier complètement la singularité $x = 0$ de l'équation (8), il faudrait, comme nous l'avons fait au n° **3**, distinguer et examiner successivement un grand nombre de cas différents. On ne rencontrerait d'ailleurs pas de difficulté nouvelle et l'on obtiendrait, *mutatis mutandis*, les mêmes résultats [1] qu'au n° **3**. Reprenons, en particulier, le chemin $\overline{x}\,\overline{x_1}$ traversant l'aire γ et l'intégrale y suivie sur ce chemin; nous pouvons affirmer que l'intégrale y ne saurait présenter des points critiques confondus à l'origine que lorsqu'elle coïncide avec l'une des intégrales *holomorphes Y_j correspondant à des exposants λ_j dont la partie réelle est négative.*

Ce résultat général se trouve ainsi établi pour tous les types de singularités que nous avons envisagés jusqu'ici. Nous en déduisons le théorème $\mathcal{A}$ de l'*Introduction*.

---

(1) Lorsqu'un développement en x, $C_j x^{\lambda_j}$ cesse d'exister, il est remplacé par un développement où entrent des termes logarithmiques. L'intégrale holomorphe Y_j subsiste si $\lambda_j < 0$, disparaît si λ_j est entier positif.

9. — Études de l'équation (8) (cas exceptionnels où certains λ sont nuls).

La relation (16) nous montre que le nombre des exposants λ qui s'annulent en même temps est au moins égal à 2. Supposons donc (en faisant de nouveau $k = 3$ pour fixer les idées) que $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. En ce cas $w_2 = w_3$, et l'intégrale générale de l'équation réduite (14) prend la forme

$$\text{(20)} \qquad Cx = \frac{e^{\frac{a}{w - w_1}}}{w - w_2}\left(\frac{w - w_1}{w - w_2}\right)^{\frac{1}{\lambda_1}}.$$

Cette intégrale possède une double série de points critiques, savoir : les points

$$x_0,\ x_0\, e^{\frac{2q\pi}{\lambda_1}}, \qquad x'_0 + x'_0\, e^{\frac{2q\pi}{\lambda_1}}.$$

A l'origine, elle présente : 1° une infinité de caractéristiques nulles et confondues; 2° des caractéristiques infinies, dont les produits par x sont

$$y_0 = C^{-1}, \qquad y_1 = C^{-1} e^{\frac{2i\pi}{\lambda_1}}, \qquad \ldots.$$

Les diverses déterminations y_j et les déterminations nulles à l'origine s'échangent suivant un certain mécanisme qui n'est pas altéré lorsqu'on passe de l'intégrale générale (20) à l'intégrale de l'équation (8). Dès lors, nous pouvons appliquer à l'équation (8) (pour laquelle $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$) les conclusions du n° 4. L'équation (8) possède, à l'origine, *deux intégrales particulières nulles et holomorphes, savoir* Y_1 et Y_2. Demandons-nous, en particulier, pour quelles valeurs de $\overline{y}$ l'intégrale y suivie sur le chemin $\overline{x}\,\overline{x_1}$ du n° 8 peut présenter des points critiques confondus en $x = 0$. Nous constatons que cette circonstance ne peut se présenter que lorsque $\overline{y}$ est égal à $Y_1(\overline{x})$ ou $Y_2(\overline{x})$.

10. — Études de l'équation (8) : points transcendants multiples.

Supposons maintenant que l'un des exposants λ, par exemple λ_1, soit *infini*. Cette circonstance se présente lorsque w_1 *coïncide avec l'une des racines* τ_1, τ_2 *de* $w^2 + hw + m$ (*voir* début du n° 8).

Je dis que, *lorsque* λ_1 *devient infini*, PLUSIEURS POINTS TRANSCENDANTS DE L'ÉQUATION (8) VIENNENT A SE CONFONDRE (*cf.* début du n° 5).

En effet, récrivons l'équation générale (8) où k est quelconque

$$(8) \qquad y = xw, \qquad x\frac{dw}{dx} + w = \frac{a_{k0} + a_{k-1,1}w + \ldots + x^{-k}P_{k+1}}{b_{k0} + b_{k-1,1}w + \ldots + x^{-k}Q_{k+1}}.$$

Si je suppose, pour fixer les idées que le dénominateur s'annule pour $x = w = 0$, j'aurai $b_{k_0} = 0$. Commençons par *supposer, d'autre part*, que $b_{k-1,1} \neq 0$. Dans ces conditions, le dénominateur de l'équation (8) admet (au voisinage de $x = 0$) une racine unique $w = q(x)$ qui s'annule avec x.

Effectuons le changement de variable

$$y = xw = x[q(x) + v],$$

l'équation (8) devient

$$(21) \qquad x\frac{dv}{dx} + xq'(x) + q(x) + v = \frac{a_{k0} + a_{k-1,1}v + \ldots}{v[b_{k-1,1} + \ldots]},$$

le crochet ne s'annulant pas au voisinage de $x = v = 0$. Les intégrales de (21) sont critiques toutes les fois que v s'annule. Supposons maintenant que a_{k_0} approche de 0; nous voyons que le numérateur de $\frac{dv}{dx}$ s'annulera avec v pour une valeur de x voisine de 0 (non-nulle); l'équation (21) admet donc, au voisinage de l'origine, un second point transcendant, ξ, lequel vient se confondre avec 0 lorsque a_{k_0} tend vers 0.

Supposons, plus généralement, que dans le numérateur de (21), le terme indépendant de v dont le degré en x est le plus bas, soit le terme de degré $n - 1$; alors *n points transcendants (appartenant aux catégories étudiées ci-dessus) sont venus se confondre à l'origine.*

Cette conclusion subsiste manifestement lorsque $b_{k-1,1}$ tend vers 0 en même temps que $a_{k.0}$, $a_{k+1.0}$, ...

Les points transcendants multiples de la classe A peuvent, en général, être regardés comme des points transcendants de la classe C (*cf.* n° 5, et les notes au début de ce numéro). D'ailleurs, si l'on veut analyser en détail les propriétés d'un point multiple de la classe A, il sera nécessaire d'étudier directement l'équation (8), en considérant le

mécanisme des permutations opérées au voisinage du point multiple comme une combinaison de mécanismes relatifs à des points transcendants simples.

Mais, proposons-nous simplement de démontrer le théorème $\mathcal{A}$. Nous pourrons suivre, à cet effet, la méthode du n° **5**.

Partons d'un point critique x' voisin de l'origine et considérons, sur le prolongement du rayon Ox', les caractéristiques qui se permutent au point x'. Nous démontrerons que, lorsque x' tend vers o, ces caractéristiques tendent vers des limites isolées. Il nous restera ensuite à déterminer ces limites.

1° *Soit d'abord* $a_{k-1,1} \neq 0$, $b_{k-1,1} \neq 0$. En ce cas, un seul exposant, λ_1, devient infini [si plusieurs λ devenaient infinis en même temps, $w_1 = 0$ serait racine multiple du numérateur de (14) et l'on aurait $a_{k-1,1} = 0$]. Il en résulte que les intégrales $Y_2, \ldots, Y_{k+1}$, nulles et holomorphes à l'origine, existent et peuvent être formées comme dans le cas général.

Cela posé, je démontrerai comme au n° **5** que, lorsque x' tend vers o, les caractéristiques suivies sur le prolongement de Ox' tendent vers $Y_2, \ldots, Y_{k+1}$, ou vers la limite (*pour* λ_1 *infini*) de l'intégrale Y_1.

L'existence de cette dernière limite, que l'étude de l'équation (21) permettrait de déceler, sera établie au n° **17**. Faisons en effet (dans l'hypothèse où le point transcendant est double) le changement de variable $v = x\theta$; nous obtenons une équation de la forme (32) (*cf. infra*, n^{os} **16** et suiv.). La limite de Y_1 est une caractéristique qui tend vers o (en même temps que x') le long du rayon aboutissant en x'.

S'il y a plus de deux points transcendants confondus à l'origine, on devra faire un changement de variable de la forme $v = x^{n-1}\theta$.

Les limites obtenues pour les intégrales $Y_2, \ldots, Y_{k+1}$ et Y_1 étant isolées, nous aurons comme toujours le théorème $\mathcal{A}$.

2° *Soit maintenant* $a_{k-1,1} \neq 0$, $b_{k-1,1} = 0$. — Supposons que dans l'équation

$$(22) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{a_{k-1,1}x^{k-1}y + \ldots + a_{0k}y^k + P_{k+1}}{b_{k-2,2}x^{k-2}y^2 + \ldots + b_{0k}y^k + Q_{k+1}}$$

nous fassions le changement de variables (cf n° 7),

$$(23) \qquad x = \alpha_0 t + \alpha_1 u, \qquad y = u,$$

L'équation transformée sera de même forme que l'équation (22), et nous pourrons toujours faire en sorte que, dans cette équation, les coefficients de $t^{k-1}u$ soient différents de zéro dans le numérateur et dans le dénominateur. Nous serons alors ramenés au cas précédent.

Le théorème $\mathcal{A}$ relatif à l'intégrale qui traverse un point transcendant, ne cesse pas d'être exact lorsqu'on effectue un changement de variable linéaire ($cf.$ n° 6). Il est donc encore vrai dans le cas actuel.

3° *Soit, en troisième lieu,* $a_{k-1,1} = 0$. Ce cas se présente lorsque plusieurs λ sont infinis en même temps. On pourra le ramener aux cas précédents en opérant une double transformation linéaire

$$x = \alpha_0 t + \alpha_1 u, \qquad y = \beta_0 t + \beta_1 u.$$

Pour étudier directement la limite, définie plus haut, de l'intégrale Y_1 (c'est-à-dire la limite vers laquelle tend sur le prolongement de Ox' la caractéristique Y_1 lorsque deux ou plusieurs points transcendants viennent se confondre à l'origine) on devra faire sur l'équation en v le changement de variables : $x = \xi^2$, $v = \xi\omega$, ou plus généralement, un changement de variables de la forme

$$(24) \qquad x = \xi^p, \qquad v = \xi^q \theta.$$

Mais, suivant que $b_{k-1} \neq 0$ ou $b_{k-1,1} = 0$, des circonstances différentes se présenteront.

Lorsqu'on a $b_{k-1,1} \neq 0$ (avec $a_{k-1,1} = 0$) la limite de l'intégrale Y_1 est en général une intégrale holomorphe. En d'autres termes, l'équation (8) possède alors, en général, des intégrales holomorphes prenant à l'origine la valeur v correspondant aux λ infinis.

Écrivons en effet l'équation (8) sous la forme (21) (*vide supra*)

$$(21) \qquad xv\frac{dv}{dx} = \lambda v^2 + \text{termes en } v^3, \ldots, x, \ldots, xv, \ldots,$$

où le second membre est convergent pour les petites valeurs de x et de v. Supposant d'abord que le coefficient du terme en x ne soit pas nul, faisons le changement de variable indépendante $x = \xi^2$. L'équa-

tion (21) s'écrira

$$\xi v \frac{dv}{d\xi} = 2\lambda v^2 + c\xi^2 + \text{termes en } \xi^2 v,\ v^3,\ \ldots.$$

Posons alors $v = \xi\theta$; nous aurons l'équation en θ,

$$\xi\theta \frac{d\theta}{d\xi} + \theta^2 = 2\lambda\theta^2 + c + \text{termes en } \xi\theta,\ \xi\theta^3,\ \ldots.$$

On voit que $\left(\text{sauf pour } \lambda = \frac{1}{2}\right)$ l'équation en θ est du type (27) étudié aux n[os] **12-13**. Elle possède, en général, deux intégrales θ finies et holomorphes à l'origine.

Lorsque (¹) le coefficient du terme en x est nul dans (21), le coefficient du terme en xv n'étant pas nul, nous conserverons la variable indépendante x et poserons $v = x\theta$. L'équation (21) s'écrira

$$x\theta \frac{d\theta}{dx} + \theta^2 = \lambda\theta^2 + c\theta + d + \text{termes en } x,\ x\theta,\ \ldots.$$

Cette équation est encore du type (27).

D'une manière générale, un changement de variables de la forme $x = \xi^p$, $v = \xi^q\theta$ permettra de mettre en évidence des intégrales v nulles et holomorphes à l'origine.

Lorsqu'on a, à la fois $a_{k-1,1} = 0$, $b_{k-1,1} = 0$, les résultats précédents ne s'appliquent plus. En ce cas, nous ne pouvons plus faire le changement de variable

$$y = xw = x[yq(x) + v].$$

Nous devons étudier directement l'équation en w en faisant la transformation $x = \xi^p$, $v = \xi^q\theta$. Ainsi, en effectuant sur l'équation

$$(24)\qquad xw' + w = \frac{a_{k-2,2}w^2 + \text{termes en } x,\ xw,\ w^3,\ \ldots}{b_{k-2,2}w^2 + \text{termes en } x,\ xw,\ w^3,\ \ldots},$$

(¹) Une transformation linéaire permettra souvent de ramener ce cas au précédent.

la transformation $x = \xi^2$, $w = \xi\omega$, nous obtenons l'équation en ω,

$$\xi^2 \frac{d\omega}{d\xi} + 3\xi\omega = \frac{2a_{k-2,2}\omega^2 + c\omega + d + \text{termes en } \xi, \xi\omega, \ldots}{b_{k-2,2}\omega^2 + c'\omega + d' + \text{termes en } \xi, \xi\omega, \ldots},$$

qui est une équation du type (32).

Nous avons supposé ci-dessus que le numérateur et le dénominateur de l'équation réduite (14) avaient une racine commune $w = 0$. Nos conclusions s'étendent facilement au cas *où ce numérateur et ce dénominateur ont plusieurs racines communes distinctes.*

Soit toujours x' un point critique voisin de l'origine. Les caractéristiques issues de ce point critique et suivies sur le prolongement de Ox', tendent vers des limites isolées lorsque x' tend vers 0.

Le théorème A se trouve ainsi établi pour toutes les singularités de la classe A.

11. — Remarques. — Généralisations possibles.

Les résultats qui précèdent ne sont point particuliers au cas où l'équation (8) [ou l'équation (22)] est rationnelle. Imaginons, en effet, que dans (22) nous substituions à P_{k+1} et Q_{k+1} des développements convergents quelconques (en x et w) dont tous les termes soient de degré supérieur à k; tous les raisonnements que nous avons faits resteront valables.

Il est une autre généralisation que nous devons tenter. Considérons l'équation

$$(25) \qquad x\frac{dw}{dx} = \frac{c_k w^k + \ldots + c_0 + \text{termes en } x, xw, \ldots}{d_{k-1} w^{k-1} + \ldots + d_0 + \text{termes en } x, xw, \ldots}.$$

Cette équation ne diffère de l'équation (8) qu'en ce que le rapport $\frac{c_k}{d_{k-1}}$ est quelconque au lieu d'être égal à -1. En quoi les conclusions obtenues pour l'équation (8) seront-elles modifiées si l'on remplace cette équation par l'équation (25)?

Si nous supprimons, dans (25), les termes non explicitement écrits,

nous obtenons une équation réduite dont l'intégrale générale est

$$C x = (w - w_1)^{\frac{1}{\lambda_1}} \dots (w - w_{k+1})^{\frac{1}{\lambda_{k+1}}}, \tag{26}$$

intégrale de même forme que l'intégrale (15) de l'équation (14) mais *où les λ ne sont plus liés par la relation* (16). A cette circonstance près le mécanisme des permutations de l'intégrale générale (26) est semblable aux mécanismes que nous avons décrits en étudiant l'intégrale (15).

Comment étendre, maintenant, à l'équation (25) les résultats obtenus pour l'équation réduite? C'est ici qu'apparaît une difficulté nouvelle. En effet, lorsque nous avions affaire à l'équation (8), nous savions *qu'au voisinage de la singularité transcendante* $x = 0$, x et $y (= xw)$ *restaient voisins de* 0. C'est cette circonstance qui nous a permis d'affirmer que les intégrales de l'équation (8 *bis*) (où figure le paramètre μ) étaient fonctions continues de μ. Pour l'équation (25) les conditions sont différentes. Nous ne pouvons plus nous servir de y, et tout ce que nous savons *a priori* sur la singularité transcendante, c'est que, dans l'équation en w, l'origine est un pôle du coefficient différentiel, quel que soit w. Nous avons donc affaire ici à la *singularité la plus générale de la classe* B (*cf.* n° **12**).

Ceci n'empêche pas, bien entendu, qu'il existe des équations (25) immédiatement réductibles à l'équation (8). Remarquons, en effet, qu'il suffit de faire $b_{0k} = 0$, $a_{0k} \neq b_{1,k-1} \neq 0$ pour que l'équation (8) prenne la forme

$$x \frac{dw}{dx} = \frac{(a_{0k} - b_{1,k-1}) w^k + \dots}{b_{1,k-1} w^{k-1} + \dots}. \tag{25 bis}$$

Plus généralement, effectuons sur x et y la transformation linéaire définie à la fin du n° **7**. Nous pouvons toujours (*voir* ce numéro) déterminer les coefficients α_1 et β_1 de manière à annuler le coefficient de u^k dans le dénominateur du second membre de (11). L'équation (11) prend alors la forme (25 *bis*).

En d'autres termes, il suffit d'effectuer sur les variables x, w une transformation rationnelle pour passer de (8) à (25 *bis*) ou réciproquement. Mais puisqu'on a le choix, il est naturellement préférable de toujours ramener (par une transformation linéaire) l'équation (2) pro-

posée à une équation pour laquelle les exposants λ sont liés par la relation (16). Faute de prendre cette précaution, on masque l'*espèce* du point transcendant (*voir les définitions* données au Chap. III de $L.$, Chap. II de $P.$).

12. — Points transcendants de la classe B.

Supposons que, quel que soit y, l'origine $x = 0$ soit un pôle du premier ordre du coefficient différentiel $\frac{P}{Q}$ de l'équation (2). L'origine est alors un point transcendant de la classe B.

Développant P et Q par rapport aux puissances de x, nous mettrons l'équation (2) sous la forme

$$x\frac{dy}{dx} = \frac{p_0(y) + xp_1(y) + \ldots}{q_0(y) + xq_1(y) + \ldots}, \tag{27}$$

où les p et q sont des polynomes en y.

J'ai le droit de supposer que *tous les polynomes p sont du même degré, ainsi que tous les polynomes q, le degré des p surpassant de deux unités celui des q.* Supposons, en effet, qu'il en soit autrement. Appelant g un nombre quelconque qui ne soit racine d'aucun des polynomes p et q, j'effectue le changement de variable $u = \frac{1}{y-g}$; j'obtiens une équation en u, de même forme que l'équation (18), qui satisfait à la condition énoncée. Il en est de même de l'équation (27) obtenue en faisant le changement de variable $\left(v = \frac{1}{u} = y - g\right)$.

Je supposerai donc que les polynomes p soient de *degré* en y et les q de degré $m - 2$.

Nous avons dit (n° **11**) que l'étude de l'équation réduite

$$x\frac{dy}{dx} = \frac{p_0(y)}{q_0(y)} \tag{28}$$

pouvait être faite par les méthodes que nous avons développées ailleurs.

Mais comment passer de l'équation (28) à l'équation (27)? Il faut, pour cela, connaître au préalable l'allure des caractéristiques de (27)

QUI PRÉSENTENT DES POINTS CRITIQUES ARBITRAIREMENT PRÈS DE L'ORIGINE.

Cherchons donc à nous faire une idée de cette allure.

Soit g' une valeur finie quelconque, distincte des zéros de $p_0(y)$. Il ne peut pas [1] arriver qu'une caractéristique $y(x)$ de (27) tende vers g' lorsque x tend vers o. Plus précisément, soit $\overline{x}$ un point voisin de l'origine où y prenne la valeur g' : je dis qu'*on peut décrire, autour de* $\overline{x}$, *un cercle de rayon* $\alpha|\overline{x}|$, (*α nombre positif arbitrairement petit*), *tel qu'on ait :*

Dans le cercle et sur son contour : $|y - g'| < 2\beta$;
Sur le contour du cercle : $|y - g'| \geqq \beta$,

β (*fonction de α*) *restant supérieur à une limite fixe lorsque* $\overline{x}$ *tend vers* o.

En effet [2], appelons γ un petit cercle de centre $x = 0$ duquel nous nous interdirons de faire sortir x, et soit H un grand nombre positif. Nous pouvons déterminer un nombre k tel que, pour x intérieur à γ et $|y| < H$, l'équation (27) donne [3]

$$\left|\frac{q_0(y)}{p_0(y)}dy - \frac{dx}{x}\right| < k\,|dx|. \tag{29}$$

Partons alors de $\overline{x}$ (où $y = g'$) et intégrons sur un rayon $\overline{x}\,\overline{x_1}$ issu de ce point. Appelant g_1 la valeur de y atteinte en $\overline{x_1}$, nous aurons, d'après (29),

$$\left|\int_{g'}^{g_1}\frac{q_0}{p_0}dy - \log\frac{\overline{x_1}}{\overline{x}}\right| < k\,|\overline{x_1} - \overline{x}|. \tag{30}$$

---

(1) M. Painlevé a énoncé le théorème suivant que le nôtre précise : *Soit $y(x)$ une intégrale. Si, pour une valeur de A, l'égalité $y(x) = A$ a une infinité de racines, elle en a une infinité quel que soit A, exception faite pour un nombre fini de valeurs de A qui se calculent algébriquement sur l'équation* (*Notice sur les travaux scientifiques de M. Painlevé*, p. 44).

(2) Je n'insiste pas sur cette démonstration que j'ai déjà exposée plusieurs fois (cf. *L.*, Chap. II, passim).

(3) Cette démonstration pourrait être en défaut, si g' était racine de q_0. Mais, en ce cas (étant donné que g' n'annule pas p_0), y' tend vers l'infini quand y se rapproche de g' et il est aisé de vérifier directement la proposition énoncée.

Mais l'intégrale $\int \frac{q_0}{p_0} dy$ est (pour y voisin de g') une fonction continue de y, et l'on peut, par conséquent, déterminer β de manière que l'inégalité $|g_1 - g'| < \beta$ entraîne

$$\left| \int_{g'}^{g_1} \frac{q_0}{p_0} dy \right| < \varepsilon \qquad (\varepsilon \text{ donné}).$$

Supposons alors que, lorsque $\overline{x_1}$ s'éloigne de $\overline{x}$ sur le rayon considéré, $g_1 - g'$ reste inférieur à β aussi longtemps que $|\overline{x_1} - \overline{x}| \leqq \alpha |\overline{x}|$; l'inégalité (30) exige que α tende vers o en même temps que β, quel que soit $\overline{x}$ voisin de o. Si donc on se donne une valeur non-nulle de α, on peut déterminer un nombre β tel qu'on ait (lorsque $|\overline{x}|$ est petit),

$$\text{pour } |\overline{x_1} - \overline{x}| \leqq \alpha \qquad |g_1 - g'| < 2\beta,$$
$$\text{pour } |\overline{x_1} - \overline{x}| = \alpha \qquad |g_1 - g'| \geqq \beta.$$

C. Q. F. D.

La proposition précédente est encore vraie si la valeur g' devient infinie. En effet (grâce au changement de variable supposé effectué au début de ce numéro), la transformation $v = y - 1$ change l'équation (27) en une équation de même forme, pour laquelle aucun des polynomes p et q ne s'annule avec v. Soit alors H un nombre supérieur à toutes les racines de $p_0(y)$. On peut déterminer *un nombre* α (*tendant vers* o *avec* $\overline{x}$) *tel que, sur tout rayon issu de* $\overline{x}$, *une branche* y *surpassant (en module) la valeur* 2 H *au point* $\overline{x}$, *devienne inférieure à* H *(en module) dès que* $|x - \overline{x}| < |\overline{x}|(1 - \alpha)$.

Considérons alors une branche $y(x)$ quelconque sur un chemin l du plan x tendant vers le point transcendant $x = 0$. Ou bien $|y|$ reste inférieur à H sur ce chemin, ou bien le chemin l traverse certains cercles, c, de centre $\overline{x}$ et de rayon $\alpha|\overline{x}|$ où $|y| > \text{H}$. Ces cercles c sont sûrement, d'après ce qui précède, extérieurs les uns aux autres. Nous pouvons donc [1] (sans altérer la branche suivie) déformer le chemin l de manière qu'il ne traverse jamais aucun cercle c où $|y| > \text{H}$

(1) Cf. *L.*, Chap. II, § II, III, IV.

(du moins tant que x est intérieur à un cercle γ, de centre $x = 0$, suffisamment petit).

C'est grâce à cette circonstance que nous pourrons ramener l'étude de l'équation (27) à l'étude de l'équation

$$x\frac{dy}{dx} = \frac{p_0}{q_0} + \mu(\ldots) \tag{27 bis}$$

qui coïncide avec l'équation réduite (28) pour $\mu = 0$ et avec l'équation (27) pour $\mu = 1$. En dehors des cercles c où $|y|$ est très grand, le second membre de (27) sera, en effet, fonction continue de x, y et μ.

Considérons, en particulier, un chemin direct quelconque, tendant vers l'origine, sur lequel $|y|$ reste inférieur à H (il est toujours possible de tracer une infinité de tels chemins, puisque les cercles c sont extérieurs les uns aux autres). Nous constaterons que (sauf dans certains cas exceptionnels que nous signalerons au n° **15**), les branches d'intégrale de (27 *bis*), suivie sur le chemin considéré, tendent vers la même limite que la branche correspondante de (28), c'est-à-dire vers *une racine de* $p_0(y)$.

L'étude de la singularité transcendante $x = 0$ de (27) se décompose donc en deux problèmes [1] :

1° Problème restreint. — *Étude d'une branche d'intégrale qui tend vers une racine* y_j *de* $p_0(y)$ *lorsque* x *tend vers* 0.

2° Problème général. — *Étude de l'ensemble des branches d'une intégrale qui peuvent se permuter arbitrairement près de l'origine.*

Le problème restreint se ramènera, en général, immédiatement aux problèmes que nous avons traités aux n^{os} **5-9**. Mais, parmi les branches, que nous étudierons ainsi, il en est qui se permutent, arbitrairement près de l'origine, avec d'autres branches tendant (lorsque x tend vers 0) vers différentes racines de $p_0(y)$.

---

[1] Sur les généralisations possibles des résultats obtenus pour l'équation (27), *voir* n° **20**.

13. — Classe B (*suite*). — Cas où les racines de $p_0(y)$ sont simples et distinctes des racines de $q_0(y)$.

En ce cas, l'équation réduite (28) a pour intégrale générale

$$Cx = (y - y_1)^{\frac{1}{\lambda_1}}(y - y_2)^{\frac{1}{\lambda_2}} \dots (y - y_m)^{\frac{1}{\lambda_m}},$$

$y_1, \dots, y_m$ étant les racines de p_0. C'est l'intégrale que nous avons déjà écrite au n° **1**, mais, ici, *les exposants* λ *satisfont à la relation* $\Sigma\lambda_j^{-1} = 0$ puisque $\frac{p_0}{q_0}$ est de degré 2 en y.

Les caractéristiques à l'origine. — Considérons une intégrale y de l'équation (27) qui présente des points critiques très voisins de l'origine. Sur tout rayon aboutissant à l'origine, la branche y tend vers une limite [1] et cette limite est une racine y_j de $p_0(y)$ *à laquelle correspond un exposant* λ_j *dont la partie réelle est positive.* A chaque racine y_j, pour laquelle $\mathcal{R}(\lambda_j) > 0$, correspond, réciproquement, un ensemble de caractéristiques confondues à l'origine. Ces caractéristiques sont représentées [2] par un développement en x et $C_j x^{\lambda_j}$ (obtenu, comme d'habitude, en posant $y = y_j + t$).

Soit maintenant y_k une racine de p_0 pour laquelle $\mathcal{R}(\lambda_k) \leqq 0$. L'équation (27) admet *une et une seule intégrale égale à* y_k *à l'origine.* Pour obtenir cette intégrale, que j'appellerai Y_k, on forme le développement en x et $C_k x^{\lambda_k}$, et l'on y fait $C_k = 0$.

Il n'y a pas, à l'origine, d'autres caractéristiques que celles que nous venons d'énumérer.

Mécanisme des permutations et représentation de l'ensemble des déterminations qui se permutent au voisinage de l'origine [3]. —

---

[1] Exceptionnellement si un exposant λ_j est purement imaginaire, il y a des caractéristiques qui restent indéterminées (*finies*) lorsque x tend vers 0.

[2] Sauf peut-être lorsque λ_j est un entier.

[3] Je suppose, dans les énoncés qui suivent, que les λ ne sont pas des nombres rationnels. Les théorèmes $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ seront facilement étendus au cas des λ rationnels, ainsi que nous l'avons vu.

Les intégrales de (27) présentent des points critiques lorsque y devient égal à l'une quelconque des racines de $q_0(y)$. Les points critiques ainsi obtenus permutent un ensemble infini de déterminations suivant un mécanisme que nous saurons déterminer (*cf.* nos **8** et **11**); ce mécanisme ne diffère pas, en effet, du mécanisme des permutations défini par l'équation réduite (28); nous l'étudierons au moyen de nos méthodes habituelles et le théorème $\mathcal{B}$ de l'*Introduction* se trouvera vérifié une fois de plus.

Nous avons dit que les caractéristiques qui se permutent *directement* autour de l'origine sont représentées par les développements de Briot-Bouquet en x, $C_j x^{\lambda_j}$. Pour obtenir les caractéristiques en un point $\bar{x}$ voisin, mais distinct de l'origine, considérons les développements de Briot-Bouquet correspondant aux *exposants* λ_j *dont la partie réelle est négative ou nulle. Ces développements sont convergents dans des couronnes circulaires de centre* o. Ils représentent la totalité des caractéristiques qui se permutent au voisinage de l'origine (*cf.* n° **8**).

Le théorème $\mathcal{A}$. — Revenons maintenant au chemin $\bar{x}\bar{x}_1$ qui traverse le petit contour γ décrit autour de $x = 0$, et à l'intégrale y (définie par la valeur $\bar{y}$ qu'elle prend en $\bar{x}$) suivie sur ce chemin. Nous constatons que *l'intégrale y ne peut présenter des points critiques confondus avec le point transcendant $x = 0$ que si elle coïncide avec l'une des intégrales Y_k dont l'indice correspond à un exposant λ de partie réelle négative ou nulle.*

Nous déduisons de là le théorème $\mathcal{A}$ (*cf.* n° **8**).

14. — Cas où $p_0(y)$ a des racines multiples.

Ce cas se présente lorsque certains exposants λ deviennent nuls (en vertu de la relation $\Sigma\lambda_j^{-1} = 0$, le nombre des exposants λ qui s'annulent en même temps est au moins égal à 2). Supposons, par exemple, que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Alors $y_1 = y_2$, et l'intégrale générale de l'équation réduite (28) prend la forme

$$(31) \qquad Cx = e^{\frac{a}{y - y_1}}\left(\frac{y - y_3}{y - y_1}\right)^{\frac{1}{\lambda_3}} \cdots \left(\frac{y - y_m}{y - y_1}\right)^{\frac{1}{\lambda_m}}.$$

Le mécanisme des permutations est alors semblable au mécanisme décrit aux n^os **4** et **9**. L'équation (27) possède à l'origine $m-1$ intégrales particulières nulles et holomorphes. Et, sur le chemin $\overline{x}\,\overline{x_1}$, ces intégrales sont les seules qui puissent présenter des points critiques confondus avec le point transcendant.

15. — Points transcendants multiples (cas où p_0 et q_0 ont des racines communes).

Supposons que l'un des exposants λ, par exemple λ_1, soit *infini*. Cette circonstance se présente lorsque y_1 coïncide avec l'une des racines de $q_0(y)$. *Plusieurs points transcendants de l'équation* (27) *viennent alors se confondre.*

Je ne ferai point ici l'étude détaillée des points transcendants multiples de (27). Je me contente de noter que tous les résultats énoncés au n° **10** sont applicables à l'équation (27). Ces résultats, en effet, ne dépendent d'aucune hypothèse relative à la valeur des coefficients de (8).

Ainsi, je puis encore, dans le cas du point transcendant multiple, énoncer le théorème A. *Ce théorème se trouve donc établi pour toutes les singularités de la classe* B.

Remarque. — Nous savons que les intégrales y de notre équation (27) ne peuvent tendre vers l'infini sur un rayon aboutissant en $x=0$. J'en conclus que si j'effectue la double transformation linéaire

$$x=\alpha_0 u+\alpha_1 v, \qquad xy=\beta_0 u+\beta_1 v,$$

la variable u tend vers 0 en même temps que x. Ainsi, l'étude des intégrales $y(x)$ singulières au voisinage de $x=0$, et l'étude des intégrales $v(u)$ singulières au voisinage de $u=0$, sont deux problèmes équivalents. C'est pourquoi les conclusions du n° **10** sont encore valables dans le cas présent.

16. — Points transcendants de la classe C. Caractérisques à l'origine.

Nous allons aborder, maintenant, la troisième classe (*classe* C) de points transcendants signalés au n° **2**. Nous supposerons, en d'autres

termes, que, quel que soit y_1 l'origine $x = 0$ soit un pôle d'ordre n du coefficient différentiel $\frac{P}{Q}$ de l'équation (2). Développant P et Q par rapport aux puissances de x, nous mettrons de nouveau l'équation (2) sous la forme

$$(32) \qquad x\frac{dy}{dx} = \frac{p_0(y) + xp_1(y) + \ldots}{q_0(y) + xq_1(y) + \ldots} \qquad (p \text{ et } q \text{ polynomes en } y).$$

D'ailleurs, après avoir fait, au besoin, le changement de variable $\left(u, \frac{1}{y - g}\right)$, nous avons toujours le droit (*cf.* n° **12**) de supposer que *tous les p sont d'un même degré* (m) *en* y, *tous les q étant de degré* $m - 2$.

Proposons-nous, en premier lieu, d'étudier *l'allure des caractéristiques de* (32) *qui présentent des points critiques arbitrairement rapprochés de l'origine*. Nous suivrons, à cette fin, la même marche qu'au n° **12**.

Soit g' une valeur finie quelconque, distincte des racines de $p_0(y)$ et $q_0(y)$, et soit $\overline{x}$ un point voisin de l'origine où y prenne la valeur g' : je dis *qu'on peut décrire, autour de* $\overline{x}$, *un cercle de rayon* $\alpha\,|\overline{x}^{n-1}|$ (α *nombre positif quelconque*) *tel qu'on ait :*

Dans le cercle et sur le contour : $|y - g'| < 2\beta$;

Sur le contour du cercle : $|y - g'| \geq \beta$,

β (*fonction de* α) *restant supérieur à une limite fixe lorsque* $\overline{x}$ *tend vers* 0.

En effet, appelons γ un petit cercle de centre $x = 0$ duquel nous nous interdirons de faire sortir x, et soit H un grand nombre positif. Nous pouvons déterminer un nombre k tel que, pour x intérieur à γ et $|y| < \text{H}$, l'équation (32) donne

$$\left|\frac{q_0(y)}{p_0(y)}dy - \frac{dx}{x^n}\right| < k\left|\frac{dx}{x^{n-1}}\right|.$$

Partons alors de $\overline{x}$ (où $y = g'$) et intégrons sur un rayon $\overline{x}\,\overline{x}_1$ issu de ce point : nous aurons (en conservant les notations du n° **12**) :

$$\left|\int_{g_0}^{g_1}\frac{q_0}{p_0}dy - \frac{1}{n-1}\left(\overline{x}_1^{\,n+1} - \overline{x}^{-n+1}\right)\right| < \frac{k}{n-2}\left(\overline{x}_1^{\,n+2} - \overline{x}^{-n+2}\right).$$

La démonstration de la proposition énoncée s'achève comme au nº **12**.

La proposition est encore vraie lorsque la valeur g' est y' égale à l'infini. En effet, la transformation $v = y^{-1}$ change l'équation (32) en une équation de même forme.

Considérons alors un chemin direct quelconque, l, aboutissant au point transcendant. Nous sommes assurés *qu'une intégrale $y(x)$ suivie sur ce chemin, ou bien ne tend vers aucune limite, ou bien tend vers une racine de $p_0(y)$.*

Supposons, d'autre part, que, sur le chemin l, $|y|$ dépasse H : alors le chemin l traverse certains cercles c_i qui ont pour centres des infinis $\bar{x}_i$ de $y(x)$, et dont les rayons sont de l'ordre de grandeur de $|\bar{x}_i^{n-1}|$. Ces cercles sont *extérieurs les uns aux autres* (*cf.* nº **12** et *L.*, Chap. II). Nous pouvons donc (sans altérer la branche suivie) déformer le chemin l de manière qu'il ne traverse jamais aucun cercle c_i où $|y| > \text{H}$.

C'est grâce à cette circonstance que nous pourrons (*cf.* nº **12**) ramener l'étude de l'équation (32) à l'étude de l'équation

$$x^n \frac{dy}{dx} + \frac{p_0}{q_0} + \mu(\ldots) \tag{32 bis}$$

qui coïncide avec l'équation réduite

$$x^n \frac{dy}{dx} = \frac{p_0(y)}{q_0(y)} \tag{33}$$

pour $\mu = 0$, et avec l'équation (32) pour $\mu = 1$.

Caractéristiques à l'origine. — Nous examinerons aux numéros suivants les principaux types d'équations (32) et les circonstances qui caractérisent ces types. Mais nous allons tout d'abord faire quelques remarques générales sur l'allure possible des caractéristiques au voisinage de l'origine.

Prenons d'abord l'équation réduite (33) dans l'hypothèse où $p_0(y)$ *n'a que des racines simples qui n'annulent pas* $q_0(y)$. L'intégrale générale de (33) s'écrit en ce cas

$$\frac{1}{n-1}\frac{1}{x^{n-1}} + \text{C} = \frac{1}{\lambda_1}\log(y - y_1) \ldots + \frac{1}{\lambda_m}\log(y - y_m), \tag{34}$$

$y_1, \ldots, y_m$ étant les racines de p_0, et les λ étant liés (comme au n° **15**) par la relation $\Sigma\lambda_j^{-1} = 0$.

Considérons alors l'ensemble des caractéristiques issues avec une même valeur quelconque d'un point voisin de l'origine (cet ensemble de caractéristiques constitue une *branche d'intégrale au sens restreint; cf.* n° **5**, note). L'égalité (34) montre que cet ensemble de caractéristiques est *complètement indéterminé au voisinage de l'origine*. On en conclut aussitôt *qu'il en est de même des caractéristiques de* (32 *bis*) *et de* (32). La variation de y (à partir d'une valeur quelconque g, distincte des y_j) est réglée par le théorème démontré plus haut.

Mais les caractéristiques données par (34) jouissent d'une propriété remarquable. Elles ne prennent nulle part (en dehors de $x = 0$, $x = \infty$) les valeurs $y_1, \ldots, y_m$. En revanche, il existe des rayons aboutissant à l'origine sur lesquels y tend vers l'une quelconque des valeurs y_j. Et nous observons, de plus, que, sur ces rayons, $y - y_j$ tend vers 0 plus vite qu'une puissance négative quelconque de x $\Big[(y - y_j)$ est de l'ordre de grandeur de $e^{\frac{-1}{|x|^{n+1}}}\Big]$. Nous exprimons ce fait en disant que la fonction $(y - y_j)^{-1}$ de x^{-1} a, au voisinage de $x^{-1} = \infty$, une *croissance du type exponentiel*. Les valeurs $y_1, \ldots, y_m$ sont, pour les branches d'intégrales y, des *valeurs exceptionnelles* (¹) comparables aux valeurs exceptionnelles mises en évidence par le théorème de M. Picard dans la théorie des fonctions entières.

Ces propriétés particulières ne se conservent qu'exceptionnellement lorsque l'on passe de l'équation (33) aux équations (32 *bis*) et (32). Supposons, en effet, que p_0 admette $y = 0$ comme racine simple. $[q_0(0)$ étant non-nul$]$ et faisons $y = xw$. Nous obtenons une équation de la forme (²)

$$x^n \frac{dw}{dx} + x^{n-1} w = \frac{aw + p_1(0) + x(\ldots) + \ldots}{q_0 + xq_1 + \ldots} \tag{35}$$

Si l'équation (32) possédait des caractéristiques tendant vers 0 plus

(¹) *Voir* le théorème de M. Painlevé cité en note *supra* n° **12**.

(²) Une transformation homographique effectuée sur w ramènerait l'équation (35) à la forme normale (*voir* le début du présent paragraphe).

vite qu'une puissance négative quelconque de x, l'équation (35) posséderait nécessairement des caractéristiques w tendant vers o avec x. Or, cela est impossible si $p_1(0) \neq 0$.

Supposons, au contraire, que p_1, p_2, ... contiennent en facteur des puissances convenables de y. Il est possible alors que les conditions voulues pour que $y = 0$ soit *valeur exceptionnelle* se trouvent satisfaites.

Ainsi, *l'équation* (32) *peut avoir des caractéristiques tendant vers certaines racines de* $p_0(y)$ *aussi vite qu'une exponentielle, mais elle peut aussi n'en point avoir.*

Les caractéristiques qui tendent vers des valeurs exceptionnelles sont suivies sur certains rayons du plan x aboutissant en $x = 0$, mais non pas sur un rayon quelconque. Ne peut-il arriver, cependant, qu'un ensemble de caractéristiques (issues avec une même valeur d'un point voisin de l'origine) tende vers une même limite sur tout rayon aboutissant en $x = 0$? S'il en était ainsi, l'équation différentielle posséderait nécessairement une famille de branches d'intégrales (au sens restreint) non-indéterminées à l'origine. Or, nous venons de voir que cette circonstance ne peut pas se présenter dans le cas où p_0 n'a que des racines simples distinctes des racines de q_0. Je dis qu'elle peut, au contraire, se présenter si p_0 *a des racines multiples.*

Revenons, en effet, à l'équation réduite (33), et supposons que $y = 0$ *soit racine double de* p_0 *et n'annule pas* q_0. L'intégrale générale de (33) s'écrit alors

$$(36) \qquad \frac{1}{n-1}\frac{1}{x^{n-1}} + C = \frac{a}{y} + \frac{1}{\lambda_1}\log y + \ldots + \frac{1}{\lambda_m}\log(y - y_m).$$

Considérons, comme plus haut, les branches d'intégrales y au sens restreint (ensembles de caractéristiques). Nous voyons que l'intégrale générale (36) possède des familles [1] de branches indéterminées au voisinage de l'origine et, en outre, *une famille de branches non-indéterminées et nulles pour* $x = 0$.

L'étude de cette famille de branches se ramène d'ailleurs, immédia-

---

[1] Par *famille de branches* j'entends l'ensemble des branches issues d'un même point avec des valeurs initiales recouvrant une certaine aire du plan y.

tement, à une étude déjà faite. Faisant, en effet, le changement de variable, $y = x^{n-1}w$, nous obtiendrons l'équation

$$x^{2n-1}\frac{dw}{d\xi} + (n-1)x^{2n-2}w = \frac{x^{2n-2}w^2\pi_0(wx^{n-1})}{q_0(wx^{n-1})}, \qquad \text{où} \qquad \pi_0(0) \neq 0;$$

et, en divisant les deux membres par x^{2n-2}, nous retomberons sur une équation de Briot-Bouquet pour laquelle l'origine est un point transcendant de la classe B.

Ces propriétés de l'équation (33), où $y = 0$ est supposé racine double de p_0, ne se conservent pas, en général, lorsqu'on passe aux équations (32 *bis*) et (32). Supposons, en effet, pour fixer les idées, que $p_1(0)$ soit non-nul, et faisons les changements de variables

$$x = \xi^2, \qquad y = \xi w;$$

l'équation (32) prendra alors la forme ([1])

$$\xi^{2n-2}\frac{dw}{d\xi} + \xi^{2n-3}w = \frac{2aw^2 + 2p_1(0) + \xi(\ldots)}{q_0(0) + \xi(\ldots)},$$

et l'on voit aisément que, dans le cas général, cette équation du type (32) n'a pas de caractéristique qui reste finie au voisinage de l'origine.

Si, au contraire, $p_1, p_2, \ldots,$ contiennent en facteur des puissances convenables de y, on pourra effectuer sur l'équation (32) (où $y = 0$ est racine double de p_0), comme sur l'équation (33), le changement de variable $y = x^{n-1}w$ et l'on sera ainsi ramené à l'équation de Briot-Bouquet

$$x\frac{dw}{dx} + (n-1)w = \frac{aw^2 + \ldots}{q_0 + \ldots}$$

pour laquelle l'origine est un point transcendant de la classe B.

Ainsi, *l'équation (32) peut, exceptionnellement, avoir des branches d'intégrales qui restent déterminées au voisinage de l'origine.* L'allure de ces branches est comparable à celle d'une fonction rationnelle.

([1]) Les deux membres étant divisés par ξ.

Les branches d'intégrales étudiées du point de vue de la théorie de la croissance. — Pour caractériser la croissance des intégrales, nous prendrons pour variable $\xi = \frac{1}{x}$. Nous retrouverons alors (en étudiant les intégrales y pour ξ croissant indéfiniment) les divers types de croissance que j'ai signalés ailleurs (*L.*, Chap. II; *P.*, n° **9**) :

1° *Branches d'intégrales à croissance rationnelle* (*au sens restreint*). — Ce sont les branches d'intégrales que nous venons de considérer en dernier lieu. Leur valeur approchée est une fonction rationnelle (*L.*, Chap. II, n^{os} **3-4**). Chacune d'elles ne présente dans tout le plan qu'un nombre fini de points critiques (cf. *P.*, n° **9**).

2° *Branches d'intégrales à croissance exponentielle*. — Ce sont des intégrales, finies *au voisinage* de l'infini, dont le module croît indéfiniment sur certains rayons aussi vite que $e^{|\xi^n|}$ (je suppose, pour avoir des intégrales croissantes, qu'on ait au besoin effectué une transformation homographique sur y). Ces branches d'intégrales (que je suppose toujours suivies sur l'ensemble des rayons issus d'un même point) prennent une infinité de fois toutes les valeurs au voisinage de l'origine (exception faite, au plus, pour un nombre fini de valeurs exceptionnelles). Chacune d'elles présente une infinité de points critiques.

3° *Branches d'intégrales à croissance méromorphe* (*ou rationnelle au sens large*). — En dehors de cercles c entourant leurs infinis, ces branches restent inférieures à une puissance finie de $|x|$ sur tout chemin direct tendant vers l'infini. Elles sont complètement indéterminées et présentent une infinité de points critiques.

Branches d'intégrales exceptionnelles. — Nous avons vu tout à l'heure que l'équation (32) ne pouvait qu'exceptionnellement posséder une *famille* de branches d'intégrales tendant vers une racine de p_0. Mais ne peut-il exister des branches d'intégrales (ensembles de caractéristiques issues d'un point) isolées jouissant de cette propriété? C'est

---

(¹) On parviendrait à des conclusions analogues si $y = 0$ était, pour P_0, une racine d'ordre 3 ou d'ordre supérieur.

ainsi que l'équation (4) du n° 3 possède, pour $\mathcal{R}(\lambda_1) < 0$, $\mathcal{R}(\lambda_2) < 0$, deux intégrales isolées nulles et holomorphes à l'origine. Ces intégrales exceptionnelles sont les limites de familles de branches dont les points critiques sont venus se confondre à l'origine. De même l'équation réduite (33) admet les intégrales particulières $y = y_1, \ldots, y = y_n$.

Existe-t-il, pour l'équation (32), des intégrales-limites analogues? Cette circonstance ne peut se présenter qu'exceptionnellement.

Mécanisme des permutations. — Les mécanismes de permutations que peut définir la singularité $x = 0$ de l'équation (32) sont extrêmement variés, et je ne chercherai point à les analyser dans ce Mémoire. La méthode à suivre pour étudier ces mécanismes consisterait, comme toujours, à passer de l'équation (33) à l'équation (32) par l'intermédiaire de (32 *bis*), et c'est ainsi que je vais procéder pour étendre aux points transcendants de la classe C le théorème 4 du n° 1. Cependant, les premiers cas que cette méthode nous conduit à examiner ne sont point ceux qui donnent les résultats les plus simples. Ainsi, les singularités présentées à l'infini par les équations polynomales très simples que j'ai étudiées ailleurs (*L.*, Chap. II, n°s 3-4; *P.*, Chap. III à V) appartiennent à des catégories très particulières de la classification que j'adopte ici.

17. — Cas où p_0 n'a que des racines simples distinctes des racines de q_0.

Considérons d'abord l'équation réduite (33) dont l'intégrale générale est représentée par l'égalité (34). Les points critiques d'une même intégrale seront donnés (pour une même valeur de C) par l'égalité

$$(37) \qquad \frac{1}{n-1}\,\frac{1}{x^{n-1}} + C = \frac{1}{\lambda_1}\log(\tau_k - y_1)\ldots + \frac{1}{\lambda_m}\log(\tau_k - y_m)$$

où l'on égalera successivement τ_k à toutes les racines de $q_0(y)$. Nous pouvons représenter l'ensemble de ces points critiques par le symbole $x_{\nu,k,j_1,j_2,\ldots,j_m}$, où les indices ont les significations suivantes :

ν varie de 1 à $n-1$, et l'on a

$$(38) \qquad x_{2,k,\ldots,j_m} = e^{\frac{2i\pi}{n-1}} x_{1,k,\ldots,j_m}, \qquad \ldots.$$

k varie de 1 à $m-2$; cet indice spécifie la racine τ_k de y_0 qui a fourni le point critique;

j_1 prend toutes les valeurs entières positives et négatives; cet indice spécifie la détermination de $\log(\tau_k - y)$ qu'on a considérée dans l'égalité (37);

$j_2, \ldots, j_m$ varient de même de $-\infty$ à $+\infty$.

Il résulte de l'égalité (37) que les points critiques d'une même intégrale tendent vers o lorsque leurs indices croissent indéfiniment.

Considérons, en particulier, une branche d'intégrale au sens restreint, c'est-à-dire l'ensemble des caractéristiques issues d'un même point avec une même valeur. Lorsque nous nous rapprocherons de l'origine dans des directions convenables, nous rencontrerons une infinité de points critiques appartenant à la même branche. Les directions à suivre sont d'ailleurs données par l'égalité (37) : ce sont *les directions suivant lesquelles la branche d'intégrale suivie est indéterminée;* nous les appellerons *directions d'indétermination* relatives (¹) à la branche d'intégrale suivie.

Cela dit, appelons x', x'' deux points critiques quelconques présentés par une même branche d'intégrale suivie, vers l'origine, dans une direction d'indétermination. Les différences des indices relatifs aux points x' et x'' seront des entiers finis. Lors donc que x va de x' en x'', y décrit un chemin composé de lacets élémentaires en nombre fini entourant les zéros de p_0. La fonction $x''(x')$ ne s'annule, au voisinage de $x' = 0$, que pour $x' = 0$.

Cela dit, revenons à l'équation (32 *bis*) et considérons, sur un chemin direct (²) voisin de l'origine, une branche d'intégrale de cette équation. Cette branche est fonction continue de μ au voisinage de $\mu = 0$, et elle présente par conséquent le même système de points

(¹) Lorsqu'on tend vers l'origine suivant ces directions, la branche d'intégrale y de (32) est indéterminée. Suivant les autres directions la branche y *peut* rester déterminée, si l'équation (32) satisfait à certaines conditions (cf. *supra*, n° **16**).

(²) *Cf.* n° **3**, en note.

critiques que les branches d'intégrales de (33) définies par des valeurs initiales voisines.

Considérons, en particulier, une branche d'intégrale suivie, vers l'origine, suivant une direction d'indétermination de l'intégrale (37). Il résulte des propositions du n° **16** qu'on rencontre, dans cette direction, une infinité de points critiques de la branche suivie. Appelons x' et x'' deux quelconques de ces points critiques, et examinons, lorsque μ varie à partir de o, la fonction $x''(x')$.

Quand la variable x se rend de x' en x'', y va d'une valeur critique τ' à une valeur critique τ''. Ces valeurs τ', τ'' sont respectivement racines des polynomes

$$q_0(y) + \mu[x' q_1(y) + \ldots]; \qquad q_0(y) + \mu[x'' q_1(y) + \ldots]$$

et sont, par conséquent, fonctions continues de μ.

Quant au chemin τ', τ'' décrit par y de τ' en τ'', c'est, avons-nous dit, pour $\mu = 0$, une combinaison de lacets entourant les points y_j. Lorsque μ varie, ce chemin n'est pas altéré, tant qu'il ne se trouve pas traverser un point critique de la fonction $x(y)$. Mais les points critiques de $x(y)$ sont fonctions continues de μ et restent voisins des y_j pour μ voisin de o. J'en conclus que, quel que soit x' voisin de o, mais non-nul, la fonction $x(y)$ suivie sur le chemin (τ', τ'') à partir de la valeur y est fonction holomorphe de y le long de ce chemin. En conséquence, *la valeur finale x'' est fonction holomorphe de x' et n'est pas nulle.*

En d'autres termes [1], *la fonction $x''(x')$ ne s'annule, au voisinage de $x' = 0$, que pour $x' = 0$.* C'est le *théorème* ℬ du n° **1** qui se trouve maintenant établi pour l'équation (32 *bis*) où μ est voisin de o (*dans l'hypothèse où les points critiques x', x'', appartiennent à une même branche d'intégrale suivie, vers l'origine, dans une direction d'indétermination*). De proche en proche, nous établirons le théorème ℬ dans les mêmes conditions que pour l'équation (32), pourvu que nous restions suffisamment près de l'origine.

Considérons, d'autre part, un point quelconque $\overline{y'}$ du chemin

(1) Ajoutons que le chemin (x', x'') qui joint les deux points critiques reste *direct* lorsque x' varie au voisinage de o.

(τ', τ'') relatif à la variable y; c'est-à-dire, considérons la valeur prise par la branche y en un point $\bar{x}'$ du chemin (x', x''). Tant que x' et x'' ne sont pas confondus avec l'origine, le point $\bar{y}'$ est une fonction holomorphe du paramètre μ. D'ailleurs, pour $\mu = 0$, la valeur $\bar{y}'$ tend vers une racine de p_0 lorsque les points critiques x', x'' tendent vers o. J'en conclus que, pour μ voisin de o, la branche d'intégrale définie par la valeur $\bar{y}'$ tend vers une intégrale qui est arbitrairement voisine d'une racine de p_0. Suivons, en particulier, la branche d'intégrale le long d'un chemin qui se rapproche indéfiniment de l'origine, suivant une *direction d'indétermination*. Nous voyons sans peine que, pour x' et x'' nuls, *notre branche d'intégrale tendra, sur le chemin considéré, vers une racine de* p_0. S'il en était autrement, en effet, la branche présenterait, dans la direction d'indétermination suivie, une infinité de points critiques : or, cela ne saurait être lorsque $x' = x'' = 0$, puisque tous les points critiques rencontrés doivent s'annuler en même temps que x'.

Cette conclusion s'étend, de proche à proche, à l'équation (32 *bis*) où $|\mu| \leq 1$, c'est-à-dire à l'équation (32).

Le théorème $\mathcal{A}$. — Proposons-nous maintenant de démontrer le théorème $\mathcal{A}$. Sur un chemin direct $\bar{x}\,\bar{x}_1$, voisin de l'origine, nous suivons, à partir de la valeur $\bar{y}$, une branche d'intégrale qui présente des points critiques voisins de l'origine, et nous nous demandons vers quelles limites doit tendre y pour que les points critiques de la branche tendent vers le point transcendant $x = 0$.

Raisonnons d'abord sur l'équation (32 *bis*) où μ est supposé voisin de o. Nous partons d'une valeur de $\bar{y}$ pour laquelle le chemin $\bar{x}\,\bar{x}_1$ ne traverse pas l'origine; il en est alors de même du chemin $\bar{x}\,\bar{x}_1$ relatif à l'équation (33) où $\mu = 0$. Il est d'ailleurs loisible de composer ainsi le chemin $\bar{x}\,\bar{x}_1$: 1° lacets élémentaires rectilignes, issus du contour d'un petit cercle γ de centre $x = 0$, et entourant certains points critiques x'; 2° chemin $\bar{x}\,\bar{x}_1$ situé tout entier à une distance de l'origine supérieure à $|\bar{x}|$ et $|\bar{x}_1|$.

Supposons qu'à partir d'un point quelconque du chemin $\bar{x}\,\bar{x}_1$ nous tendions vers l'origine suivant une *direction d'indétermination :*

nous rencontrons (ainsi qu'il a été dit plus haut) une infinité de points critiques de l'équation (32 *bis*) ou (33). Tous ces points critiques, x'', tendront (nous le savons) simultanément vers o. Nous savons de plus que, pour l'équation (33), les points x'' tendent vers o en même temps que les points x'. Cherchons sous quelles conditions il en sera encore ainsi pour l'équation (32 *bis*).

Supposons que l'un des points x' tende vers o. Alors l'intégrale suivie sur $\overline{x}\,\overline{x}_1$ tend, pour l'équation (33), vers une racine de p_0; pour l'équation (32 *bis*), vers une branche voisine de la même racine de p_0. Considérons dans ces conditions (j'entends, pour $\overline{y}$ tendant vers une racine de p_0) l'équation (33); nous voyons que les points critiques x'' d'indices suffisamment grands tendent vers o suivant des directions d'indétermination. On peut dès lors déterminer des indices ν, k, j, ..., j_m, tels que le point $x_{\nu,k,j,\ldots,j_m}$ se rapproche de o dans une direction d'indétermination et s'annule en même temps que x', et il y a, par conséquent, une infinité de points x'' qui tendent vers o (suivant une direction d'indétermination déterminée) lorsque x' tend lui-même vers o.

Cette propriété s'étend immédiatement à l'équation (32 *bis*) et, de proche en proche, à l'équation (32). En effet, x' et les points x'' considérés sont des points appartenant à l'ensemble de points critiques défini au début du présent numéro, et les différences de leurs indices sont finies. Le raisonnement qui établit le théorème ℬ, dans les conditions énoncées plus haut, prouvera donc, ici encore, que la fonction $x''(x')$ ne s'annule que pour $x' = 0$.

Nous tirons de là la conclusion suivante : *Lorsque, à partir d'un point quelconque du chemin $\overline{x}\,\overline{x}_1$, nous tendons vers l'origine suivant une direction d'indétermination de l'intégrale* (37), *notre branche d'intégrale admet une limite (cesse d'être indéterminée), dès que x' devient nul, et cette limite est une racine de p_0.*

Dès lors, pour achever la démonstration du théorème 𝒜, nous n'aurons plus qu'à répondre à la question suivante : *Vers quelle ou quelles limites doit tendre, en un point donné, la valeur initiale d'une caractéristique pour que cette caractéristique, supposée suivie dans une direction d'indétermination, tende vers une racine de p_0 (lorsque les points critiques x' se confondent avec l'origine)?*

Recherche des caractéristiques qui tendent vers une racine de p_0. — Soit $y = 0$ une racine simple de p_0 qui n'annule pas q_0. Nous pouvons écrire l'équation (32 *bis*) sous la forme

$$(39) \qquad x^n \frac{dy}{dx} = l_1 y + l_2 y^2 + \ldots + \mu [\text{termes en } x,\ x^2,\ xy,\ \ldots].$$

Pour $\mu = 0$, nous avons l'intégrale $y = 0$. Nous allons chercher à obtenir, pour μ voisin de 0, une caractéristique de la forme

$$y = \mu y_1 + \mu^2 y_2 + \ldots,$$

issue de $\overline{x}'$ avec une valeur voisine de 0 et tendant vers 0 sur un rayon $\overline{x}'O$, dont la direction est supposée être une *direction d'indétermination* (pour la caractéristique considérée).

La fonction y_1 est définie par l'équation

$$x^n y'_1 = l_1 y_1 + \text{termes en } x,\ x^2,\ \ldots;$$

elle s'écrit donc

$$y_1 = e^{\frac{-l_1}{(n-1)x^{n-1}}} \left[C + \int e^{\frac{l_1}{(n-1)x^{n-1}}} (\text{termes en } x^{1-n},\ x^{2-n},\ \ldots)\, dx \right],$$

expression qu'il est facile d'étudier directement ([1]).

Supposons fixée une fois pour toutes la valeur initiale de l'intégrale $\int$ au point $\overline{x}'$ et suivons le rayon $\overline{x}'O$. Je dis que *si, sur ce rayon, la caractéristique y_1, correspondant à une certaine valeur de* C, *tend vers* 0, *la valeur de* C *pour laquelle il en est ainsi est isolée.*

Pour établir ce fait, nous ferons le changement de variable

$$\xi = e^{\frac{l_1}{(n-1)x^{n-1}}};$$

la fonction y_1 s'écrit alors

$$(40) \qquad y_1 = \frac{1}{\xi} \left\{ C - \int d\xi \, [\text{termes en } x,\ x^2,\ \ldots] \right\}$$

$$= \frac{1}{\xi} \left\{ C - \int d\xi \left[\text{termes en } (\log \xi)^{\frac{-1}{n-1}},\ (\log \xi)^{\frac{-2}{n-1}},\ \ldots \right] \right\}.$$

([1]) Pour $n = 2$, l'intégrale $\int$ est une somme d'intégrales dont l'étude se ramène à celle du logarithme intégral.

Nous partons d'un point $\bar{\xi}'$ (correspondant à $\bar{x}'$) avec une détermination fixée de $(\log \xi)^{\frac{1}{n-1}}$, et nous décrivons le rayon $\bar{x}'O$; à ce rayon correspond, dans le plan ξ, un chemin indéterminé qui est tout entier situé à distance finie et tourne une infinité de fois autour du point $\xi = 0$ [les seules singularités de la fonction $y_1(\xi)$ sont $\xi = 0$ et $\xi = \infty$]. Je dis que, dans ces conditions, l'intégrale qui figure dans l'expression de y_1 tend vers une limite déterminée. En effet, nous pouvons remplacer le chemin décrit par ξ par le chemin suivant : 1° rayon joignant $\bar{\xi}'$ à un point $\bar{\xi}''$ arbitrairement rapproché de $\xi = 0$; 2° nombre arbitrairement grand de tours le long du cercle de centre $\xi = 0$ et de rayon $|\bar{\xi}''|$; 3° rayon $\bar{\xi}''\xi''$ aboutissant en un point situé à distance finie. Or, le long d'un tel chemin, les intégrales

$$\int d\xi\,(\log \xi)^{\frac{-1}{n-1}}, \qquad \int d\xi\,(\log \xi)^{\frac{-1}{n-1}},$$

suivies à partir de $\xi = \bar{\xi}'$ et de valeurs initiales déterminées, tendent manifestement vers des limites finies lorsque n est un entier supérieur ou égal à 2.

Donnons, alors, à la constante C une valeur égale à la limite vers laquelle tend l'intégrale $\int$ sur le rayon $\bar{x}'O$. La caractéristique y_1 correspondante tendra vers 0 sur $\bar{x}'O$. Au contraire, cette caractéristique sera indéterminée sur $\bar{x}'O$ pour toute autre valeur de C.

Ainsi se trouve démontrée la proposition énoncée relativement à la caractéristique y_1.

La fonction y_2 est définie par l'équation différentielle

$$x^n y'_2 = l_1 y_2 + l_2 y_1^2 + \text{termes en } x y_1,\ x^2 y_1 \ldots.$$

Elle est de la forme

$$y_2 = e^{\frac{-l_1}{(n-1)x^{n-1}}}\left[C' + \int e^{\frac{l_1}{(n-1)x^{n-1}}}(\text{termes en } x^{-n} y_1^2,\ x^{1-n} y_1,\ \ldots)\,dx\right].$$

Supposons fixées une fois pour toutes la détermination de y_1 (ce sera celle qui tend vers 0 sur $\bar{x}'O$) et la valeur initiale de l'intégrale $\int$ au

point $\overline{x}'$. Nous démontrerons encore que si, sur le rayon $\overline{x}'O$, la caractéristique y_2 correspondant à une certaine valeur de C' tend vers o, la valeur de C' pour laquelle il en est ainsi est isolée.

Donnant à C' cette valeur isolée, nous pourrons raisonner sur y_3 comme sur y_2, et ainsi de suite.

Nous parvenons ainsi, finalement, à la conclusion suivante : *Les caractéristiques de l'équation* (39) (issues de $\overline{x}'$ avec une valeur voisine de o) *qui tendent vers zéro sur le rayon* $\overline{x}'O$ *sont des caractéristiques isolées;* en d'autres termes, les valeurs initiales qui, au point $\overline{x}'$, définissent ces caractéristiques sont des valeurs isolées.

Nous déduisons de là le théorème 4 pour l'équation (32 *bis*) où μ est voisin de o, et, de proche en proche, pour l'équation (32 *bis*) où $\mu = 1$.

18. — Cas où p_0 a des racines multiples distinctes des racines de q_0.

Les cas particuliers qu'il nous reste à examiner seront étudiés par la même méthode que le cas général traité ci-dessus. Nous nous dispenserons donc d'entrer dans les détails, et nous dirons seulement en quoi les résultats qui précèdent se trouvent modifiés lorsque p_0 et q_0 ont des racines multiples ou des racines communes.

Supposons d'abord que y_1 soit racine multiple, par exemple *racine double de* p_0 (les racines de ce polynome étant d'ailleurs distinctes de celles de q_0).

Nous pourrons écrire l'intégrale générale de l'équation réduite (33) sous la forme (*comparer* n° **14**) :

$$\frac{1}{n-1}\,\frac{1}{x^{n-1}} + C = \frac{a}{(y-y_1)^2} + \frac{1}{\lambda_3}\log\frac{y-y_3}{y-y_1} + \ldots + \frac{1}{\lambda_m}\,\frac{y-y_m}{y-y_1}.$$

On voit que tout ensemble de caractéristiques appartenant à cette intégrale générale présente une infinité de points critiques, lesquels tendent vers o suivant certaines directions qui sont les *directions d'indétermination*. Il en est encore ainsi pour l'équation (32 *bis*) où μ varie de o à 1.

Considérons, d'autre part, le chemin $\overline{x}\,\overline{x}_1$ sur lequel nous suivons la branche d'intégrale définie par la valeur initiale $\overline{y}$. Traçons un

rayon $\overline{x}'O$ issu d'un point de $\overline{x}\,\overline{x}_1$ et dirigé suivant une *direction d'indétermination* de notre branche d'intégrale, puis voyons comment la branche se comporte sur ce rayon. Je constate, comme au numéro précédent, que, lorsque le chemin $\overline{x}\,\overline{x}_1$ vient à traverser l'origine, la branche d'intégrale ou caractéristique suivie sur le rayon $\overline{x}'O$ tend vers une racine de p_0 le long de ce rayon. Reste à montrer que les caractéristiques pour lesquelles cette circonstance se présente sont isolées, c'est-à-dire que les valeurs initiales par lesquelles elles sont définies (soit au point $\overline{x}$, soit au point $\overline{x}'$) sont des valeurs isolées. La démonstration se fera comme au numéro précédent pour les racines simples de p_0. Quant à la caractéristique qui tend, sur le rayon d'indétermination $\overline{x}'O$, vers la racine multiple $\overline{y}_1$, nous l'étudierons comme il suit.

Supposant par exemple la racine double et égale à o, nous pouvons écrire l'équation (32) sous la forme

(41) $$x^n y' = ly^2 + ax + \text{termes en } y^3,\ x^2,\ \ldots;$$

effectuons alors le changement de variables

(42) $$x = \xi^2, \qquad y = \xi w;$$

nous obtenons (en divisant les deux membres par ξ^2) l'équation

$$\xi^{2n-2} w' + \xi^{2n-3} w = 2lw^2 + 2a + \ldots.$$

Cette équation peut être étudiée comme l'équation (39) du n° **17**. Aux caractéristiques w qui tendent vers une valeur finie sur un rayon aboutissant à l'origine, correspondent des caractéristiques y de (41) qui tendent vers o. Ces caractéristiques sont isolées de même que les caractéristiques w. *Elles satisfont donc au théorème* A.

Lorsque $a = 0$, le changement de variables (41) ne nous donne plus une équation du type (39). On aura recours alors à un changement de variables de la forme générale (*cf.* n° **10**)

(43) $$x = \xi^p, \qquad y = \xi^q w \qquad (p \text{ et } q \text{ entiers}).$$

Exceptionnellement (*cf.* n° **16**), l'équation (41) peut posséder une branche d'intégrale nulle à l'origine (c'est-à-dire une branche d'inté-

grale qui tend vers o sur tout rayon aboutissant en $x = 0$, et non point seulement sur un rayon dirigé suivant une *direction d'indétermination*). Cette intégrale nulle sera mise en évidence par le changement de variables (42).

19. — Points transcendants multiples (cas où p_0 et q_0 ont des racines communes).

Lorsque p_0 et q_0 ont des racines communes, l'équation (32) présente, à l'origine, plusieurs points transcendants confondus. A un point transcendant multiple, comme à un point transcendant simple correspondent, pour une branche d'intégrale donnée, certaines *directions d'indétermination*, directions suivant lesquelles la branche d'intégrale présente une infinité de points critiques convergeant vers le point transcendant $x = 0$.

Considérons, d'autre part, le chemin $\overline{x}\,\overline{x}_1$ (*voir* n° **18**) et le rayon $\overline{x}'O$, issu de ce chemin et dirigé suivant une *direction d'indétermination* de la branche d'intégrale suivie sur $\overline{x}\,\overline{x}_1$. Lorsque le chemin $\overline{x}\,\overline{x}_1$ vient à traverser l'origine, la branche d'intégrale (ou caractéristique) suivie sur $\overline{x}'O$ tend vers une racine y_j de p_0. Il s'agit d'étudier cette caractéristique dans l'hypothèse où y_j est une racine de q_0, et de montrer qu'en ce cas encore la caractéristique est isolée.

Or, on voit aisément qu'on pourra toujours faire cette étude en effectuant un changement de variables de la forme (42). On parviendra ainsi au théorème 4.

Soit, par exemple, $y = 0$ *racine simple commune de* p_0 *et* q_0. Alors, au voisinage de $x = 0$, $y = 0$, nous pourrons écrire l'équation (32) sous la forme

$$x^n yy' = ly + ax + \text{termes en } y^2,\ xy,\ \ldots$$

Posant $y = xw$, nous aurons l'équation en w

$$x^{n+1} ww' + x^n w^2 = lw + a + \ldots$$

A une caractéristique w qui tend sur $\overline{x}'O$ vers une valeur finie, correspond une caractéristique y qui tend vers o.

Lorsque $a = 0$, le changement de variables $y = xw$ doit être remplacé par une transformation (42) où $p > 0$ et $q \geqq 1$.

On traitera de même, en posant $y = xw$, l'équation

$$x^n y^2 y' = ly + ax + \ldots,$$

relative au cas où $y = 0$ est *racine double* de q_0 et *racine simple* de p_0.

Soit encore l'équation

$$x^n yy' = ly^2 + ax + \ldots$$

relative au cas où $y = 0$ est *racine double* de p_0 et *racine simple* de q_0. Il suffira, pour étudier la caractéristique y qui tend vers 0, de poser

$$x = \xi^2, \qquad y = \xi w;$$

on obtiendra ainsi l'équation en w,

$$\frac{1}{2}\xi^{2n-1} ww' + \frac{1}{2}\xi^{2n-2} w^2 = lw^2 + a + \ldots.$$

Et ainsi de suite.

Le théorème A est donc vérifié, en définitive, pour toutes les équations du type (32).

20. — Généralisations.

L'analyse que nous avons faite de l'équation (27) (nº **12** et suiv.) et de l'équation (32) ne nous oblige pas à supposer que ces équations soient rationnelles. Considérons l'équation

$$x^n \frac{dy}{dx} = \frac{p_0(y) + xp_1(y) + \ldots}{q_0(y) + xq_1(y) + \ldots},$$

où les deux termes de la fraction du second membre sont rationnels en y et sont, par rapport à x, des développements convergents pour les petites valeurs de x. Toutes les conclusions obtenues dans l'hypothèse où l'équation est rationnelle en x subsisteront, au voisinage de l'origine, pour la nouvelle équation. On pourra pousser plus loin encore la généralisation de ces conclusions en se bornant à supposer que les fonctions de y, p_1, q_1, $\ldots$, p_2, q_2 sont des fonctions uniformes dont aucun point singulier ne coïncide avec les zéros (supposés distincts) des polynomes p_0 et q_0.

Recherches sur les propriétés thermomécaniques des corps solides;

Par M. Louis ROY.

INTRODUCTION ET HISTORIQUE.

I. — Préliminaires.

La théorie classique de l'élasticité, telle qu'elle a été établie par Navier, étudie les lois auxquelles obéissent les déformations infiniment petites des corps, dont la température est uniforme et invariable. D'autre part, la théorie de la propagation de la chaleur dans les solides, telle que Fourier l'a établie, suppose ces corps indéformables, incapables, par suite, de modifier leur configuration sous l'influence des variations successives de leur température. Considérées ainsi, ces deux théories ne présentent donc aucun point de pénétration réciproque : la première est incapable de prévoir les petites déformations des solides, que provoquent d'assez larges variations de température ; la seconde ne se préoccupe pas de la modification apportée aux températures par les dégagements ou absorptions de chaleur, qu'engendrent les déformations du milieu, que ces déformations soient produites par des forces extérieures ou par les variations de la température elle-même.

L'expérience montre que lorsqu'on chauffe modérément un corps solide, les déformations qui en résultent sont du même ordre de gran-

deur que celles qu'on observe, à température constante, par l'application d'actions mécaniques extérieures. Il était donc nécessaire de compléter les équations de l'élasticité, afin qu'elles rendissent compte de ces deux sortes de déformations. Ce complément a été apporté, dès 1835, par Duhamel, qui a reconnu que la température elle-même jouait le rôle d'une pression superficielle, et ses dérivées dans l'espace, le rôle de forces extérieures appliquées à chaque élément de volume.

Tandis que la température joue un rôle important, dans les équations de l'élasticité, en tant qu'équivalent de forces extérieures supplémentaires, le mouvement d'un corps élastique, au contraire, n'a qu'une influence extrêmement minime sur la distribution intérieure de sa température. C'est ce que l'expérience a montré depuis longtemps, dans l'étude du mouvement vibratoire des corps solides, et ce qui explique que Fourier, en établissant l'équation indéfinie de la température relative à de tels milieux, ait négligé de tenir compte du mouvement interne de ceux-ci. Cette correction a été tentée, pour la première fois, par Duhamel.

Un corps élastique, primitivement à une température uniforme et mis en mouvement, ne donnera donc naissance qu'à des variations de température extrêmement faibles, qui n'auront pas assez d'intensité, par conséquent, pour engendrer, à leur tour, des déformations appréciables à l'intérieur du corps. Et c'est ce qui explique qu'à une première approximation, bien suffisante, d'ailleurs, pratiquement, on ne se soit pas occupé de mettre en ligne de compte les effets de la température, dans la théorie de l'élasticité.

Le fait que, dans un solide ou un liquide, le mouvement interne n'a qu'une influence négligeable sur la température, provient de ce que ces corps sont très peu dilatables par la chaleur. Or, il en est tout autrement des gaz. C'est donc dans leur étude qu'on devait constater que cette influence est la plus marquée, et c'est ce qui est effectivement arrivé. On sait que Newton, admettant l'indépendance mutuelle du mouvement et de la température, était parvenu, pour représenter la vitesse du son dans les gaz, à une formule qui donnait une valeur très notablement inférieure à celle mesurée par les physiciens. Pour mettre cette formule en accord avec l'expérience, Laplace a dû tenir compte

de la chaleur dégagée ou absorbée par les compressions ou dilatations successives de la masse gazeuse. Cette hypothèse de l'indépendance mutuelle du mouvement et de la température, conduit, au contraire, dans le cas des solides, à une expression de la vitesse du son à peu près conforme à l'expérience, du moins dans les cas assez rares où cette vérification si difficile a été tentée.

Ainsi, après que les deux théories de l'élasticité et de la propagation de la chaleur eurent été édifiées, une des questions intéressantes qui se présentaient à l'attention des physiciens mathématiciens, était de demander à ces deux théories celle des phénomènes thermomécaniques. Il fallait, d'abord, compléter les équations de l'élasticité, de façon qu'elles rendissent compte des déformations thermiques, et, ensuite, reprendre l'établissement de l'équation indéfinie de la température, en tenant compte des déformations du milieu. C'est, comme il a été dit plus haut, ce qu'a fait Duhamel vers l'année 1835, dans deux Mémoires, intitulés, l'un *Mémoire sur le calcul des actions moléculaires développées par les changements de température dans les corps solides*, inséré dans le Tome V du *Recueil des Savants étrangers de l'Académie des Sciences de Paris*; l'autre, *Second Mémoire sur les phénomènes thermomécaniques*, lu à l'Académie des Sciences, le 23 février 1835, et inséré dans le xxv[e] cahier du *Journal de l'École Polytechnique*.

II. — Analyse des Mémoires de Duhamel.

Dans le préambule du premier Mémoire de Duhamel, le passage suivant est à citer :

« L'illustre auteur de la théorie mathématique de la chaleur s'est borné à considérer les changements de température, que subissent les différents points d'un système, et ne s'est point occupé des actions moléculaires développées par ces changements.

» Cette action de la chaleur se retrouve dans presque toutes les questions relatives à l'équilibre et au mouvement des corps élastiques; car c'est une conception purement idéale que celle d'un corps dont tous les points auraient la même température. Il était donc in-

dispensable d'en apprécier les effets et de déterminer les modifications qu'elle apporte aux équations générales que l'on connaissait. Ces recherches, qui font l'objet de ce Mémoire, m'avaient paru, depuis longtemps, mériter l'attention des géomètres. Elles forment un complément nécessaire de la théorie des corps élastiques, et établissent un lien entre elle et la théorie de la chaleur, dont elle était entièrement isolée. »

Duhamel passe à la formation des équations de l'équilibre intérieur. En suivant les méthodes inaugurées par Poisson, il arrive aux équations

$$(1)\quad \begin{cases} \lambda\left(3\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 U}{\partial z^2}+2\dfrac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}+2\dfrac{\partial^2 W}{\partial z\,\partial x}\right)-\nu\dfrac{\partial\theta}{\partial x}+\rho X=0, \\ \lambda\left(3\dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 V}{\partial z^2}+\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial^2 W}{\partial y\,\partial z}+2\dfrac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}\right)-\nu\dfrac{\partial\theta}{\partial y}+\rho Y=0, \\ \lambda\left(3\dfrac{\partial^2 W}{\partial z^2}+\dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 W}{\partial y^2}+2\dfrac{\partial^2 U}{\partial z\,\partial x}+2\dfrac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z}\right)-\nu\dfrac{\partial\theta}{\partial z}+\rho Z=0, \end{cases}$$

où λ et ν désignent des constantes, ρ la densité dans l'état naturel spécial choisi comme état primitif, X, Y, Z les composantes de la force extérieure par unité de masse, θ la température comptée à partir de ce qu'elle est à l'état naturel considéré, U, V, W les composantes du déplacement d'un point, à partir de sa position primitive, de coordonnées x, y, z. Ce ne sont pas là les notations de Duhamel; mais nous les modifions intentionnellement, afin de faciliter des comparaisons ultérieures.

Les équations qui précèdent doivent être vérifiées en tous les points pris à l'intérieur du corps. A sa surface, où s'exerce une pression de composantes P_x, P_y, P_z, Duhamel démontre qu'on doit avoir

$$(2)\quad \begin{cases} \left[\lambda\left(3\dfrac{\partial U}{\partial x}+\dfrac{\partial V}{\partial y}+\dfrac{\partial W}{\partial z}\right)-\nu\theta\right]\alpha+\lambda\left(\dfrac{\partial U}{\partial y}+\dfrac{\partial V}{\partial x}\right)\beta+\lambda\left(\dfrac{\partial U}{\partial z}+\dfrac{\partial W}{\partial x}\right)\gamma=P_x, \\ \left[\lambda\left(3\dfrac{\partial V}{\partial y}+\dfrac{\partial W}{\partial z}+\dfrac{\partial U}{\partial x}\right)-\nu\theta\right]\beta+\lambda\left(\dfrac{\partial V}{\partial z}+\dfrac{\partial W}{\partial y}\right)\gamma+\lambda\left(\dfrac{\partial V}{\partial x}+\dfrac{\partial U}{\partial y}\right)\alpha=P_y, \\ \left[\lambda\left(3\dfrac{\partial W}{\partial z}+\dfrac{\partial U}{\partial x}+\dfrac{\partial V}{\partial y}\right)-\nu\theta\right]\gamma+\lambda\left(\dfrac{\partial W}{\partial x}+\dfrac{\partial U}{\partial z}\right)\alpha+\lambda\left(\dfrac{\partial W}{\partial y}+\dfrac{\partial V}{\partial z}\right)\beta=P_z; \end{cases}$$

α, β, γ désignant les cosinus directeurs de la normale extérieure en un point de la surface. Les équations du mouvement s'obtiennent en

ajoutant aux premiers membres des équations (1) les composantes des forces d'inertie. Duhamel ajoute :

« A ces équations devront être jointes celles de la propagation de la chaleur. Elles ne subiraient que des modifications insensibles par le changement très petit des distances des molécules voisines. Nous les conserverons donc, telles qu'on les a employées jusqu'ici. Elles feront connaître, à chaque instant, la valeur de θ en fonction de x, y, z, t; cette valeur devra être substituée dans les équations que nous venons d'établir, qui ne renfermeront plus alors que les inconnues U, V, W. »

Ainsi, Duhamel complète les équations de l'élasticité, mais leur adjoint les équations de la chaleur, telles que les avait établies Fourier. Partant de là, il démontre que les questions relatives à cette théorie n'admettent qu'une seule solution.

Ces bases étant posées, il énonce le principe de la superposition des déformations purement thermiques aux déformations purement mécaniques.

L'application la plus intéressante, que Duhamel ait faite de ces équations, est l'étude du mouvement d'une sphère qui n'est soumise à aucune force extérieure et qui se refroidit. Les calculs auxquels ce problème conduit sont malheureusement trop compliqués pour qu'il soit possible d'en déduire des conséquences physiques importantes. Ils mettent toutefois en évidence ce fait général, que le déplacement de chaque point de la sphère, suivant le rayon, est la somme d'un terme qui s'évanouit asymptotiquement, comme la température, et d'un terme périodique. Voici les conclusions de Duhamel :

« L'état de la sphère converge donc vers un état final, où les lois sont les mêmes que s'il n'y avait pas eu de variations dans les températures, et c'est à quoi il était facile de s'attendre. Mais, ce qu'il faut bien remarquer, c'est que cet état final conserve toujours l'empreinte de l'état thermométrique primitif, car les coefficients des termes périodiques dépendent de la température initiale, ainsi que des coefficients spécifiques de la substance relativement à la chaleur.... On peut déterminer aisément quels devraient être les déplacements et les vitesses, dans l'état initial, pour que l'état final fût un repos absolu. »

Ce problème de la sphère termine le premier Mémoire.

Dans son second Mémoire, Duhamel s'est proposé de compléter les équations de la chaleur, comme il avait déjà complété celles de l'élasticité. Il cherche à faire figurer, dans l'équation indéfinie de la température, la quantité de chaleur dégagée ou absorbée par les déformations ; voici, d'ailleurs, quel est son point de départ :

« On admet, généralement, que tous les corps dégagent de la chaleur quand on les comprime et en absorbent quand on les dilate ; d'où il résulte qu'il y a une différence sensible, entre les chaleurs spécifiques à volume constant et à pression constante. C'est ce principe qui sert de base à ma théorie, et, j'admets que la quantité de chaleur dégagée est proportionnelle à l'accroissement qu'a subi la densité, pourvu que cet accroissement soit très petit. »

L'établissement de l'équation indéfinie étant la partie essentielle du second Mémoire de Duhamel, qu'il nous soit permis d'insister sur ce point.

Soient C la capacité calorifique du corps, par unité de volume et à pression constante, C′ sa capacité calorifique à volume constant, α son coefficient de dilatation thermique linéaire. Voici la marche que suit Duhamel :

« Évaluons l'accroissement de température $\delta\theta$ qui résulterait, en général, d'un petit accroissement $\varepsilon\rho$ de la densité, ou d'une diminution ε d'un volume égal à l'unité. Or, si on laisse refroidir ce volume, jusqu'à ce qu'il devienne $1 - \varepsilon$ sous pression constante, la quantité dont sa température se sera abaissée sera $\frac{\varepsilon}{3\alpha}$ et la quantité de chaleur dégagée sera $C\frac{\varepsilon}{3\alpha}\cdot$ Mais cette dernière quantité est précisément celle qui, restituée au volume fixe $1 - \varepsilon$, l'amènerait à la température primitive augmentée de $\delta\theta$, et, par conséquent, élèverait sa température actuelle de $\frac{\varepsilon}{3\alpha} + \delta\theta$; elle peut donc aussi être représentée par $C'\left(\frac{\varepsilon}{3\alpha} + \delta\theta\right)$. On a donc

$$C\frac{\varepsilon}{3\alpha} = C'\left(\frac{\varepsilon}{3\alpha} + \delta\theta\right) \quad \text{ou} \quad \delta\theta = \frac{\varepsilon}{3\alpha}\left(\frac{C}{C'} - 1\right) \quad (^1).$$

---

(1) Ce raisonnement de Duhamel est si subtil, qu'il nous paraît bon de lui donner une forme plus moderne. Pour Duhamel, l'état de la matière, en chaque

» Cette relation générale entre les variations correspondantes de la

---

point, est complètement défini par la connaissance de la pression P, de la densité ρ et de la température θ, ces trois variables étant liées par une relation caractéristique de la substance considérée, d'après laquelle deux quelconques de ces variables seulement sont indépendantes. Soit, alors, Q la quantité de chaleur renfermée par l'unité de volume.

A une modification élémentaire du corps, caractérisée par les variations dP, $d\rho$, $d\theta$ des variables, correspond un accroissement dQ de la quantité de chaleur de l'unité de volume, qu'on peut mettre indifféremment sous les deux formes

$$(\beta)\qquad \begin{cases} dQ = l\,d\rho + C'\,d\theta, \\ dQ = h\,dP + C\,d\theta, \end{cases}$$

C' étant la capacité calorifique de l'unité de volume à densité constante, C la capacité calorifique à pression constante, l et h deux autres coefficients. Mais, d'après la relation caractéristique, ρ peut être regardé comme une fonction de P et de θ; nous avons donc

$$(\gamma)\qquad d\rho = \frac{\partial\rho}{\partial P}\,dP + \frac{\partial\rho}{\partial\theta}\,d\theta.$$

Si nous substituons cette expression dans la première des égalités (β), celles-ci nous donneront par comparaison

$$C' + l\frac{\partial\rho}{\partial\theta} = C.$$

Dans une modification à pression constante, $dP = 0$ et $d\rho = -3\alpha\rho\,d\theta$, α étant le coefficient de dilatation thermique linéaire. Nous avons donc, d'après la relation (γ),

$$\frac{\partial\rho}{\partial\theta} = -3\alpha\rho,$$

et par suite

$$l = -\frac{C - C'}{3\alpha\rho}.$$

Cela posé, imaginons qu'on comprime instantanément le corps, sans lui laisser le temps de gagner ou de perdre de la chaleur. On aura $dQ = 0$, et si l'on pose $d\rho = \varepsilon\rho$, la première des égalités (β) nous donnera

$$l\varepsilon\rho + C'\,\delta\theta = 0,$$

$\delta\theta$ étant l'accroissement de température relatif à cette compression brusque; nous en déduisons

$$\delta\theta = -\frac{l\varepsilon\rho}{C'} = \frac{\varepsilon}{3\alpha}\left(\frac{C}{C'} - 1\right),$$

ce qui est bien la formule donnée par Duhamel.

densité et de la température est connue depuis longtemps; nous allons l'appliquer à la question actuelle. »

ε a pour expression

$$\varepsilon = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}\right) dt,$$

ce qui donne immédiatement l'accroissement correspondant de la température; si l'on y ajoute l'élévation de température due à la quantité de chaleur qui a pénétré, par conductibilité et pendant le temps dt, dans l'unité de volume, on arrive à l'équation suivante, qui généralise celle de Fourier :

$$(3) \qquad \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{K}{C'\rho}\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}\right) - \frac{\frac{C}{C'} - 1}{3\alpha}\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}\right),$$

où K désigne le coefficient de conductibilité interne. L'auteur ajoute :

« Il faut lui adjoindre les équations de Navier complétées (1) et (2). Telles sont alors les équations qui renferment les théories de la chaleur et de l'élasticité; c'est à leur intégration que se ramèneront toutes les questions qui se rapportent à ces deux théories. On voit qu'elles sont dans une dépendance mutuelle l'une de l'autre, et, ce n'est que quand le rapport $\frac{C}{C'}$ sera connu, que l'on pourra juger s'il est permis, dans dans une première approximation, de calculer la température d'après la formule de Fourier, pour en déduire U, V, W d'après les équations (1) et (2), et pour revenir ensuite à l'équation (3), dans une seconde approximation. »

Par analogie avec ce qu'on avait admis et vérifié pour les gaz, Duhamel néglige, dans le phénomène de la propagation des ondes dans un solide indéfini, de température initiale uniforme, les échanges de chaleur par conductibilité. Il arrive ainsi à une nouvelle expression V′ de la vitesse du son dans un solide, qui doit être substituée à l'expression V admise jusque-là. Ces deux vitesses sont liées par la relation

$$V' = \frac{1}{3}\sqrt{4 + 5\frac{C}{C'}}\,V.$$

Il est intéressant de rappeler que la vitesse V′, donnée par Laplace

pour les gaz, était liée à la vitesse V, donnée par Newton, par la formule

$$V' = \sqrt{\frac{C}{C'}}\,V.$$

III. — Travaux de M. Boussinesq.

Ces deux Mémoires de Duhamel constituent assurément un essai des plus remarquables, pour l'époque à laquelle ils ont été écrits; ils nous paraissent, toutefois, insuffisants aujourd'hui. D'abord, Duhamel s'était non seulement borné aux corps isotropes, mais il avait adopté l'hypothèse ancienne $\lambda = \mu$, conséquence des théories de Navier et de Poisson, que l'expérience n'a vérifiée que pour un très petit nombre de corps. D'autre part, pour compléter l'équation de Fourier, il s'est basé sur l'analogie, admise par lui, entre les fluides et les solides, analogie qui lui a fait attribuer, à ces derniers, une chaleur spécifique à pression constante et une chaleur spécifique à volume constant. Or, ces expressions n'ont de signification physique nette, que pour les systèmes définis, en chaque point, par leur densité et leur température. Cette manière discutable d'introduire les déformations, dans l'équation indéfinie de la température, constitue, à notre avis, un des plus graves défauts de sa théorie.

La question méritait donc d'être reprise sur des bases plus modernes, avec l'appui si sûr que la Thermodynamique est venue apporter, depuis un demi-siècle, à maintes questions de Physique mathématique. C'est ce qu'a fait M. Boussinesq dans une grande Note finale qui termine la XXXIVeme Leçon de sa *Théorie analytique de la chaleur*.

L'état physique d'un milieu déformé est défini, en chaque point, par la connaissance des six déformations ∂_x, ∂_y, ∂_z, g_x, g_y, g_z et de la température θ, les déformations ∂, g, étant comptées à partir de l'état naturel relatif à la température spéciale $\theta = 0$. Généralisant la loi de Hooke, M. Boussinesq écrit que les six composantes de la pression intérieure N_x, N_y, N_z, T_x, T_y, T_z sont des fonctions linéaires et homogènes de nos sept paramètres, ce qui le conduit à introduire six nouveaux coefficients d'élasticité ν_x, ν_y, ν_z, τ_x, τ_y, τ_z, du moins dans le cas des milieux de la contexture la plus générale. Ces coefficients,

qui permettent de traiter aisément le problème des dilatations thermiques, se réduisent à un seul ν, dans le cas des corps isotropes. On a donc, pour ceux-ci, trois coefficients d'élasticité distincts λ, μ, ν.

Les composantes N_x, N_y, ..., T_z de la pression intérieure dérivent encore d'un potentiel d'élasticité $\rho\Phi'$, par unité de volume, de sorte qu'on a

$$N_x = \frac{\partial \rho \Phi'}{\partial \partial_x}, \qquad N_y = \frac{\partial \rho \Phi'}{\partial \partial_y}, \qquad \ldots, \qquad T_z = \frac{\partial \rho \Phi'}{\partial g_z}, \tag{4}$$

et le potentiel $\rho\Phi'$ est lié au potentiel purement élastique $\rho\Phi$ par la relation

$$\rho\Phi' = \rho\Phi - \theta(\nu_x \partial_x + \nu_y \partial_y + \nu_z \partial_z + \tau_x g_x + \tau_y g_y + \tau_z g_z). \tag{5}$$

Pour établir l'équation indéfinie de la température, M. Boussinesq part de l'équation générale de la Thermodynamique, prise sous la forme

$$\frac{dQ}{\varpi} = d\rho U - (N_x \, d\partial_x + N_y \, d\partial_y + \ldots + T_z \, dg_z),$$

où dQ désigne la quantité de chaleur absorbée, pendant une modification infiniment petite de durée dt, par une particule de volume ϖ, et ρU, l'énergie interne par unité de volume. D'après les relations (4), l'équation précédente s'écrit

$$\frac{dQ}{\varpi} = d\rho(U - \Phi') + \frac{\partial \rho \Phi'}{\partial \theta} d\theta. \tag{6}$$

Mais, d'après le principe de Carnot, la quantité $\frac{dQ}{\varpi(T_0 + \theta)}$ doit être une différentielle totale exacte, T_0 représentant la température absolue de la particule dans son état naturel primitif. Or, nous pouvons écrire

$$\frac{dQ}{\rho\varpi(T_0 + \theta)} = d\,\frac{U - \Phi'}{T_0 + \theta} + \left[U - \Phi' + (T_0 + \theta)\frac{\partial \Phi'}{\partial \theta}\right] \frac{d\theta}{(T_0 + \theta)^2};$$

donc, pour que le second membre soit une différentielle exacte, il faut et il suffit que la quantité entre crochets soit une fonction $\Psi(\theta)$ de la température seule, c'est-à-dire qu'on ait

$$U = \Phi' - (T_0 + \theta)\frac{\partial \Phi'}{\partial \theta} + \Psi(\theta). \tag{7}$$

Cette relation a été donnée autrefois par Lord Kelvin, dans son Mémoire sur les propriétés thermoélastiques de la matière [1].

Tenons compte de cette équation dans la relation (6); celle-ci deviendra

$$\frac{dQ}{\varpi} = \rho\,\Psi''(\theta)\,d\theta - (T_0+\theta)\,d\frac{\partial\rho\Phi'}{\partial\theta},$$

et, si nous posons $\rho\,\Psi''(\theta) = C$, nous pourrons écrire, d'après l'égalité (5),

$$\frac{dQ}{\varpi} = \left[C\frac{\partial\theta}{\partial t} + (T_0+\theta)\left(\nu_x\frac{\partial\partial_x}{\partial t} + \nu_y\frac{\partial\partial_y}{\partial t} + \ldots + \tau_z\frac{\partial g_z}{\partial t}\right)\right]dt.$$

Mais, la théorie de la conductibilité montre qu'on a aussi, du moins pour les corps athermanes,

$$\frac{dQ}{\varpi} = \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right)dt,$$

F_x, F_y, F_z étant les composantes du flux de chaleur au point qui a pour coordonnées x, y, z. Nous avons donc, en définitive,

$$(8)\quad \begin{aligned} C\frac{\partial\theta}{\partial t} &= \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \\ &\quad - (T_0+\theta)\left(\nu_x\frac{\partial\partial_x}{\partial t} + \nu_y\frac{\partial\partial_y}{\partial t} + \nu_z\frac{\partial\partial_z}{\partial t} + \tau_x\frac{\partial g_x}{\partial t} + \tau_y\frac{\partial g_y}{\partial t} + \tau_z\frac{\partial g_z}{\partial t}\right). \end{aligned}$$

Telle est l'équation indéfinie de la température donnée par M. Boussinesq.

IV. — Objet de ce Mémoire.

Nous nous proposons de reprendre la théorie des phénomènes thermomécaniques, en suivant les méthodes de l'Énergétique. Tandis que Duhamel et M. Boussinesq se sont bornés aux corps étendus en toutes dimensions, nous traiterons également le cas des plaques et des tiges. Ce travail sera divisé en quatre Chapitres.

Dans le premier, nous commençons par montrer, aussi rapidement que possible, que les équations du mouvement ou de l'équilibre d'un système de corps ne subissent aucun changement de forme, du fait que la température est variable, si ce n'est que les relations entre les

(1) Lord Kelvin, *Quarterly mathematic Journal*, avril 1855.

pressions et les déformations contiennent, chacune, un terme de plus dépendant de la température. Une fonction importante, qui est à la base de cette étude, est le potentiel thermodynamique interne du système, considéré par M. Duhem. Il résulte des relations entre les pressions et les déformations, que le potentiel thermodynamique interne coïncide, à une fonction arbitraire près de la température, avec le potentiel d'élasticité considéré par M. Boussinesq; il permet d'établir, presque sans calculs, l'équation indéfinie de la température.

Nous passons, ensuite, au cas particulier des corps isotropes et nous reconnaissons que les déformations ne figurent plus, dans l'équation indéfinie de la température, que par la dilatation cubique. Or, il est facile de déduire, des équations indéfinies du mouvement, une équation du second ordre ne renfermant que la température et la dilatation cubique. Nous avons donc deux équations qui ne dépendent que de ces deux fonctions; en éliminant successivement chacune d'elles entre les équations ainsi obtenues, nous reconnaissons que la température et la dilatation cubique vérifient, respectivement, deux équations du quatrième ordre, qui même coïncident si, par exemple, le milieu ne renferme aucune source de chaleur.

Mais, pratiquement, il n'est pas nécessaire de traiter le problème dans toute sa généralité : dans le cas des milieux réels, que le physicien a seuls à considérer, il arrive, en effet, que deux des coefficients de nos équations du quatrième ordre ont des valeurs numériques si voisines, qu'on peut les identifier sensiblement. Il en résulte qu'à une première approximation, la distribution de la température, en chaque point du milieu, est la même que si celui-ci était un solide invariable.

Nous avons vu que Duhamel admettait que la propagation du son, dans les solides, se faisait suivant la loi adiabatique, comme dans les gaz. En adoptant son hypothèse, nous arrivons à ce résultat que tout se passe comme si la température était uniforme et invariable, et si le premier coefficient d'élasticité λ était augmenté d'une certaine quantité, le deuxième μ conservant sa valeur. Il en résulte un accroissement de la vitesse de propagation du son d'environ 1 pour 100, à la température de 15° C.

Le deuxième Chapitre est consacré à la théorie des plaques homogènes et isotropes. Nous établissons les équations de leur équilibre et

de leur mouvement, dans le cas d'une température non uniforme et variable, en généralisant la méthode suivie par M. E. Mathieu [1]. Nous arrivons à ce résultat que la température n'a pas d'influence sensible sur le mouvement transversal, sauf, cependant, si les conditions physiques sont très différentes sur les deux faces de la plaque. La température n'intervient d'une manière appréciable que dans les équations du mouvement tangentiel, qui sont de même forme que les équations d'un corps à trois dimensions. Leur intégration conduit donc, également, à une équation du quatrième ordre, tout à fait analogue à celle déjà étudiée, et à laquelle la même méthode approchée d'intégration peut s'appliquer.

Nous abordons, dans le Chapitre III, l'étude des tiges droites. Une analyse préalable nous ayant fait reconnaître que les équations du mouvement transversal sont indépendantes de la température, nous nous dispenserons de développer cette analyse, qui, au point de vue thermomécanique, ne présente plus qu'un intérêt secondaire ; c'est pourquoi nous nous limitons, dès le début, aux équations du mouvement longitudinal, en supposant, simplement, que chaque section droite de la tige est un plan de symétrie de contexture, et qu'il y a homogénéité dans toute l'étendue de ce plan.

Duhamel avait choisi, comme application de ses théories, l'étude des vibrations calorifiques d'une sphère. Nous avons préféré prendre un exemple plus simple, afin de pouvoir aisément pousser les calculs jusqu'au bout et faire des applications numériques. C'est pourquoi, dans le Chapitre IV, nous avons choisi le cas d'une tige et cherché à quelles conditions les vibrations calorifiques, qui accompagnent son refroidissement, pourraient constituer un son perceptible. Nous terminons en traitant le problème inverse, c'est-à-dire que nous cherchons la loi de variation de la température dans une tige primitivement au zéro thermométrique, et mise en mouvement par des actions mécaniques.

La conclusion de cette dernière étude est la justification rigoureuse de l'intuition, qui a fait négliger les variations de la température, dans la théorie classique de l'élasticité.

---

(1) E. Mathieu, *Théorie de l'élasticité des corps solides*, t. I, Chap. VI.

CHAPITRE I.

LES ÉQUATIONS GÉNÉRALES DE L'ÉLASTICITÉ.

I. — Potentiel thermodynamique interne d'un corps peu déformé.

Nous allons rechercher la forme du potentiel thermodynamique interne d'un corps, qui est le siège d'une déformation infiniment petite, à partir de son état naturel. Cette recherche ayant été faite par M. Duhem, dans le cas où la température du corps est uniforme et invariable ([1]), nous passerons très rapidement sur les détails pour arriver le plus vite possible aux résultats.

Définissons tout d'abord l'état naturel du corps étudié, comme étant l'état d'équilibre qu'il prend, lorsqu'il n'est soumis à aucune force extérieure et que tous ses points sont à une même température absolue T_0. Soient, dans ces conditions, $d\varpi$ un élément de volume du corps, M un point de coordonnées rectangulaires x, y, z, pris à l'intérieur de cet élément.

Imaginons que le corps soit le siège d'une modification qui le déforme infiniment peu, et considérons-le à un instant quelconque t. Dans ce nouvel état, le point M est venu en un point M′, de coordonnées x', y', z' par rapport aux mêmes axes; sa température absolue est devenue $T_0 + \theta$, et l'on peut écrire

$$x' = x + \mathrm{U}, \qquad y' = y + \mathrm{V}, \qquad z' = z + \mathrm{W},$$

les quantités U, V, W et θ étant des fonctions uniformes, finies et continues de x, y, z, t, assez petites en valeur absolue, ainsi que leurs dérivées partielles du premier ordre dans l'espace, pour pouvoir être traitées comme des infiniment petits.

La théorie des déformations infiniment petites d'un milieu continu

---

([1]) P. Duhem, *Hydrodynamique, Élasticité, Acoustique*, Livre IV, Chap. I, § I et II.

nous enseigne que, pour connaître le déplacement éprouvé par chacun des points de l'élément de volume $d\varpi$, il suffit de connaître :

1° Les trois composantes U, V, W du déplacement d'un point M de l'élément $d\varpi$;

2° Les trois composantes

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right), \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}\right), \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right)$$

de la rotation moyenne;

3° Les trois dilatations

$$D_1 = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad D_2 = \frac{\partial V}{\partial y}, \qquad D_3 = \frac{\partial W}{\partial z};$$

4° Les trois glissements

$$G_1 = \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y}, \qquad G_2 = \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z}, \qquad G_3 = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}.$$

La connaissance de ces douze quantités, jointe à celle de la température θ, comptée à partir de l'état naturel, définit complètement le nouvel état de l'élément $d\varpi$ à l'instant t.

Nous représenterons le potentiel thermodynamique interne de l'élément, qui occupait le volume $d\varpi$ dans l'état naturel, par $f\,d\varpi$, f étant une fonction des paramètres qui fixent l'état actuel de l'élément. Comme la position et l'orientation d'un corps dans l'espace n'interviennent pas dans sa définition thermodynamique, la fonction f ne peut dépendre que des trois dilatations, des trois glissements et de la température. Le potentiel thermodynamique du corps entier aura pour expression

$$\mathfrak{F} = \int f(D_1, D_2, D_3, G_1, G_2, G_3, \theta)\,d\varpi,$$

l'intégration étant étendue à tout le volume occupé par le corps dans l'état naturel. La fonction f dépend, en outre, explicitement, des coordonnées x, y, z, si le corps n'est pas homogène.

Développons la fonction f suivant les puissances croissantes des déformations et de la température, en nous limitant aux termes du second degré, ce qui est permis, puisque nos variables sont très petites en valeur absolue. Nous pouvons supposer que le terme constant du développement est nul, car le potentiel thermodynamique peut être

modifié, sans inconvénient, par l'addition d'une constante arbitraire. Dès lors, si nous écrivons que l'état naturel est, conformément à sa définition, l'état d'équilibre du corps, soustrait à l'action de toute force extérieure, nous reconnaîtrons que les termes du premier degré, où figurent les déformations, sont nuls.

Ainsi, notre développement se réduit à un terme du premier degré en θ et à une forme quadratique des déformations et de la température. Si nous désignons par $\varphi(\theta)$ l'ensemble des termes de f, qui ne dépendent que de θ, nous pourrons écrire

$$
\begin{aligned}
(1) \quad f = \varphi(\theta) &+ \frac{1}{2}(A_{11} D_1 + A_{12} D_2 + A_{13} D_3 + A_{14} G_1 + A_{15} G_2 + A_{16} G_3 + A_{17} \theta) D_1 \\
&+ \frac{1}{2}(A_{21} D_1 + A_{22} D_2 + A_{23} D_3 + A_{24} G_1 + A_{25} G_2 + A_{26} G_3 + A_{27} \theta) D_2 \\
&+ \frac{1}{2}(A_{31} D_1 + A_{32} D_2 + A_{33} D_3 + A_{34} G_1 + A_{35} G_2 + A_{36} G_3 + A_{37} \theta) D_3 \\
&+ \frac{1}{2}(A_{41} D_1 + A_{42} D_2 + A_{43} D_3 + A_{44} G_1 + A_{45} G_2 + A_{46} G_3 + A_{47} \theta) G_1 \\
&+ \frac{1}{2}(A_{51} D_1 + A_{52} D_2 + A_{53} D_3 + A_{54} G_1 + A_{55} G_2 + A_{56} G_3 + A_{57} \theta) G_2 \\
&+ \frac{1}{2}(A_{61} D_1 + A_{61} D_2 + A_{63} D_3 + A_{64} G_1 + A_{65} G_2 + A_{66} G_3 + A_{67} \theta) G_3 \\
&+ \frac{1}{2}(A_{71} D_1 + A_{72} D_2 + A_{73} D_3 + A_{74} G_1 + A_{75} G_2 + A_{76} G_3 \qquad) \theta;
\end{aligned}
$$

les quantités A_{ij} étant des fonctions de x, y, z, telles que

$$A_{ij} = A_{ji}.$$

qui se réduisent à des constantes, si le corps est homogène. On les appelle les *coefficients d'élasticité* du corps. On voit facilement que le nombre des coefficients d'élasticité distincts est de 27 ; il se réduit à 21, si $\theta = 0$.

L'état naturel du corps doit être un état d'équilibre stable et, en particulier, un état d'équilibre isothermique stable. On démontre qu'il faut et il suffit pour cela, comme dans la théorie classique de l'élasticité, que le discriminant de la forme quadratique de f, constituée avec les termes indépendants de θ, ainsi que tous les déterminants mineurs qu'on en déduit, en supprimant q lignes et les q colonnes correspondantes, soient positifs.

Il faut, en particulier, que les six coefficients

$$A_{11}, \quad A_{22}, \quad A_{33}, \quad A_{44}, \quad A_{55}, \quad A_{66},$$

soient positifs.

II. — Équations du mouvement et de l'équilibre d'un système de corps.

Nous considérons un système de corps en mouvement, à un instant quelconque. Pour simplifier les calculs, sans toutefois restreindre la généralité des raisonnements, nous supposerons que le système ne se compose que de deux corps, que nous désignerons par les indices (1) et (2).

Ces deux corps sont supposés accolés, en tous les points d'une surface séparative σ; ils sont limités, extérieurement, par des surfaces que nous représenterons, respectivement, par S et S'.

Pour obtenir les équations du mouvement du système, nous devons, d'après les principes de l'Énergétique, écrire que, pour toute modification virtuelle isothermique compatible avec les liaisons, on a

$$(2) \qquad \delta\mathfrak{E}_e - \delta_\theta\mathcal{F} + \delta J = 0,$$

$\delta\mathfrak{E}_e$ désignant le travail élémentaire des forces extérieures, δJ celui des forces d'inertie et $\delta_\theta\mathcal{F}$ la variation isothermique du potentiel thermodynamique interne.

Soit, en un point M du corps (1), ρ la densité; X, Y, Z les composantes de la force extérieure, par unité de masse; P_x, P_y, P_z les composantes de la pression extérieure exercée en chaque point de la surface S; δU, δV, δW les variations des trois composantes du déplacement, dans la modification virtuelle considérée; on a pour le travail élémentaire

$$\begin{aligned}\delta\mathfrak{E}_e = & \int \rho\,(X\,\delta U + Y\,\delta V + Z\,\delta W)\,d\varpi + \int (P_x\,\delta U + P_y\,\delta V + P_z\,\delta W)\,dS \\ & + \int \rho'\,(X'\,\delta U' + Y'\,\delta V' + Z'\,\delta W')\,d\varpi' + \int (P'_x\,\delta U' + P'_y\,\delta V' + P'_z\,\delta W')\,dS',\end{aligned}$$

les deux derniers termes accentués représentant, respectivement, des quantités de même signification que les premiers, mais se rapportant

au corps (2). Pour abréger, nous écrirons, plus simplement,

$$(3)\quad \delta\mathfrak{T}_e = \sum \int \rho (X\,\delta U + Y\,\delta V + Z\,\delta W)\,d\varpi + \sum \int (P_x\,\delta U + P_y\,\delta V + P_z\,\delta W)\,dS,$$

et nous conserverons cette notation dans ce qui suivra.

Nous avons, ainsi, pour le travail virtuel des forces d'inertie,

$$(4)\qquad \delta J = -\sum \int \rho \left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\,\delta U + \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\,\delta V + \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}\,\delta W \right) d\varpi.$$

D'autre part, le potentiel thermodynamique interne du système s'écrira

$$\mathfrak{F} = \sum \int f\,d\varpi,$$

et, si nous posons

$$(5)\quad N_1 = \frac{\partial f}{\partial D_1},\quad N_2 = \frac{\partial f}{\partial D_2},\quad N_3 = \frac{\partial f}{\partial D_3},\quad T_1 = \frac{\partial f}{\partial G_1},\quad T_2 = \frac{\partial f}{\partial G_2},\quad T_3 = \frac{\partial f}{\partial G_3},$$

nous aurons

$$(6)\quad \delta_\theta \mathfrak{F} = \sum \int (N_1\,\delta D_1 + N_2\,\delta D_2 + N_3\,\delta D_3 + T_1\,\delta G_1 + T_2\,\delta G_2 + T_3\,\delta G_3)\,d\varpi.$$

Les expressions (3), (4), (6), substituées dans l'équation (2), vont nous fournir les équations du mouvement du système.

L'équation (2) ne doit pas être vérifiée quelles que soient les variations δU, δV, ..., $\delta W'$, mais, seulement, pour toutes celles qui maintiennent les deux corps accolés en tous les points de σ. Il faut, pour cela, qu'on ait, dans toute modification virtuelle et en tous les points de σ,

$$(7)\qquad \delta U - \delta U' = 0,\qquad \delta V - \delta V' = 0,\qquad \delta W - \delta W' = 0.$$

Dès lors, d'après les principes du calcul des variations, il doit exister trois fonctions Π_x, Π_y, Π_z, continues en tous les points de σ, telles que l'on ait, quelles que soient les six quantités δU, δV, ..., $\delta W'$, l'égalité

$$\begin{aligned}(8)\quad &\sum \int \rho \left[\left(X - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right) \delta U + \left(Y - \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \right) \delta V + \left(Z - \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \right) \delta W \right] d\varpi \\ &\quad + \sum \int (P_x\,\delta U + P_y\,\delta V + P_z\,\delta W)\,dS \\ &\quad - \sum \int (N_1\,\delta D_1 + N_2\,\delta D_2 + N_3\,\delta D_3 + T_1\,\delta G_1 + T_2\,\delta G_2 + T_3\,\delta G_3)\,d\varpi \\ &\quad + \int [\Pi_x(\delta U - \delta U') + \Pi_y(\delta V - \delta V') + \Pi_z(\delta W - \delta W')]\,d\sigma = 0.\end{aligned}$$

Mais, la troisième ligne de cette égalité peut être transformée par des intégrations par parties, et l'on reconnaît qu'on peut écrire

$$\begin{aligned}
&\sum\int (N_1\,\delta D_1 + N_2\,\delta D_2 + N_3\,\delta D_3 + T_1\,\delta G_1 + T_2\,\delta G_2 + T_3\,\delta G_3)\,d\varpi \\
&= -\sum\int \Big[\Big(\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial y} + \frac{\partial T_2}{\partial z}\Big)\delta U + \Big(\frac{\partial T_3}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + \frac{\partial T_1}{\partial z}\Big)\delta V \\
&\qquad\qquad + \Big(\frac{\partial T_2}{\partial x} + \frac{\partial T_1}{\partial y} + \frac{\partial N_3}{\partial z}\Big)\delta W\Big]\,d\varpi \\
&+\sum\int [(\alpha N_1 + \beta T_3 + \gamma T_2)\,\delta U + (\alpha T_3 + \beta N_2 + \gamma T_1)\,\delta V + (\alpha T_2 + \beta T_1 + \gamma N_3)\,\delta W]\,dS \\
&+\sum\int [(\alpha N_1 + \beta T_3 + \gamma T_2)\,\delta U + (\alpha T_3 + \beta N_2 + \gamma T_1)\,\delta V + (\alpha T_2 + \beta T_1 + \gamma N_3)\,\delta W]\,d\sigma,
\end{aligned}$$

α, β, γ désignant les cosinus directeurs de la normale aux surfaces S ou σ, menée vers l'extérieur du corps (1). D'après cela, si l'on pose, pour abréger,

$$\rho\Big(X - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\Big) = \mathfrak{X}, \qquad \rho\Big(Y - \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\Big) = \mathfrak{Y}, \qquad \rho\Big(Z - \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}\Big) = \mathfrak{Z},$$

l'égalité (8), qui doit être vérifiée quelles que soient les six variations δU, δV, ..., $\delta W'$, exige qu'on ait :

1° En tout point du corps (1),

$$(9)\qquad \frac{\partial(N_1, T_3, T_2)}{\partial x} + \frac{\partial(T_3, N_2, T_1)}{\partial y} + \frac{\partial(T_2, T_1, N_3)}{\partial z} + (\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}) = 0;$$

2° En tout point de la surface S du corps (1),

$$(10)\qquad \alpha(N_1, T_3, T_2) + \beta(T_3, N_2, T_1) + \gamma(T_2, T_1, N_3) = (P_x, P_y, P_z);$$

3° En tout point de la surface séparative σ,

$$(11)\qquad \alpha(N_1, T_3, T_2) + \beta(T_3, N_2, T_1) + \gamma(T_2, T_1, N_3) = (\Pi_x, \Pi_y, \Pi_z).$$

On aurait pour le corps (2) des équations analogues, avec cette seule différence que les seconds membres des conditions correspondant aux équations (11) seraient $(-\Pi_x, -\Pi_y, -\Pi_z)$.

Les équations (9), (10), (11) ont exactement la même forme que celles qu'on obtient dans l'hypothèse d'une température uniforme et constante. Elles conduisent donc aux mêmes définitions de la pression

à l'intérieur d'un corps et à la même interprétation des quantités N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3, Π_x, Π_y, Π_z. Les conditions (11) et leurs analogues pour le corps (2) expriment que la pression varie avec continuité, quand on traverse la surface séparative σ.

Enfin, les relations entre les pressions et les déformations sont fournies par les équations (5) qui s'écrivent, d'après l'égalité (1),

$$(12)\quad \left\{\begin{array}{l} N_1 = A_{11} D_1 + A_{12} D_2 + A_{13} D_3 + A_{14} G_1 + A_{15} G_2 + A_{16} G_3 + A_{17} \theta, \\ N_2 = A_{21} D_1 + A_{22} D_2 + A_{23} D_3 + A_{24} G_1 + A_{25} G_2 + A_{26} G_3 + A_{27} \theta, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ T_3 = A_{61} D_1 + A_{62} D_2 + A_{63} D_3 + A_{64} G_1 + A_{65} G_2 + A_{66} G_3 + A_{67} \theta, \end{array}\right.$$

et qui redonnent les équations classiques, si $\theta = 0$.

Sur la surface σ, on a, en outre, les conditions de raccordement

$$U = U', \qquad V = V', \qquad W = W'.$$

Appliquée à une modification réelle, l'équation (2) conduit immédiatement au théorème des forces vives, et, si les forces extérieures dérivent d'un potentiel, on reconnaît qu'il existera une intégrale des forces vives, à condition que le potentiel interne soit la somme de deux fonctions ne dépendant, l'une que de la température, l'autre que des déformations.

Remarquons que, d'après les équations (5), il y a identité, à une fonction arbitraire près de la température, entre le potentiel thermodynamique interne par une unité de volume f et la fonction que M. Boussinesq appelle le *potentiel d'élasticité* par unité de volume et qu'il représente par $\rho\Phi'$. On retrouve, aux différences de notations près, les équations (5) dans les équations (4) de notre Introduction et Historique.

III. — Équations de la température.

Considérons, à l'instant t, la matière comprise à l'intérieur d'une surface fermée Σ, tracée arbitrairement à l'intérieur du corps (1); nous allons calculer la quantité de chaleur δQ qu'elle dégage, quand on lui impose une modification virtuelle.

La particule qui, dans l'état naturel, occupait un volume $d\varpi$ est, à l'instant t, à une température absolue $T = T_0 + \theta$; son entropie est,

d'après les principes de la Thermodynamique, égale à

$$-\frac{1}{E}\frac{\partial f}{\partial T}d\varpi = -\frac{1}{E}\frac{\partial f}{\partial \vartheta}d\varpi,$$

E désignant l'équivalent mécanique de la chaleur.

Pendant la modification virtuelle considérée, cette particule dégage une quantité de chaleur égale, d'après le principe de Carnot-Clausius, au produit changé de signe de sa température absolue par la variation de son entropie et dont l'expression est, par conséquent,

$$\frac{T}{E}\delta\frac{\partial f}{\partial \vartheta}d\varpi.$$

La quantité de chaleur dégagée dans une modification élémentaire par un volume fini de matière est, par définition, la somme des quantités de chaleur dégagées par chaque élément de volume ; on a donc

$$(13)\qquad \delta Q = \int \frac{T}{E}\delta\frac{\partial f}{\partial \vartheta}d\varpi,$$

l'intégration s'étendant au volume occupé par la matière intérieure à la surface Σ dans son état naturel. On en déduit, d'après l'égalité (1),

$$\delta Q = \int \frac{T}{E}\left(A_{17}\delta D_1 + A_{27}\delta D_2 + A_{37}\delta D_3 + A_{47}\delta G_1 + A_{57}\delta G_2 + A_{67}\delta G_3 + \frac{\partial^2 f}{\partial \vartheta^2}\delta\vartheta\right)d\varpi.$$

Posons

$$C = -\frac{T}{E}\frac{\partial^2 f}{\partial \vartheta^2};$$

C est ce qu'on appelle la *capacité calorifique de l'unité de volume* au point où se trouve l'élément $d\varpi$.

Soit dQ la quantité de chaleur dégagée, pendant une modification réelle de durée dt; nous aurons, d'après ce qui précède,

$$(14)\qquad dQ = dt\int\left[\frac{T}{E}\left(A_{17}\frac{\partial D_1}{\partial t} + A_{27}\frac{\partial D_2}{\partial t} + A_{37}\frac{\partial D_3}{\partial t} + A_{47}\frac{\partial G_1}{\partial t} + A_{57}\frac{\partial G_2}{\partial t} + A_{67}\frac{\partial G_3}{\partial t}\right) - C\frac{\partial \vartheta}{\partial t}\right]d\varpi.$$

Nous allons égaler cette expression à celle que nous fournit la théorie de la conductibilité.

Soit, à l'instant t, $-F_n\,d\Sigma$ le flux de chaleur qui sort du volume intérieur à la surface Σ par l'élément de surface $d\Sigma$, n désignant la normale extérieure, $\chi(x, y, z, t, \theta)\,d\varpi$ la quantité de chaleur dégagée par unité de temps et autrement que par conductibilité, par la particule qui occupait, dans l'état naturel, le volume $d\varpi$; d'après la théorie de la propagation de la chaleur, on a aussi

$$dQ = dt\left(-\int F_n\,d\Sigma + \int \chi\,d\varpi\right), \tag{15}$$

la première intégrale s'étendant à la surface Σ, telle qu'elle est à l'instant t, la deuxième, au volume intérieur à la surface Σ, dans son état naturel.

Mais, à cause de la petitesse des déformations, on reconnaît qu'il suffit, pour calculer la première intégrale, de considérer le corps et, par suite, la surface Σ tels qu'ils sont à l'état naturel ([1]). Si donc, on désigne par F_x, F_y, F_z, les composantes du flux de chaleur au point de coordonnées primitives x, y, z, on aura

$$F_n = \alpha F_x + \beta F_y + \gamma F_z,$$

et l'égalité (15) deviendra, après transformation de l'intégrale de surface en intégrale de volume,

$$dQ = dt\int\left(-\frac{\partial F_x}{\partial x} - \frac{\partial F_y}{\partial y} - \frac{\partial F_z}{\partial z} + \chi\right) d\varpi.$$

De l'égalité (14) et de la précédente on déduit, par un raisonnement habituel en Physique mathématique, qu'on doit avoir en tous les points du corps (1)

$$\begin{aligned} C\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} - \chi + \frac{T}{E}\Big(& A_{17}\frac{\partial D_1}{\partial t} + A_{27}\frac{\partial D_2}{\partial t} + A_{37}\frac{\partial D_3}{\partial t} \\ & + A_{47}\frac{\partial G_1}{\partial t} + A_{57}\frac{\partial G_2}{\partial t} + A_{67}\frac{\partial G_3}{\partial t}\Big). \end{aligned} \tag{16}$$

C'est l'équation indéfinie de la température dans le corps (1); pour le corps (2), on a une équation analogue.

Quant aux conditions aux limites, qui expriment les relations calo-

---

([1]) J. Boussinesq, *Théorie analytique de la chaleur*, t. II, p. 163.

rifiques du système avec l'extérieur et celles du corps (1) avec le corps (2), elles ne subissent aucun changement du fait du mouvement du système.

L'équation (16), où l'on fait $\chi = 0$ et $E = 1$, a été obtenue par M. Boussinesq [Introduction et Historique, équation (5)], en partant de l'énergie interne du corps par unité de masse. Nous allons retrouver cette expression de l'énergie interne.

La Thermodynamique nous enseigne que l'énergie interne du corps, par unité de volume u, est liée au potentiel thermodynamique par la relation

$$E u = f - T \frac{\partial f}{\partial \theta}.$$

D'autre part, d'après l'expression que donne M. Boussinesq du potentiel d'élasticité par unité de volume $\rho\Phi'$ [Introduction et Historique, équation (5)], il est facile de voir qu'on a

$$f = \varphi(\theta) + \rho\Phi'.$$

On en déduit, en remplaçant f par cette valeur dans l'expression de u et en posant

$$\Psi(\theta) = \frac{1}{\rho}\left(\varphi - T \frac{d\varphi}{d\theta}\right),$$

$$E \frac{u}{\rho} = \Phi' - T \frac{\partial \Phi'}{\partial \theta} + \Psi(\theta);$$

$\frac{u}{\rho}$ représente l'énergie interne par unité de masse. Cette égalité, où l'on fait $E = 1$, coïncide avec celle qui a servi de point de départ à M. Boussinesq, dans l'établissement de l'équation indéfinie de la température [Introduction et Historique, équation (7)].

Il est à remarquer que l'équation indéfinie (16), le terme χ mis à part, n'est pas linéaire par rapport à la température et aux déformations. Mais, puisque la température θ est censée être très petite en valeur absolue, nous pourrons, sans erreur sensible, remplacer T par T_0, si toutefois la température du système, dans l'état naturel, est assez éloignée du zéro absolu. C'est ce que nous ferons toujours dans ce qui suivra.

L'équation (16) met en lumière ce fait important, reconnu anté-

rieurement par Duhamel, que la distribution intérieure de la température, dans un système, ne peut pas, en général, être déterminée indépendamment du mouvement de ce système; cela n'aurait lieu que si la quantité

$$A_{17}D_1 + A_{27}D_2 + A_{37}D_3 + A_{47}G_1 + A_{57}G_2 + A_{67}G_3$$

était indépendante du temps. Cette circonstance pourra se trouver réalisée pour certains mouvements exceptionnels du système, mais elle ne sera réalisée, dans tous les cas possibles, que si tous les nouveaux coefficients d'élasticité A_{17}, A_{27}, ..., A_{67} sont nuls. S'il en est ainsi, chaque corps est indilatable par la chaleur; la fonction f devient la somme de deux fonctions, l'une qui ne dépend que de la température, l'autre qui ne dépend que des déformations, et il en est de même de l'énergie interne. Dans ces conditions, les équations du mouvement peuvent admettre une intégrale des forces vives, et, comme la dérivée $\frac{\partial f}{\partial \theta}$ n'est plus fonction que de θ, il résulte de l'égalité (13) que toute modification isothermique est en même temps une modification adiabatique. Quant au potentiel d'élasticité Φ', il ne dépend plus que des déformations. Ce cas correspond à la première approximation, envisagée par M. Boussinesq dans le texte de sa XXXIVe Leçon.

Remarquons que les déformations disparaîtront de l'équation (16) dans le problème général de l'équilibre, avec températures stationnaires, ce qui permettra de traiter ce problème en deux temps.

On peut démontrer que les équations de l'élasticité et de la chaleur, complétées comme nous l'avons indiqué, n'admettent qu'une seule solution : il suffit de combiner les méthodes classiques employées dans ce but, dans les théories de l'élasticité et de la propagation de la chaleur; aussi n'insisterons-nous pas sur ce point.

IV. — Cas d'un corps isotrope.

Nous avons vu (§ I) que, dans le cas d'un corps de contexture quelconque, il faut, en général, considérer 27 coefficients d'élasticité distincts, qui se réduisent à 21, si $\theta = 0$. Le nombre de ces coefficients se réduit, si le corps possède un ou plusieurs axes ou plans de symétrie de contexture, ou s'il est isotrope.

Si le plan xOy est un plan de symétrie, la méthode habituellement usitée pour la réduction du nombre des coefficients d'élasticité montre qu'on doit avoir

$$(17)\qquad \begin{cases} A_{14}=0, & A_{15}=0, & A_{24}=0, & A_{25}=0, & A_{34}=0, \\ A_{35}=0, & A_{46}=0, & A_{56}=0, & A_{47}=0, & A_{57}=0. \end{cases}$$

On a les mêmes égalités, si l'axe Oz est un axe de symétrie.

Si, maintenant, on suppose qu'il existe deux plans de symétrie xOy, yOz, ou deux axes de symétrie Oz et Ox, tout se passe comme si le troisième plan ou le troisième axe, perpendiculaires aux deux premiers, étaient, aussi, plan ou axe de symétrie, et, outre les coefficients déjà annulés, on doit avoir

$$A_{16}=0,\qquad A_{26}=0,\qquad A_{36}=0,\qquad A_{45}=0,\qquad A_{67}=0.$$

Il ne reste, dans ces conditions, que douze coefficients, qui se réduisent à neuf, si $\theta=0$.

Passons au cas d'un corps isotrope. Par la considération des axes principaux de dilatation et des fonctions invariantes du premier et du second degré des déformations, on arrive à ce résultat que l'expression du potentiel thermodynamique de l'unité de volume doit être

$$(18)\quad f=\varphi(\theta)+\frac{\lambda}{2}(D_1+D_2+D_3)^2 + \mu\left(D_1^2+D_2^2+D_3^2+\frac{G_1^2+G_2^2+G_3^2}{2}\right)-\nu(D_1+D_2+D_3)\theta,$$

λ, μ et ν étant trois coefficients, qui sont des constantes si le corps est homogène, ce que nous supposerons dorénavant. Ainsi, l'introduction de la température, dans la théorie des corps isotropes, conduit à considérer un troisième coefficient ν, en plus des deux coefficients de Lamé λ et μ.

Il résulte de l'expression générale de f et de l'égalité (18) qu'on a, pour un corps isotrope,

$$A_{11}=A_{22}=A_{33}=\lambda+2\mu,\qquad A_{44}=A_{55}=A_{66}=\mu,$$
$$A_{23}=A_{31}=A_{12}=\lambda,\qquad A_{17}=A_{27}=A_{37}=-\nu,$$

et que tous les autres coefficients A_{ij} sont nuls. La condition de stabi-

lité de l'état naturel (§ I) exige qu'on ait les inégalités bien connues :

$$3\lambda + 2\mu > 0, \qquad \mu > 0.$$

Tenons compte de l'expression (18) de f, dans les égalités (5), et nous obtiendrons pour les pressions intérieures

$$(19)\quad \left\{\begin{array}{l} N_1 = \lambda\Theta + 2\mu D_1 - \nu\vartheta, \\ N_2 = \lambda\Theta + 2\mu D_2 - \nu\vartheta, \\ N_3 = \lambda\Theta + 2\mu D_3 - \nu\vartheta, \\ T_1 = \mu G_1, \qquad T_2 = \mu G_2, \qquad T_3 = \mu G_3, \end{array}\right.$$

Θ désignant la dilatation cubique définie par la relation

$$\Theta = D_1 + D_2 + D_3.$$

Portons ces valeurs des pressions intérieures dans les équations (9) et (10), et représentons par Δ le symbole opératoire $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$; nous obtiendrons

$$(20)\quad \left\{\begin{array}{l} (\lambda + \mu)\frac{\partial\Theta}{\partial x} + \mu\,\Delta U - \nu\frac{\partial\vartheta}{\partial x} + \rho\left(X - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right) = 0, \\ (\lambda + \mu)\frac{\partial\Theta}{\partial y} + \mu\,\Delta V - \nu\frac{\partial\vartheta}{\partial y} + \rho\left(Y - \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\right) = 0, \\ (\lambda + \mu)\frac{\partial\Theta}{\partial z} + \mu\,\Delta W - \nu\frac{\partial\vartheta}{\partial z} + \rho\left(Z - \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}\right) = 0; \end{array}\right.$$

$$(21)\quad \left\{\begin{array}{l} (\lambda\Theta + 2\mu D_1 - \nu\vartheta)\alpha + \mu(G_3\beta + G_2\gamma) = P_x, \\ (\lambda\Theta + 2\mu D_2 - \nu\vartheta)\beta + \mu(G_1\gamma + G_3\alpha) = P_y, \\ (\lambda\Theta + 2\mu D_3 - \nu\vartheta)\gamma + \mu(G_2\alpha + G_1\beta) = P_z. \end{array}\right.$$

Les équations (20) doivent être vérifiées en tout point du corps et les équations (21) en tout point de sa surface; elles coïncident avec celles de Duhamel quand on y fait $\lambda = \mu$ [Introduction et Historique, équations (1) et (2)]. Nous allons en déduire la signification physique du coefficient ν.

Considérons un corps isotrope à l'état naturel, limité extérieurement par une surface S. Si nous le portons à une température uniforme ϑ, on reconnaît, d'après les équations précédentes, que, dans ce nouvel état considéré comme un état d'équilibre, les déplacements de tous les points du corps seront nuls, si l'on a appliqué, en chaque

point de la surface S, une pression normale et uniforme comptée positivement vers l'intérieur du corps et égale à $\nu\theta$. Le coefficient ν représente donc la pression normale et uniforme à exercer sur le corps, pour une élévation de température égale à l'unité, si l'on veut empêcher les déformations de se produire.

Si le corps, porté à une température uniforme θ à partir de son état naturel, n'est soumis à aucune action extérieure, les équations (20) et (21) montrent qu'il prend un état d'équilibre correspondant aux valeurs

$$D_1 = D_2 = D_3 = \frac{\nu}{3\lambda + 2\mu}\theta; \qquad G_1 = 0, \qquad G_2 = 0, \qquad G_3 = 0,$$

des déformations, et que, dans cet état, les pressions intérieures sont nulles. Si donc on désigne par D le coefficient de dilatation thermique linéaire du corps, on aura

$$\nu = D(3\lambda + 2\mu). \tag{22}$$

Comme D est positif pour la plupart des corps et que $3\lambda + 2\mu$ l'est toujours, on en conclut que ν est généralement positif et que, par suite, c'est une pression véritable, dirigée vers l'intérieur, qu'il faut exercer sur un corps pour l'empêcher de se déformer quand on le chauffe.

Revenons aux équations (20) du mouvement d'un corps isotrope, que nous supposerons soustrait à l'action de toute force extérieure. Si nous différentions la deuxième de ces équations par rapport à z, la troisième par rapport à y et que nous retranchions membre à membre, nous obtenons la première des équations suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{\mu}{\rho}\Delta\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right) &= \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right),\\
\frac{\mu}{\rho}\Delta\left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}\right) &= \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}\right),\\
\frac{\mu}{\rho}\Delta\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right) &= \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right).
\end{aligned}$$

Les deux autres s'obtiennent d'une manière analogue. Ces équations expriment que, dans un corps isotrope, les mouvements tourbil-

lonnaires se propagent avec la vitesse $\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$, tout comme si la température était uniforme et constante. Si le corps est liquide, on sait qu'on a $\mu = 0$. On retrouve ainsi ce résultat que, dans un liquide, les mouvements tourbillonnaires infiniment petits ne se propagent pas, mais nous voyons que cela a lieu même si la température est variable.

Enfin, dans un corps isotrope, il n'y a plus qu'un seul coefficient de conductibilité intérieure que nous représenterons par K, de sorte qu'en négligeant toujours θ vis-à-vis de T_0, l'équation indéfinie de la température (16) prend la forme

$$(23) \qquad C\frac{\partial\theta}{\partial t} = K\Delta\theta - \chi - \frac{T_0}{E}\nu\frac{\partial\Theta}{\partial t}.$$

Nous poserons

$$\chi = -S + L\theta,$$

S désignant, en chaque point, le débit de la source de chaleur par unité de volume, fonction de x, y, z, t, et L, le coefficient de diathermanéité du corps qu'on peut supposer indépendant de θ, puisque θ est une quantité très petite. L'éther ambiant est supposé avoir une température absolue uniforme T_0.

V. — Mouvement des corps isotropes et vitesse du son.

En l'absence de toute force extérieure, les équations indéfinies (20) du mouvement d'un milieu isotrope s'écrivent

$$(24) \quad (\lambda+\mu)\frac{\partial\Theta}{\partial(x, y, z)} + \mu\Delta(U, V, W) - \nu\frac{\partial\theta}{\partial(x, y, z)} - \rho\frac{\partial^2(U, V, W)}{\partial t^2} = 0.$$

Différentions la première par rapport à x, la seconde par rapport à y, la troisième par rapport à z, et ajoutons membre à membre; nous aurons une équation où ne figureront plus que Θ et θ, que nous écrirons

$$(25) \qquad \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\lambda+2\mu}{\rho}\Delta\right)\Theta + \frac{\nu}{\rho}\Delta\theta = 0.$$

D'autre part, l'équation indéfinie (23) de la température peut

s'écrire

$$(26)\qquad \left(C\frac{\partial}{\partial t} - K\Delta + L\right)\theta = S - \frac{T_0}{E}\nu\frac{\partial\Theta}{\partial t}.$$

Effectuons, sur les deux membres de l'équation (25), l'opération $C\dfrac{\partial}{\partial t} - K\Delta + L$, ce qui nous permettra d'éliminer θ au moyen de l'équation (26); puis, par un procédé analogue, éliminons Θ de l'équation (26) au moyen de l'équation (25). Nous reconnaîtrons, ainsi, que les fonctions Θ et θ doivent vérifier, respectivement, les deux équations du quatrième ordre :

$$(27)\qquad \left(C\frac{\partial}{\partial t} - K\Delta + L\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\lambda+2\mu}{\rho}\Delta\right)\Theta + \frac{\nu}{\rho}\Delta S - \frac{T_0}{\rho E}\nu^2\frac{\partial\Delta\Theta}{\partial t} = 0,$$

$$(28)\qquad \left(C\frac{\partial}{\partial t} - K\Delta + L\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\lambda+2\mu}{\rho}\Delta\right)\theta - \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\lambda+2\mu}{\rho}\Delta\right)S - \frac{T_0}{\rho E}\nu^2\frac{\partial\Delta\theta}{\partial t} = 0.$$

Ces deux équations seront identiques si la fonction S satisfait à l'équation du second ordre

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} - \frac{\lambda+2\mu-\nu}{\rho}\Delta S = 0.$$

Les fonctions Θ et θ étant ainsi déterminées, les équations (24) deviennent des équations du second ordre, avec seconds membres, en U, V, W et de même type, où les variables sont séparées.

Considérons, par exemple, l'équation (27). Si nous posons

$$a^2 = \frac{\lambda+2\mu}{\rho}, \qquad b^2 = \frac{\lambda+2\mu}{\rho} + \frac{T_0\nu^2}{CE\rho},$$

nous reconnaîtrons qu'elle peut s'écrire

$$(29)\qquad C\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - b^2\Delta\right)\Theta - K\Delta\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\Delta\right)\Theta + L\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\Delta\right)\Theta + \frac{\nu}{\rho}\Delta S = 0.$$

Comme les constantes b^2 et a^2 diffèrent entre elles de l'expression $\dfrac{T_0\nu^2}{CE\rho}$, la première question qui se pose, avant d'aborder l'intégration de l'équation (29), est de savoir quelle est, en moyenne et vis-à-vis

de a^2, la valeur de cette dernière quantité, dans le cas des corps réels que le physicien a seuls à considérer. Or, il revient évidemment au même de rechercher la valeur de $\frac{T_0 \nu^2}{CE(\lambda + 2\mu)}$ vis-à-vis de l'unité.

Nous avons donc calculé numériquement cette dernière expression, pour un certain nombre de corps, dont nous donnons plus loin le Tableau avec les résultats de ce calcul. Les coefficients λ, μ et ν ont été calculés en unités C. G. S., les deux premiers au moyen du coefficient de Poisson σ et du module d'Young $\mathcal{E}$, le troisième au moyen de la formule (22). C a été calculé, au moyen de la densité et de la chaleur spécifique c, par la formule $C = c\rho$. Nous avons pris $E = 4{,}17.10^7$ et $T_0 = 288$, ce qui correspond à la température de 15° C.

	Substances.						
	Verre.	Acier.	Cuivre.	Laiton.	Plomb.	Argent.	Fer.
σ	0,25 (1)	0,2686 (2)	0,3270 (2)	0,3275 (2)	0,4282 (2)	0,370 (12)	0,277 (12)
$\mathcal{E}$ kilos par mm²	6722 (3)	19561 (3)	10519 (3)	9277 (3)	1728 (3)	7146 (3)	20794 (3)
ρ	2,463 (13)	7,833 (13)	8,85 (8)	8,44 (12)	11,35 (9)	10,512 (6)	7,79 (7)
c	0,198 (4)	»	0,09515 (4)	0,095 (4)	0,03140 (4)	0,05701 (4)	0,112359 (5)
C	0,488	»	0,842	0,802	0,356	0,599	0,876
$D.10^6$	8,909 (10)	13,690 (10)	17,173 (10)	18,782 (10)	28,484 (10)	19,511 (11)	12,205 (10)
$\lambda.10^{-11}$	2,64	8,77	11,49	6,52	3,54	7,48	9,92
$\mu.10^{-11}$	2,64	7,56	3,74	3,43	0,593	2,628	7,98
$\nu.10^{-6}$	11,75	56,7	72,0	49,6	33,67	54,0	55,8
$\frac{T_0 \nu^2}{CE(\lambda+2\mu)}$	0,00248	»	0,0225	0,0159	0,0466	0,0265	0,00958

Moyenne..... 0,0243

Les valeurs de σ proviennent du *Cours de Physique de l'École Polytechnique* de MM. Jamin et Bouty, sauf les deux dernières que nous avons prises dans le formulaire de M. Hospitalier (édition de 1909). Toutes les autres quantités $\mathcal{E}$, ρ, c, D, sauf la densité du laiton, ont été extraites de l'*Annuaire du Bureau des Longitudes* pour 1908; d'ailleurs nous avons eu soin d'indiquer, par un renvoi, le nom de

(1) Cornu. — (2) Amagat. — (3) Wertheim (expériences de traction). — (4) Regnault. — (5) Byström. — (6) Dumas. — (7) Hérapath. — (8) D'Elhuyart. — (9) Gay-Lussac et Thénard. — (10) Laplace et Lavoisier. — (11) Daniell. — (12) *Formulaire Hospitalier*. — (13) Nombre donné dans l'*Annuaire du Bureau des Longitudes* sans indication de l'auteur.

l'expérimentateur ou la provenance des nombres que nous donnons et qui ont servi de base à nos calculs.

On voit que, pour les corps que nous avons considérés, les quantités a^2 et b^2 diffèrent entre elles et en moyenne d'environ 2,5 centièmes de leur valeur. A une première approximation, nous pouvons donc remplacer b^2 par a^2 dans l'équation (29) et l'on voit que cela revient à négliger le dernier terme du second membre de l'équation (26).

Ainsi, à une première approximation, nous pouvons déterminer la température indépendamment des déformations du milieu, tout comme si celui-ci était un solide invariable. Une fois la température connue, l'équation (25) fera connaître Θ, puis les équations (24) donneront U, V, W. On pourra, ensuite, tenir compte de cette valeur de Θ, pour déterminer, au moyen de l'équation (26), la température à une deuxième approximation.

Cette méthode approchée d'intégration a été mentionnée par Duhamel et, depuis, par M. Boussinesq.

Nous avons vu (Introduction et Historique, § II) que Duhamel, voulant obtenir, à une deuxième approximation, la vitesse du son dans les corps solides, avait étendu à ceux-ci l'hypothèse d'adiabatie, qui avait été reconnue légitime dans le cas des gaz. Il est possible, grâce à la rapidité du phénomène de propagation des ondes longitudinales dans les solides, que chaque modification élémentaire du milieu soit assez brusque pour que les particules matérielles n'aient pas le temps d'échanger de la chaleur avec les particules voisines et l'éther ambiant; dans ces conditions, nous devrions faire $K = 0$ et $L = 0$ dans l'équation (26). Mais cette hypothèse, tout à fait légitime dans le cas des corps mauvais conducteurs et athermanes, reste problématique pour les autres corps, notamment pour les métaux, dont la conductibilité est très grande.

Malgré ces restrictions, faisons toutefois l'hypothèse de Duhamel : l'équation (26) pourra s'écrire, en supposant que S est nul,

$$C\frac{\partial\vartheta}{\partial t} = -\frac{T_0}{E}\nu\frac{\partial\Theta}{\partial t},$$

et comme, à l'instant initial, la dilatation cubique et la température

sont nulles, nous avons

$$\theta = -\frac{T_0 \nu}{CE}\Theta.$$

Si nous remplaçons θ par cette valeur, dans les équations (20) et (21) des corps isotropes, nous reconnaissons sans peine qu'elles se réduisent aux équations classiques d'un milieu de température uniforme et constante, dont les deux coefficients de Lamé seraient respectivement $\lambda + \frac{T_0 \nu^2}{CE}$ et μ. Nous en concluons que, dans un semblable milieu, la vitesse de propagation V′ des ondes longitudinales sera

$$V' = \sqrt{\frac{1}{\rho}\left(\lambda + \frac{T_0 \nu^2}{CE} + 2\mu\right)}.$$

En faisant dans cette formule $\nu = 0$, on retrouve l'ancienne vitesse de propagation

$$V = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}.$$

Il en résulte qu'on a

$$V' = V\sqrt{1 + \frac{T_0 \nu^2}{CE(\lambda + 2\mu)}}. \tag{30}$$

D'après le Tableau des valeurs numériques de la deuxième quantité sous le radical donnée pour quelques corps isotropes, nous voyons que V′ surpasse V d'environ 1,2 pour 100, à la température de 15° C. Mais la détermination expérimentale de la vitesse du son dans un solide est encore si peu précise, que la formule (30) n'offre guère, actuellement, qu'un intérêt purement théorique.

CHAPITRE II.

LES PLAQUES HOMOGÈNES ET ISOTROPES.

I. — Potentiel thermodynamique interne d'une plaque peu déformée.

Nous allons considérer une plaque homogène et isotrope, comprise entre deux plans parallèles très rapprochés et terminée par un bord

cylindrique, normal à ces deux plans. Nous prendrons, pour plan xOy, le plan moyen de cette plaque, de telle sorte que ses deux faces auront pour équations $z = \pm \varepsilon$, 2ε étant l'épaisseur de la plaque.

Commençons par chercher ce que devient l'expression du potentiel thermodynamique interne de la plaque

$$\mathcal{F} = \int \Big[\varphi(\mathfrak{T}) + \frac{\lambda}{2}(D_1 + D_2 + D_3)^2 + \mu\left(D_1^2 + D_2^2 + D_3^2 + \frac{G_1^2 + G_2^2 + G_3^2}{2}\right) - \nu(D_1 + D_2 + D_3)\mathfrak{T}\Big] d\varpi,$$

$\mathfrak{T}$ désignant la température, lorsqu'on tient compte de ce que ε est une quantité très petite.

Nous supposerons que les seules pressions extérieures, qui s'exercent sur la plaque, sont des pressions appliquées exclusivement sur ses bords. Il en résulte que, sur les deux faces de la plaque, les pressions intérieures N_3, T_1, T_2 sont nulles et que, par suite, d'après les formules (19) (Chap. I, § IV), on a, pour $z = \pm \varepsilon$,

$$(1) \quad \begin{cases} (\lambda + 2\mu) D_3 + \lambda(D_1 + D_2) - \nu\mathfrak{T} = 0, \\ G_1 = 0, \qquad G_2 = 0. \end{cases}$$

Développons G_1 suivant les puissances croissantes de z; nous pourrons écrire

$$G_1 = g + g_1 z + g_2 \frac{z^2}{2} + \ldots$$

et nous aurons, d'après ce qui précède,

$$g + g_2 \frac{\varepsilon^2}{2} + \ldots = 0, \qquad g_1 + g_3 \frac{\varepsilon^2}{6} + \ldots = 0,$$

d'où nous déduisons

$$(2) \qquad G_1 = -g_2 \frac{\varepsilon^2 - z^2}{2} + \ldots.$$

Nous voyons ainsi que les premiers membres des égalités (1), considérés en un point quelconque de la plaque, sont des quantités du second ordre. Si nous négligeons, dans l'expression de f, les termes à partir du quatrième ordre de petitesse, nous pourrons donc y supprimer G_1^2 et G_2^2.

D'autre part, nous pourrons écrire, en un point quelconque de la plaque,

$$(3) \qquad D_3 = -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}(D_1+D_2) + \frac{\nu}{\lambda+2\mu}\mathfrak{T} + P(\varepsilon^2 - z^2).$$

P étant une quantité finie.

Développons les déplacements U, V, W, les déformations D_1, D_2, G_3 et la température $\mathfrak{T}$, suivant les puissances croissantes de z; nous pourrons écrire

$$U = u + u_1 z + u_2 \frac{z^2}{2} + \dots, \qquad D_1 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial x} z + \frac{\partial u_2}{\partial x}\frac{z^2}{2} + \dots$$

$$V = v + v_1 z + v_2 \frac{z^2}{2} + \dots, \qquad D_2 = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial y} z + \frac{\partial v_2}{\partial y}\frac{z^2}{2} + \dots$$

$$W = w + w_1 z + w_2 \frac{z^2}{2} + \dots, \qquad G_3 = U_0 + U_1 z + U_2 \frac{z^2}{2} + \dots$$

$$\mathfrak{T} = \theta + \theta_1 z + \theta_2 \frac{z^2}{2} + \dots$$

Les quantités u, v, w, θ sont les valeurs respectives de U, V, W, $\mathfrak{T}$ pour $z = 0$, que nous allons chercher à déterminer.

Remplaçons d'abord, dans $\mathcal{F}$, D_3 par son expression (3), puis négligeons les termes à partir du quatrième ordre de petitesse, nous obtenonspar un calcul facile

$$\mathcal{F} = \int \varphi_1(\mathfrak{T})\, d\varpi + \mu \int \left[\frac{2(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}(D_1^2 + D_2^2) + \frac{2\lambda}{\lambda+2\mu} D_1 D_2 + \frac{1}{2} G_3^2 - \frac{2\nu}{\lambda+2\mu}(D_1+D_2)\mathfrak{T} \right] d\varpi.$$

φ_1 désignant une nouvelle fonction de $\mathfrak{T}$.

Remplaçons, maintenant, D_1, D_2, G_3 et $\mathfrak{T}$ par leurs développements, nous pourrons écrire

$$\mathcal{F} = \int \varphi_1(\mathfrak{T})\, d\varpi + \mu \int\int\int \left(\mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1 z + \mathcal{H}_2 \frac{z^2}{2} + \dots \right) dx\, dy\, dz.$$

en posant

$$a = \frac{4(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}, \qquad b = \frac{2\lambda}{\lambda+2\mu} = a - 2.$$

$$\mathcal{H}_0 = \frac{a}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \right] + b \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} U_0^2 - \frac{2\nu}{\lambda+2\mu}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)\theta$$

et

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_2 = {} & a\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v_1}{\partial y}\right)^2\right]+2b\frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial v_1}{\partial y}+U_1^2\\ & +a\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v_2}{\partial y}\right)+b\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v_2}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)+U_0U_2\\ & -\frac{2\nu}{\lambda+2\mu}\left[\theta\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}\right)+2\theta_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial y}\right)+\theta_2\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right].\end{aligned}$$

$\mathcal{H}_1$ désigne une expression analogue qu'il est inutile d'écrire. En intégrant par rapport à z, il vient

$$(4)\qquad \mathfrak{F}=\int\varphi_1(\mathfrak{S})\,d\varpi+2\mu\varepsilon\int\int\left(\mathcal{H}_0+\mathcal{H}_2\frac{\varepsilon^2}{6}\right)dx\,dy,$$

la deuxième intégrale s'étendant à la surface moyenne de la plaque et la parenthèse de cette intégrale étant exacte aux termes du quatrième ordre près. L'expression précédente va jouer le même rôle que le travail des forces élastiques, dans l'analyse de M. E. Mathieu.

Il nous reste à exprimer les quantités u_1, u_2, v_1, v_2, θ_1, θ_2, U_0, U_1, U_2 en fonction de u, v, w et θ.

En développant les deux dernières équations (1), on en déduit aisément

$$(5)\qquad \begin{cases} u_1=-\dfrac{\partial w}{\partial x}, & u_2=-\dfrac{\partial w_1}{\partial x},\\ v_1=-\dfrac{\partial w}{\partial y}, & v_2=-\dfrac{\partial w_1}{\partial y},\end{cases}$$

en négligeant les termes en ε^2, ce qui est permis, car ces équations servent à calculer des quantités qui sont elles-mêmes multipliées par ε^2 dans l'expression de $\mathfrak{F}$.

La première équation (1), prise aux deux faces de la plaque, donnera de même

$$(\lambda+2\mu)w_1+\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)-\nu\theta=0.$$

D'après cela, les deuxième et quatrième équation (5) deviendront

$$(6)\qquad \begin{cases} u_2=\dfrac{b}{2}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)-\dfrac{\nu}{\lambda+2\mu}\dfrac{\partial\theta}{\partial x},\\ v_2=\dfrac{b}{2}\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)-\dfrac{\nu}{\lambda+2\mu}\dfrac{\partial\theta}{\partial y}.\end{cases}$$

On a, d'autre part, pour les quantités U_0, U_1, U_2,

$$(7)\quad \begin{cases} U_0 = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}, \qquad U_1 = -2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}, \\ U_2 = b\dfrac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y}\right) - \dfrac{2\nu}{\lambda + 2\mu}\dfrac{\partial^2 \vartheta}{\partial x\,\partial y}. \end{cases}$$

Il nous reste à calculer θ_1 et θ_2 : soit θ_e et θ'_e les températures extérieures aux faces $+\varepsilon$ et $-\varepsilon$, k et k' les coefficients de conductibilité extérieure correspondants, on a

$$(8)\quad \begin{cases} K\dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial z} = k\,(\theta_e - \mathfrak{T}) \qquad \text{pour} \qquad z = \varepsilon, \\ K\dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial z} = k'(\mathfrak{T} - \theta'_e) \qquad \text{pour} \qquad z = -\varepsilon. \end{cases}$$

Si nous développons $\mathfrak{T}$ et $\dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial z}$, et que nous négligions les termes en ε^2, nous aurons les deux équations

$$[2K + \varepsilon(k + k')]\theta_1 = k\theta_e - k'\theta'_e - (k - k')\theta,$$
$$2K\varepsilon\theta_2 = k\theta_e + k'\theta'_e - (k + k')\theta - \varepsilon(k - k')\theta_1,$$

qui nous feront connaître θ_1 et θ_2. Dans le cas particulier où

$$k = k', \qquad \theta_e = \theta'_e = 0,$$

on aura

$$\theta_1 = 0, \qquad \theta_2 = -\frac{k}{\varepsilon K}\theta.$$

L'expression (4) de $\mathcal{F}$ ne dépendra plus ainsi que de u, v, w et θ.

II. — Équations du mouvement des plaques.

Nous devons écrire qu'on a, pour toute modification virtuelle isothermique,

$$(9)\qquad \delta\mathfrak{S}_e - \delta_\theta\mathcal{F} + \delta J = 0.$$

En appelant ds un élément du contour de la plaque, le travail élémentaire des forces extérieures s'écrit

$$\delta\mathfrak{S}_e = \iiint \rho(X\,\delta U + Y\,\delta V + Z\,\delta W)\,dx\,dy\,dz$$
$$+ \iint (P_x\,\delta U + P_y\,\delta V + P_z\,\delta W)\,ds\,dz.$$

Si nous développons, suivant les puissances de z, les forces extérieures et les composantes du déplacement virtuel, nous obtiendrons, en intégrant par rapport à z,

$$\delta \mathfrak{T}_e = 2\varepsilon \int\int \rho (X\,\delta u + Y\,\delta v + Z\,\delta w)\,dx\,dy$$
$$+ 2\varepsilon \int (P_x\,\delta u + P_y\,\delta v + P_z\,\delta w)\,ds + \text{des termes en } \varepsilon^3,$$

$X, Y, \ldots, P_z$ désignant, maintenant, les composantes des forces extérieures pour $z = 0$. Nous admettrons qu'on peut limiter l'expression précédente à ses termes en ε; avec le même degré d'approximation, nous aurons aussi

$$\delta J = -2\varepsilon \int\int \rho \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,\delta u + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\,\delta v + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\,\delta w \right) dx\,dy.$$

Nous avons, d'autre part,

$$\delta_0 \mathcal{F} = 2\mu\varepsilon \int\int \left(\delta_0 \mathcal{H}_0 + \frac{\varepsilon^2}{6}\,\delta_0 \mathcal{H}_2 \right) dx\,dy.$$

Nous pouvons simplifier cette expression par la remarque suivante : posons

$$\mathcal{H}_2 = H + H',$$

H et H′ étant les fonctions définies par les égalités

$$H = a\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] + 2b\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 4\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} \right)^2 + \frac{4\nu}{\lambda + 2\mu}\,\theta_1\,\Delta w.$$

$$H' = a\left(\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\,\frac{\partial v_2}{\partial y} \right) + b\left(\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}\,\frac{\partial u_2}{\partial x} \right) + U_0 U_2$$
$$- \frac{2\nu}{\lambda + 2\mu}\left[\theta\left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) + \theta_2\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right].$$

D'après les égalités (6) et (7), on voit que les fonctions u et v ne figurent que dans $\mathcal{H}_0$ et $\frac{\varepsilon^2}{6}$ H′ et que w ne figure que dans H. Nous pourrons donc négliger $\frac{\varepsilon^2}{6}$ H′ vis-à-vis de $\mathcal{H}_0$ et réduire ainsi $\mathcal{H}_2$ à H.

Pour obtenir les équations du mouvement de la plaque, nous devrons, dans l'équation (9), considérer séparément les termes qui dépendent, respectivement, de δu, δv et δw. Commençons par ceux qui dépendent de δw; ils vont nous fournir les équations du mouvement transversal.

Négligeant donc H', nous aurons

$$\delta_\theta \mathcal{H}_2 = 2a\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2}\right) + 2b\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2}\right)$$
$$+ 8\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x\,\partial y} + \frac{4\nu}{\lambda + 2\mu}\theta_1 \Delta \delta w.$$

Si nous posons, avec M. E. Mathieu,

$$P = 2\left(a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \qquad Q = 2\left(a\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + b\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right),$$

nous pourrons écrire

$$\delta_\theta \mathcal{H}_2 = P\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} + Q\frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} + 8\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x\,\partial y} + \frac{4\nu}{\lambda + 2\mu}\theta_1 \Delta \delta w.$$

et nous aurons à intégrer par parties l'expression

$$(10) \quad \int\int \delta_\theta \mathcal{H}_2\, dx\, dy = \int\int\left(P\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} + Q\frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} + 8\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x\,\partial y}\right)dx\,dy$$
$$+ \frac{4\nu}{\lambda + 2\mu}\int\int \theta_1 \Delta \delta w\, dx\, dy.$$

La première intégrale du second membre est celle qui conduit aux équations classiques du mouvement transversal ; nous nous bornerons donc à donner le résultat du calcul [1].

En appelant α et β les cosinus directeurs de la normale extérieure n au contour s de la plaque, on a

$$(11) \quad \int\int P\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2}dx\,dy = \int P\alpha^2\frac{d\,\delta w}{dn}ds - \int\left[\quad\frac{d}{ds}(P\alpha\beta) + \alpha\frac{\partial P}{\partial x}\right]\delta w\, ds + \int\int\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\delta w\, dx\, dy.$$

$$(12) \quad \int\int Q\frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2}dx\,dy = \int Q\beta^2\frac{d\,\delta w}{dn}ds - \int\left[-\frac{d}{ds}(Q\alpha\beta) + \beta\frac{\partial Q}{\partial y}\right]\delta w\, ds + \int\int\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}\delta w\, dx\, dy,$$

$$(13) \quad 2\int\int\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x\,\partial y}dx\,dy$$
$$= 2\int\alpha\beta\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\frac{d\,\delta w}{dn}ds$$
$$+ \int\left\{\frac{d}{ds}\left[(\alpha^2 - \beta^2)\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right] - \alpha\frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial y^2} - \beta\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\,\partial y}\right\}\delta w\, ds + 2\int\int\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2}\delta w\, dx\, dy.$$

---

(1) E. MATHIEU, *loc. cit.*, t. I, Chap. VI, § 6.

La dernière intégrale de l'équation (10) se déduit immédiatement des égalités (11) et (12); on obtient

$$(14)\quad \int\int \theta_1 \Delta\,\delta w\,dx\,dy = \int \theta_1 \frac{d\,\delta w}{dn}\,ds - \int \frac{d\theta_1}{dn}\,\delta w\,ds + \int\int \Delta\theta_1\,\delta w\,dx\,dy.$$

Les égalités (11), (12), (13), (14) nous font ainsi connaître le second membre de l'égalité (10). Nous connaissons donc, dans l'équation (9), tous les termes qui dépendent de δw.

En égalant à zéro, dans cette équation, la somme des coefficients de δw qui figurent sous les intégrales doubles, et en remplaçant les fonctions P et Q par leurs expressions, nous obtiendrons l'équation indéfinie du mouvement transversal

$$(15)\qquad \frac{\mu\varepsilon^2}{3}\Delta\left(a\,\Delta w + \frac{2\nu}{\lambda+2\mu}\theta_1\right) - \rho\left(Z - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right) = 0.$$

En égalant ensuite à zéro la somme des coefficients de $\frac{d\,\delta w}{dn}$, puis celle des coefficients de δw qui figurent dans les intégrales curvilignes, nous obtiendrons les deux conditions au contour

$$(16)\quad \begin{cases} \dfrac{b}{2}\Delta w + \alpha^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\alpha\beta\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} + \beta^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \dfrac{\nu}{\lambda+2\mu}\theta_1 = 0, \\ 2\dfrac{d}{ds}\left[\alpha\beta\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + (\beta^2-\alpha^2)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right] \\ \qquad + \dfrac{d}{dn}\left(a\,\Delta w + \dfrac{2\nu}{\lambda+2\mu}\theta_1\right) + \dfrac{3}{\mu\varepsilon^2}P_z = 0. \end{cases}$$

Ces équations généralisent celles qui ont été données par Kirchhoff [1]; elles montrent que la température n'a qu'une influence très faible sur le mouvement transversal, et que celui-ci en est même indépendant, d'après l'expression de θ_1 en fonction de θ, si les conditions physiques sont les mêmes sur les deux faces de la plaque.

Passons aux équations du mouvement tangentiel; si nous posons

$$L = a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2\nu}{\lambda+2\mu}\theta, \qquad M = a\frac{\partial v}{\partial y} + b\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2\nu}{\lambda+2\mu}\theta.$$

---

[1] Kirchhoff, 30te *Vorlesung über mathematische Physik.*

nous aurons

$$\delta_\theta \mathcal{H}_0 = L \frac{\partial\, \delta u}{\partial x} + M \frac{\partial\, \delta v}{\partial y} + U_0 \left(\frac{\partial\, \delta u}{\partial y} + \frac{\partial\, \delta v}{\partial x} \right);$$

d'où, en intégrant par parties,

$$\int\int \delta_\theta \mathcal{H}_0 \, dx\, dy = \int [(L\alpha + U_0\beta)\,\delta u + (M\beta + U_0\alpha)\,\delta v]\, ds$$
$$- \int\int \left[\left(\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial U_0}{\partial y} \right) \delta u + \left(\frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial U_0}{\partial x} \right) \delta v \right] dx\, dy.$$

En substituant cette expression dans l'équation (9), et en égalant à zéro la somme des coefficients de δu, puis celle des coefficients de δv qui figurent sous les intégrales doubles, nous obtiendrons, après avoir remplacé L, M et U_0 par leurs valeurs, les équations indéfinies

$$(17) \quad \begin{cases} \mu \left[a \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (b+1) \dfrac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial y} - \dfrac{2\nu}{\lambda + 2\mu} \dfrac{\partial \theta}{\partial x} \right] + \rho \left(X - \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) = 0, \\ \mu \left[a \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (b+1) \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} - \dfrac{2\nu}{\lambda + 2\mu} \dfrac{\partial \theta}{\partial y} \right] + \rho \left(Y - \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) = 0 \end{cases}$$

et, par un procédé analogue, les deux conditions au contour

$$(18) \quad \begin{cases} \mu \left[\left(a \dfrac{\partial u}{\partial x} + b \dfrac{\partial v}{\partial y} - \dfrac{2\nu}{\lambda + 2\mu} \theta \right) \alpha + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \right) \beta \right] = P_x, \\ \mu \left[\left(a \dfrac{\partial v}{\partial y} + b \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{2\nu}{\lambda + 2\mu} \theta \right) \beta + \left(\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} \right) \alpha \right] = P_y. \end{cases}$$

III. — Équations de la température.

Considérons la portion de la plaque limitée par ses deux faces et par un bord cylindrique parallèle à Oz, s'appuyant sur une courbe fermée arbitraire, tracée dans le plan xOy. Pendant une modification virtuelle quelconque, cette portion de volume dégage une quantité de chaleur δQ, qui a pour expression [Chap. I, § III, équat. (13)]

$$\delta Q = \int \frac{T}{E} \delta \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{S}} d\varpi.$$

Or, nous avons ici

$$\delta \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{S}} = - \frac{2\mu\nu}{\lambda + 2\mu} (\delta D_1 + \delta D_2) + \frac{\partial^2 f}{\partial \mathfrak{S}^2} \delta \mathfrak{S}.$$

de sorte qu'en désignant par C la capacité calorifique de l'unité de volume, nous aurons

$$\delta Q = -\int \left[\frac{T}{E} \frac{2\mu\nu}{\lambda + 2\mu} (\delta D_1 + \delta D_2) + C\, \delta \mathfrak{S} \right] d\varpi.$$

Remplaçons les fonctions T, δD_1, δD_2, $\delta \mathfrak{S}$ par leurs développements et intégrons par rapport à z. En négligeant, sous le signe $\int$, les termes à partir de ε^2, nous aurons

$$\delta Q = -2\varepsilon \int\int \left[\frac{T}{E} \frac{2\mu\nu}{\lambda + 2\mu} \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + C\, \delta\theta \right] dx\, dy,$$

T désignant maintenant la température absolue pour $z = 0$. Posons

$$\Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y};$$

la quantité de chaleur dQ, dégagée dans une modification réelle, aura pour expression

$$(19) \qquad dQ = -2\varepsilon\, dt \int\int \left(\frac{T}{E} \frac{2\mu\nu}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial \Theta}{\partial t} + C \frac{\partial \theta}{\partial t} \right) dx\, dy.$$

Mais, on a aussi la relation générale [Chap. I, § III, équat. (15)]

$$(20) \qquad dQ = dt \left(-\int F_n\, d\Sigma + \int \chi\, d\varpi \right),$$

F_n désignant le flux de chaleur, relatif à la normale extérieure, et χ le débit de la source de chaleur par unité de volume, au point où se trouve l'élément $d\varpi$. Or, nous avons

$$\int F_n\, d\Sigma = \int\int (\alpha F_x + \beta F_y)\, ds\, dz + \int\int \gamma F_z\, dx\, dy,$$

la première intégrale du second membre correspondant au bord de la portion de plaque considérée, et la deuxième, à ses deux faces. Si nous développons les flux de chaleur

$$F_x = K \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial x}, \qquad F_y = K \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial y},$$

suivant les puissances de z et si nous intégrons par rapport à z, nous

obtiendrons, au degré d'approximation précédemment adopté,

$$\iint (\alpha F_x + \beta F_y)\, ds\, dz = 2K\varepsilon \int \left(\alpha \frac{\partial\theta}{\partial x} + \beta \frac{\partial\theta}{\partial y}\right) ds = 2K\varepsilon \iint \Delta\theta\, dx\, dy.$$

On a, d'autre part,

$$F_z = K \frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial z};$$

si nous tenons compte des conditions (8) et que nous supposions, pour simplifier, que les conditions physiques sont les mêmes sur les deux faces, il viendra

$$\iint \gamma F_z\, dx\, dy = -\iint k(\mathfrak{I}_\varepsilon + \mathfrak{I}_{-\varepsilon})\, dx\, dy.$$

Si, maintenant, nous développons $\mathfrak{I}_\varepsilon$ et $\mathfrak{I}_{-\varepsilon}$, nous obtiendrons finalement, en remplaçant θ_2 par $-\frac{k}{\varepsilon K}\theta$,

$$\iint \gamma F_z\, dx\, dy = -2\varepsilon \iint k\left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{k}{2K}\right)\theta\, dx\, dy.$$

Enfin nous avons

$$\int \chi\, d\varpi = 2\varepsilon \iint (-S + L\theta)\, dx\, dy,$$

S désignant le débit de la source de chaleur pour $z = 0$, et L, le coefficient de diathermanéité. D'après cela, l'égalité (20) devient

$$(21) \qquad dQ = -2\varepsilon\, dt \iint \left[K\,\Delta\theta + S - L\theta - k\left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{k}{2K}\right)\theta\right] dx\, dy.$$

Par comparaison des égalités (19) et (21), nous obtenons l'équation indéfinie de la température

$$(22) \qquad C\frac{\partial\theta}{\partial t} = K\,\Delta\theta + S - \mathfrak{L}\,\theta - \frac{2\mu\nu}{\lambda + 2\mu}\,\frac{T}{E}\,\frac{\partial\Theta}{\partial t},$$

où nous avons posé

$$\mathfrak{L} = L + k\left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{k}{2K}\right).$$

Nous avons, en outre, l'équation au contour

$$K\frac{d\theta}{dn} + h\,\theta = 0.$$

IV. — Mouvement tangentiel et vitesse du son.

En l'absence de forces extérieures, les équations (17) du mouvement tangentiel d'une plaque peuvent s'écrire

$$(23)\quad \mu(b+1)\frac{\partial\Theta}{\partial(x,y)} + \mu\,\Delta(u,v) - \frac{2\mu\nu}{\lambda+2\mu}\frac{\partial\theta}{\partial(x,y)} - \rho\frac{\partial^2(u,v)}{\partial t^2} = 0.$$

Elles ont la même forme que les équations (24) (Chap. I, § V) des corps à trois dimensions, ce qui permet de leur appliquer la même méthode d'intégration.

Il résulte tout d'abord, de ces équations, que la rotation moyenne se propage avec la vitesse $\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$, tout comme si la température était uniforme et constante. D'autre part, l'équation en Θ et θ est ici

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\mu}{\rho}a\Delta\right)\Theta + \frac{2\mu}{\lambda+2\mu}\frac{\nu}{\rho}\Delta\theta = 0.$$

et, si l'on élimine θ entre cette équation et l'équation (22), on obtient, en posant

$$a_1^2 = \frac{\mu}{\rho}a, \qquad b_1^2 = \frac{\mu}{\rho}a + \left(\frac{2\mu}{\lambda+2\mu}\right)^2\frac{T_0\nu^2}{CE\rho},$$

$$C\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - b_1^2\Delta\right)\Theta - K\Delta\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_1^2\Delta\right)\Theta + \mathfrak{L}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_1^2\Delta\right)\Theta + \frac{2\mu}{\lambda+2\mu}\frac{\nu}{\rho}\Delta S = 0.$$

Cette équation est de même forme que celle des milieux à trois dimensions, mais il faut remarquer que le terme où figure $\mathfrak{L}$ subsiste, même si la plaque est athermane ; il ne disparaîtrait que si, de plus, ses deux faces étaient imperméables à la chaleur.

La même méthode d'intégration approchée est applicable. Nous pouvons écrire, en effet,

$$b_1^2 = a_1^2\left[1 + \frac{T_0\nu^2}{CE(\lambda+2\mu)}\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right],$$

et comme nous avons reconnu, antérieurement, que la quantité $\frac{T_0\nu^2}{CE(\lambda+2\mu)}$ était, en général, très petite vis-à-vis de l'unité, *a fortiori* en est-il de même de son produit par $\frac{\mu}{\lambda+\mu}$.

Enfin, si nous considérons les corps pour lesquels on peut admettre, à titre d'hypothèse, que le phénomène de la propagation des ondes longitudinales soit adiabatique, nous serons conduits à écrire

$$\theta = -\frac{2\mu}{\lambda + 2\mu}\frac{T_0\nu}{CE}\Theta,$$

et, si nous tenons compte de cette valeur de θ dans les équations (17) et (18) du mouvement tangentiel, nous reconnaîtrons que les équations ainsi abtenues sont celles d'une plaque de température uniforme et constante, dont les coefficients a et b seraient remplacés respectivement par

$$a + \left(\frac{2\mu}{\lambda + 2\mu}\right)^2 \frac{T_0\nu^2}{CE} \quad \text{et} \quad b + \left(\frac{2\mu}{\lambda + 2\mu}\right)^2 \frac{T_0\nu^2}{CE}.$$

La vitesse du son qui, dans le milieu primitif, était

$$V = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}a},$$

deviendra

$$V' = V\sqrt{1 + \frac{T_0\nu^2}{CE(\lambda + 2\mu)}\frac{\mu}{\lambda + \mu}}. \tag{24}$$

Cette formule nous fait connaître la vitesse du son en deuxième approximation : elle montre que l'accroissement relatif de vitesse, qui résulte des effets de la température, serait égal à la moitié de ce qu'il est pour un corps à trois dimensions, dans l'hypothèse $\lambda = \mu$.

CHAPITRE III.

LES TIGES DROITES.

I. — Équations du mouvement longitudinal.

Considérons une tige cylindrique, de section quelconque, dont les génératrices sont parallèles à l'axe Oz et qui est limitée par deux bases, ayant respectivement pour équations $z = (0, l)$. Nous supposerons

que les actions superficielles qui s'exercent sur la surface latérale de la tige se réduisent à une pression normale et uniforme dont la valeur, comptée positivement vers l'intérieur de la tige, sera désignée par P. D'après cela, nous devrons avoir, en tous les points de la surface latérale,

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} N_1 \alpha + T_3 \beta = - P \alpha, \\ T_3 \alpha + N_2 \beta = - P \beta, \\ T_2 \alpha + T_1 \beta = 0. \end{array} \right.$$

Nous nous limiterons au cas où la tige est homogène, dans tout plan perpendiculaire à ses génératrices, et où chaque section droite constitue un plan de symétrie de contexture.

Considérons la troisième équation indéfinie du mouvement

$$\frac{\partial T_2}{\partial x} + \frac{\partial T_1}{\partial y} + \frac{\partial N_3}{\partial z} + \rho\left(\mathfrak{Z} - \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}\right) = 0,$$

$\mathfrak{Z}$ désignant la composante, suivant Oz, de la force extérieure par unité de masse; si l'on multiplie les deux membres par l'élément d'aire $d\sigma$ de la section droite et qu'on intègre dans toute l'étendue de cette section, l'intégrale double $\int \left(\frac{\partial T_2}{\partial x} + \frac{\partial T_1}{\partial y}\right) d\sigma$ se transforme en une intégrale curviligne, étendue au contour de la section, et qui est nulle d'après la troisième équation (1), de sorte qu'il reste

$$\frac{\partial}{\partial z} \int N_3 \, d\sigma + \rho \int \left(\mathfrak{Z} - \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}\right) d\sigma = 0.$$

Cette équation s'écrit plus simplement

$$(2) \qquad \frac{\partial n_3}{\partial z} + \rho\left(Z - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right) = 0,$$

n_3, Z et w désignant, respectivement, les valeurs moyennes de N_3, $\mathfrak{Z}$ et W, dans toute l'étendue d'une section droite quelconque.

Négligeons les variations des pressions N_1, N_2, T_3 en fonction de x et de y; dans ces conditions, les deux premières équations (1) exigent que l'on ait

$$N_1 + P = 0, \qquad N_2 + P = 0, \qquad T_3 = 0,$$

équations qui s'écrivent plus explicitement, d'après l'hypothèse faite

sur la contexture de la tige et ce qui a été dit antérieurement [Chap. I, § IV, équat. (17)],

$$(3)\quad \begin{cases} A_{11}D_1 + A_{12}D_2 + A_{13}D_3 + A_{16}G_3 + A_{17}\vartheta + P = 0, \\ A_{21}D_1 + A_{22}D_2 + A_{23}D_3 + A_{26}G_3 + A_{27}\vartheta + P = 0, \\ A_{61}D_1 + A_{62}D_2 + A_{63}D_3 + A_{66}G_3 + A_{67}\vartheta \qquad = 0, \end{cases}$$

ϑ désignant la température. D'après ce qu'on a vu au sujet de la stabilité de l'état naturel (Chap. I, § I), ces équations sont résolubles par rapport à D_1, D_2, G_3 et permettent d'exprimer ces déformations en fonctions linéaires et homogènes de D_3, ϑ et P. Si l'on tient compte de ces valeurs dans l'expression de N_3, qui est

$$N_3 = A_{31}D_1 + A_{32}D_2 + A_{33}D_3 + A_{36}G_3 + A_{37}\vartheta.$$

on obtiendra

$$(4)\qquad N_3 = A'_{33}D_3 + A'_{37}\vartheta + aP,$$

A'_{33}, A'_{37} et a étant trois fonctions des coefficients d'élasticité, dépendant de z seulement. D'après cela, l'équation (2) devient

$$(5)\qquad \frac{\partial}{\partial z}\left(A'_{33}\frac{\partial w}{\partial z} + A'_{37}\theta + aP\right) + \rho\left(Z - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right) = 0,$$

θ désignant la valeur moyenne de ϑ. C'est l'équation indéfinie du mouvement longitudinal.

Aux extrémités de la tige où $\gamma = \mp 1$, on doit avoir

$$N_3 = \mp P_z \qquad \text{pour} \qquad z = (0,\ l);$$

de sorte que, si l'on appelle p_z la valeur moyenne de P_z sur chaque base, il viendra, d'après l'égalité (4),

$$(6)\qquad A'_{33}\frac{\partial w}{\partial z} + A'_{37}\theta + aP = \mp p_z \qquad \text{pour} \qquad z = (0,\ l),$$

le signe $-$ étant pris pour la base inférieure et le signe $+$ pour la base supérieure.

Voyons ce que deviennent les équations (5) et (6) dans le cas d'une tige homogène et isotrope. Les pressions N_1, N_2 et N_3 étant indépendantes de G_3, la troisième équation (3) n'est pas à considérer et l'on a

simplement [Chap. I, § IV, équat. (19)]

$$\lambda\Theta + 2\mu D_1 - \nu\mathfrak{S} + P = 0,$$
$$\lambda\Theta + 2\mu D_2 - \nu\mathfrak{S} + P = 0,$$

avec

$$N_3 = \lambda\Theta + 2\mu D_3 - \nu\mathfrak{S}.$$

On en déduit aisément

$$N_3 = \mu\frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} D_3 - \frac{\mu\nu}{\lambda + \mu}\mathfrak{S} - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} P.$$

On obtient ainsi, pour l'équation indéfinie,

$$(7) \qquad \mu\frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{\mu\nu}{\lambda + \mu}\frac{\partial\vartheta}{\partial z} + \rho\left(Z - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right) = 0,$$

et, pour les équations aux limites,

$$(8) \quad \mu\frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\mu\nu}{\lambda + \mu}\vartheta - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} P = \mp p_z \qquad \text{pour} \qquad z = (0, l).$$

Si c'est la même pression normale et uniforme P, qui s'exerce sur la surface latérale et sur les bases, on aura $p_z = (P, -P)$ pour $z = (0, l)$, de sorte que les deux conditions (8) se confondent en une seule

$$(9) \qquad (3\lambda + 2\mu)\frac{\partial w}{\partial z} - \nu\vartheta + P = 0 \qquad \text{pour} \qquad z = (0, l).$$

II. — Équations de la température.

Considérons un tronçon de la tige, limité par deux sections droites quelconques. Pendant une modification élémentaire, ce tronçon dégage une quantité de chaleur dQ qui, d'après l'équation (14) (Chap. I, § III), a pour expression

$$dQ = dt\int\left[\frac{T}{E}\left(A_{17}\frac{\partial D_1}{\partial t} + A_{27}\frac{\partial D_2}{\partial t} + A_{37}\frac{\partial D_3}{\partial t} + A_{67}\frac{\partial G_3}{\partial t}\right) - C\frac{\partial\mathfrak{S}}{\partial t}\right] d\varpi.$$

Substituons-y les valeurs de D_1, D_2, G_3 exprimées, comme on l'a vu, en fonctions linéaires de D_3, $\mathfrak{S}$ et P; nous pourrons écrire

$$dQ = dt\int\left(\frac{T}{E}A''_{37}\frac{\partial D_3}{\partial t} - C'\frac{\partial\mathfrak{S}}{\partial t}\right) d\varpi.$$

et si nous intégrons, d'abord, dans toute l'étendue d'une section droite, dont l'aire est σ, nous aurons, en négligeant $\mathfrak{S}$ vis-à-vis de T_0,

$$(10) \qquad dQ = \sigma\, dt \int \left(\frac{T_0}{E} A''_{37} \frac{\partial^2 w}{\partial z\, \partial t} - C' \frac{\partial \theta}{\partial t} \right) dz,$$

l'intégrale s'étendant à toute la hauteur du tronçon. Nous avons, d'autre part [Chap. I, § III, équat. (15)],

$$(11) \qquad dQ = dt \left(- \int F_n\, d\Sigma + \int \chi\, d\varpi \right),$$

F_n désignant le flux de chaleur relatif à la normale extérieure du tronçon, et χ le débit de la source calorifique par unité de volume. La première intégrale se compose de deux parties, qui correspondent, l'une aux bases du tronçon, l'autre à sa surface latérale, de sorte qu'on a

$$(12) \qquad \int F_n\, d\Sigma = \int \gamma F_z\, d\sigma + \int\int (\alpha F_x + \beta F_y)\, ds\, dz.$$

ds désignant un élément du contour. Par suite de la symétrie de contexture, par rapport à chaque section droite de la tige, on a

$$F_z = K \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial z},$$

et, si l'on désigne par les indices 1 et 2 des quantités se rapportant, respectivement, aux bases inférieure et supérieure du tronçon, il viendra

$$\int \gamma F_z\, d\sigma = \sigma \left(K \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)_2 - \sigma \left(K \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)_1 = \sigma \int \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) dz.$$

D'autre part, si nous supposons la température extérieure égale à 0°, on aura, sur la surface latérale,

$$\alpha F_x + \beta F_y = - k \mathfrak{S},$$

k désignant le coefficient de conductibilité extérieure, que nous supposerons ne dépendre que de z. Nous aurons ainsi, pour la dernière intégrale de l'égalité (12),

$$\int\int (\alpha F_x + \beta F_y)\, ds\, dz = - \int k\, dz \int \mathfrak{S}\, ds = - s \int k\, \theta\, dz,$$

car on peut admettre que la température moyenne, tout le long du contour s, diffère peu de la température moyenne, aux divers points de la section droite correspondante. Enfin, nous pouvons écrire

$$\int \chi\, d\varpi = \sigma \int (-\mathrm{S} + \mathrm{L}\theta)\, dz,$$

S désignant le débit moyen des sources de chaleur dans une section droite, et L le coefficient de diathermanéité qui ne dépend que de z. D'après cela, l'égalité (11) devient

$$d\mathrm{Q} = \sigma\, dt \int \left[-\frac{\partial}{\partial z}\left(\mathrm{K}\frac{\partial \theta}{\partial z}\right) - \mathrm{S} + \left(\mathrm{L} + \frac{s}{\sigma} k\right)\theta \right] dz.$$

et, par comparaison avec l'égalité (10), nous conduit immédiatement à l'équation indéfinie de la température moyenne

$$(13)\qquad \mathrm{C}'\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\mathrm{K}\frac{\partial \theta}{\partial z}\right) + \mathrm{S} - \mathfrak{L}\theta + \frac{\mathrm{T}_0}{\mathrm{E}}\mathrm{A}''_{37}\frac{\partial^2 w}{\partial z\, \partial t},$$

où nous avons posé

$$(14)\qquad \mathfrak{L} = \mathrm{L} + \frac{s}{\sigma} k.$$

Nous devons joindre à l'équation (13) les conditions aux bases

$$(15)\qquad \mathrm{K}\frac{\partial \theta}{\partial z} \mp k\theta = 0 \qquad \text{pour} \qquad z = (0, l).$$

Passons au cas particulier d'une tige homogène et isotrope; on trouve facilement, pour les coefficients C′ et A''_{37},

$$\mathrm{C}' = \mathrm{C}\left[1 + \frac{\mathrm{T}_0 \nu^2}{\mathrm{CE}(\lambda + \mu)}\right], \qquad \mathrm{A}''_{37} = -\frac{\mu}{\lambda + \mu}\nu.$$

La deuxième quantité, entre crochets, est du même ordre que la quantité $\frac{\mathrm{T}_0 \nu^2}{\mathrm{CE}(\lambda + 2\mu)}$, qui est, en général, très petite vis-à-vis de l'unité (Chap. I, § V). Nous pouvons donc, sans erreur sensible, réduire C′ à C, et, comme K est constant, nous aurons

$$(16)\qquad \frac{\partial \theta}{\partial t} = \mathrm{K}\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \mathrm{S} - \mathfrak{L}\theta - \frac{\mu}{\lambda + \mu}\frac{\mathrm{T}_0}{\mathrm{E}}\nu\frac{\partial^2 w}{\partial z\, \partial t}.$$

III. — Mouvement longitudinal et vitesse du son.

En l'absence de toute force extérieure et en posant

(17) $$a^2 = \frac{\mu}{\rho}\,\frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} = \frac{\mathcal{E}}{\rho},$$

l'équation (7) du mouvement longitudinal s'écrit

(18) $$a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\mu}{\lambda + \mu}\,\frac{\nu}{\rho}\,\frac{\partial \theta}{\partial z} = 0.$$

Si l'on substitue la valeur de $\frac{\partial \theta}{\partial z}$ donnée par cette équation, dans l'équation (16) différentiée par rapport à z, et si l'on pose

$$b^2 = a^2 + \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu}\right)^2 \frac{T_0 \nu^2}{CE\rho},$$

on reconnaîtra que la fonction w doit vérifier l'équation du quatrième ordre

$$C \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - b^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) w - K \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) w$$
$$+ \mathcal{L}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) w + \frac{\mu}{\lambda + \mu}\,\frac{\nu}{\rho}\,\frac{\partial S}{\partial z} = 0,$$

qui est de même forme que celles précédemment obtenues pour les corps à trois dimensions et pour les plaques. Nous pouvons également l'intégrer d'une manière approchée : on peut écrire, en effet,

(19) $$b^2 = a^2 \left[1 + \frac{T_0 \nu^2}{CE(\lambda + 2\mu)}\,\frac{\mu}{\lambda + \mu}\,\frac{\lambda + 2\mu}{3\lambda + 2\mu}\right],$$

et, comme nous avons reconnu que la quantité $\frac{T_0 \nu^2}{CE(\lambda + 2\mu)}$ était, généralement, négligeable vis-à-vis de l'unité, *a fortiori* en est-il de même de la deuxième quantité entre crochets.

D'autre part, si nous considérons les corps, pour lesquels on peut admettre que le phénomène de propagation des ondes longitudinales soit adiabatique, nous pourrons écrire, d'après l'égalité (16),

$$\theta = -\frac{\mu}{\lambda + \mu}\,\frac{T_0 \nu}{CE}\,\frac{\partial w}{\partial z},$$

de sorte que l'équation (18) deviendra

$$b^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0.$$

Cette équation exprime qu'un ébranlement longitudinal, qui se propageait avec la vitesse $V = a$, pour $\theta = 0$, se propage maintenant avec la vitesse $V' = b$, et l'on a, d'après l'égalité (19),

$$(20) \qquad V' = V \sqrt{1 + \frac{T_0 \nu^2}{CE(\lambda + 2\mu)} \frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{\lambda + 2\mu}{3\lambda + 2\mu}}.$$

Cette formule nous fait connaître la vitesse du son dans une tige, en deuxième approximation. Elle nous montre que l'accroissement relatif de vitesse, qui résulte de l'effet de la température serait, dans l'hypothèse $\lambda = \mu$, égal aux trois cinquièmes de ce qu'il est pour une une plaque [Chap. II, § IV, équat. (24)] et égal aux trois dixièmes de ce qu'il est pour un milieu à trois dimensions [Chap. I, § V, équat. (30)].

CHAPITRE IV.

APPLICATION A UN CAS PARTICULIER.

I. — Mouvement longitudinal d'une tige qui se refroidit.

Comme application des théories qui viennent d'être exposées, nous allons étudier le mouvement longitudinal d'une tige homogène et isotrope qui se refroidit, ainsi que les variations de température provoquées par le mouvement lui-même. Nous supposerons que la tige ne renferme aucune source intérieure de chaleur et nous admettrons, qu'à ses extrémités, le refroidissement se fait par contact. Cette dernière hypothèse aura l'avantage d'apporter, dans nos calculs, de notables simplifications et de faciliter les applications numériques.

D'après la méthode approchée d'intégration, exposée pour les corps isotropes (Chap. I, § V), et que nous avons reconnu être, *a fortiori*, applicable au cas d'une tige, nous devons commencer par établir la loi

du refroidissement de la tige, tout comme si celle-ci était un solide invariable. Si nous représentons par $F(z)$ la température initiale de la tige, et que nous posions

$$(1) \qquad b^2 = \frac{K}{C}, \qquad \mathfrak{L}_1 = \frac{\mathfrak{L}}{C},$$

les équations du problème seront donc :

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\theta}{\partial t} = b^2 \dfrac{\partial^2\theta}{\partial z^2} - \mathfrak{L}_1 \theta, \\ \theta = 0 \quad \text{pour} \quad z = (0, l), \\ \theta = F(z) \quad \text{pour} \quad t = 0. \end{cases}$$

Nous reconnaissons les équations du refroidissement par contact d'un mur diathermane d'épaisseur l. On sait que leur intégrale s'obtient en superposant une infinité de solutions simples vérifiant, séparément, les équations indéfinie et aux limites, chacune de ces solutions étant affectée d'un coefficient arbitraire qu'on détermine, ensuite, par la condition initiale. Si nous posons

$$(3) \qquad \alpha_i = \frac{i\pi}{l}, \qquad \beta_i = \frac{1}{a}(\mathfrak{L}_1 + b^2\alpha_i^2), \qquad A_i = \frac{2}{l}\int_0^l F(x)\sin\alpha_i x\,dx,$$

a désignant toujours la quantité $\sqrt{\dfrac{\mathfrak{C}}{\rho}}$, la loi du refroidissement pourra s'écrire

$$(4) \qquad \theta = \sum_1^\infty A_i\, e^{-a\beta_i t} \sin\alpha_i z.$$

On vérifie que la solution ainsi définie satisfait bien à toutes les conditions du problème ; en particulier, c'est une série uniformément convergente de t et de z pour $t \geqq 0$ [1].

L'expression de θ étant ainsi obtenue, nous allons déterminer le mouvement longitudinal de la tige d'après les équations (7) et (8) du chapitre précédent et les conditions initiales. En supposant que la tige n'est soumise à aucune force extérieure, et en tenant compte de ce que

---

[1] H. Poincaré, *Théorie analytique de la propagation de la chaleur*, Chap. V, n° 48.

$\theta = 0$ aux deux extrémités, nous aurons comme équations à intégrer :

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} & a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\mu}{\lambda+\mu}\,\frac{\nu}{\rho}\,\frac{\partial\theta}{\partial z}, \\ & \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad \text{pour} \qquad z = (0, l), \\ & w = f(z), \qquad \frac{\partial w}{\partial t} = g(z) \qquad \text{pour} \qquad t = 0. \end{aligned}\right.$$

Les fonctions $f(z)$ et $g(z)$ désignent, respectivement, le déplacement et la vitesse de chaque point de la tige à l'instant initial.

Cherchons, tout d'abord, une solution particulière W de l'équation indéfinie, vérifiant en même temps l'équation aux limites. Cette solution particulière est facile à obtenir par identification et par l'emploi de coefficients indéterminés; on reconnaît ainsi, en tenant compte des formules

$$a^2 = \frac{\mu}{\rho}\,\frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}, \qquad D = \frac{\nu}{3\lambda+2\mu},$$

que la fonction

$$(6)\qquad W = -D\sum_1^\infty \frac{\alpha_i}{\alpha_i^2+\beta_i^2}\,A_i\, e^{-a\beta_i t}\cos\alpha_i z$$

satisfait aux conditions cherchées. Il reste, toutefois, à faire voir que cette série définit bien une fonction continue de z et de t, dérivable terme à terme et deux fois de suite par rapport à l'une et l'autre de ces variables.

Pour démontrer la continuité de la fonction W, il suffit d'établir la convergence uniforme de la série (6). Or, celle-ci s'obtient en multipliant chaque terme de la série

$$\frac{\partial\theta}{\partial z} = \sum_1^\infty \alpha_i A_i\, e^{-a\beta_i t}\cos\alpha_i z,$$

qui est uniformément convergente, par la quantité $\frac{1}{\alpha_i^2+\beta_i^2}$, qui est positive et décroissante. D'après un lemme dû à Abel, il en résulte que la série (6) est aussi uniformément convergente.

On démontrerait, de même, la convergence uniforme des dérivées

premières et secondes de W, en comparant celles-ci à θ ou aux dérivées de cette fonction.

Cela posé, revenons aux équations (5) et soit

$$w = W + w_1, \tag{7}$$

w_1 étant la nouvelle fonction inconnue ; les équations (5) deviennent

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &a^2\frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} = 0,\\ &\frac{\partial w_1}{\partial z} = 0 \qquad \text{pour} \qquad z = (0.\, l),\\ &w_1 = f(z) - W, \qquad \frac{\partial w_1}{\partial t} = g(z) - \frac{\partial W}{\partial t} \qquad \text{pour} \qquad t = 0. \end{aligned}\right.$$

La première de ces équations est celle des cordes vibrantes, dont l'intégrale générale est

$$w_1 = H(z + at) + G(z - at),$$

H et G étant deux fonctions arbitraires. La première condition aux limites ($z = 0$) nous donne

$$H'(at) + G'(-at) = 0.$$

d'où l'on tire en intégrant

$$H(at) - G(-at) + C = 0,$$

C étant une constante arbitraire. Nous en déduisons aisément

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} w_1 &= H(at + z) + H(at - z) + C.\\ \frac{\partial w_1}{\partial t} &= a[H'(at + z) + H'(at - z)]. \end{aligned}\right.$$

D'autre part, la deuxième condition aux limites ($z = l$) nous donne

$$H'(l + at) + G'(l - at) = 0,$$

et, par combinaison avec la première ($z = 0$),

$$H'(at + l) = H'(at - l).$$

Cette égalité exprime que la fonction $H'(u)$ est une fonction périodique de période $2l$. Nous l'écrirons donc sous forme de série trigono-

métrique

$$\text{(10)} \qquad H'(u) = c_0 + \sum_1^\infty (c_i \cos\alpha_i u + c'_i \sin\alpha_i u),$$

et nous chercherons à déterminer les coefficients c_0, c_i, c'_i de façon que les conditions initiales, les seules qu'il reste à satisfaire, soient vérifiées.

Sauf à démontrer, ultérieurement, que les valeurs que nous obtiendrons, pour ces coefficients, assureront la convergence uniforme de la série (10), nous en déduisons en intégrant

$$H(u) = C_1 + c_0 u + \sum_1^\infty \frac{1}{\alpha_i}(c_i \sin\alpha_i u - c'_i \cos\alpha_i u).$$

et, si nous posons

$$\mathfrak{C} = 2C_1 + C,$$

il est facile de voir que les égalités (9) nous donnent

$$\text{(11)} \qquad \begin{cases} w_1 = \mathfrak{C} + 2c_0 at + 2\displaystyle\sum_1^\infty \frac{1}{\alpha_i}(c_i \sin a\alpha_i t - c'_i \cos a\alpha_i t)\cos\alpha_i z, \\ \dfrac{\partial w_1}{\partial t} = 2c_0 a + 2a \displaystyle\sum_1^\infty (c_i \cos a\alpha_i t + c'_i \sin a\alpha_i t)\cos\alpha_i z. \end{cases}$$

Si, maintenant, nous tenons compte des conditions initiales, nous devrons avoir

$$\text{(12)} \qquad \begin{cases} f(z) - W_0 = \mathfrak{C} - 2\displaystyle\sum_1^\infty \frac{c'_i}{\alpha_i}\cos\alpha_i z, \\ g(z) - \left(\dfrac{\partial W}{\partial t}\right)_0 = 2c_0 a + 2a\displaystyle\sum_1^\infty c_i \cos\alpha_i z. \end{cases}$$

Ces deux égalités exigent que les fonctions $f(z)$ et $g(z)$ soient paires, ce que nous pouvons toujours supposer, puisqu'elles ne sont définies qu'entre o et l. Dans ces conditions, les seconds membres, où les coefficients sont remplacés par leurs valeurs obtenues par la méthode d'élimination de Fourier, sont des séries uniformément convergentes.

Ces coefficients sont définis par les relations

$$\int_0^l [f(x) - W_0] \quad dx = \mathfrak{C} l, \qquad \int_0^l [f(x) - W_0] \quad \cos\alpha_i x\, dx = -\frac{l}{\alpha_i} c'_i,$$

$$\int_0^l \left[g(x) - \left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)_0\right] dx = 2 c_0 a l. \qquad \int_0^l \left[g(x) - \left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)_0\right] \cos\alpha_i x\, dx = a l c_i.$$

La série $\Sigma c_i \cos\alpha_i u$ étant uniformément convergente, d'après la deuxième égalité (12), pour démontrer la convergence uniforme de la série (10), il nous suffit d'établir la proposition pour la série $\Sigma c'_i \sin\alpha_i u$. Or, si nous différentions les deux membres de la première égalité (12), nous obtiendrons

$$\frac{d}{dz}[f(z) - W_0] = 2\sum_1^\infty c'_i \sin\alpha_i z, \tag{13}$$

si, toutefois, le second membre est uniformément convergent. Nous allons montrer qu'il en est bien ainsi, d'après la valeur même de c'_i. En intégrant par parties, nous avons

$$\int_0^l [f(x) - W_0] \cos\alpha_i x\, dx = -\frac{1}{\alpha_i}\int_0^l \frac{d}{dx}[f(x) - W_0] \sin\alpha_i x\, dx,$$

ce qui nous permet d'écrire l'expression donnée de c'_i

$$c'_i = \frac{1}{l}\int_0^l \frac{d}{dx}[f(x) - W_0] \sin\alpha_i x\, dx.$$

L'égalité (13) devient ainsi

$$\frac{d}{dz}[f(z) - W_0] = \frac{2}{l}\sum_1^\infty \sin\alpha_i z \int_0^l \frac{d}{dx}[f(x) - W_0] \sin\alpha_i x\, dx.$$

La fonction $f(z) - W_0$ étant une fonction paire, sa dérivée est impaire ; donc le second membre de l'égalité précédente représente bien le développement de cette dérivée en série de Fourier uniformément convergente et la proposition est démontrée.

La convergence uniforme des fonctions W_0 et $\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)_0$ nous permet d'achever le calcul des coefficients, en intégrant terme à terme. On

obtient ainsi

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{l}\int_0^l f(x)\,dx, \qquad \frac{c'_i}{\alpha_i} = -\frac{1}{l}\int_0^l f(x)\cos\alpha_i x\,dx - \frac{D}{2}A_i\frac{\alpha_i}{\alpha_i^2+\beta_i^2},$$

$$2c_0 a = \frac{1}{l}\int_0^l g(x)\,dx, \qquad \frac{c_i}{\alpha_i} = \frac{1}{a\alpha_i l}\int_0^l g(x)\cos\alpha_i x\,dx - \frac{D}{2}A_i\frac{\beta_i}{\alpha_i^2+\beta_i^2}.$$

D'après cela, la première des égalités (11) devient

$$(14)\quad w_1 = \frac{1}{l}\int_0^l [f(x) + t\,g(x)]\,dx$$

$$+ \frac{2}{l}\sum_1^\infty \cos\alpha_i z\int_0^l \left[\frac{g(x)}{a\alpha_i}\sin a\alpha_i t + f(x)\cos a\alpha_i t\right]\cos\alpha_i x\,dx$$

$$- D\sum_1^\infty \frac{A_i}{\alpha_i^2+\beta_i^2}(\beta_i\sin a\alpha_i t - \alpha_i\cos a\alpha_i t)\cos\alpha_i z.$$

Le déplacement cherché w est ainsi complètement déterminé par les équations (6), (7) et (14).

Afin de réduire les formules au strict nécessaire, supposons que la section de la tige, qui contient le centre de gravité, n'éprouve pas de déplacement longitudinal. Dans ces conditions, on devra avoir $w = 0$, pour $z = \frac{l}{2}$ et à toute époque ; on voit immédiatement qu'il faut et qu'il suffit pour cela que les intégrales $\int_0^l f(x)\,dx$ et $\int_0^l g(x)\,dx$ soient nulles. Nous aurons alors simplement

$$(15)\quad w = \frac{2}{l}\sum_1^\infty \cos\alpha_i z\int_0^l \left[\frac{g(x)}{a\alpha_i}\sin a\alpha_i t + f(x)\cos a\alpha_i t\right]\cos\alpha_i x\,dx$$

$$- D\sum_1^\infty \frac{\alpha_i}{\alpha_i^2+\beta_i^2}A_i\left(\frac{\beta_i}{\alpha_i}\sin a\alpha_i t - \cos a\alpha_i t + e^{-a\beta_i t}\right)\cos\alpha_i z.$$

Supposons, tout d'abord, que la température initiale de la tige soit nulle $[F(z) = 0]$: la troisième des formules (3) nous montre qu'on aura $A_i = 0$, et par suite $\theta = 0$ à toute époque, d'après l'égalité (4). Dans ces conditions, la tige va prendre un certain mouvement que nous appellerons *mouvement d'origine purement mécanique*, et, si nous désignons par $\mathfrak{w}$ le déplacement longitudinal correspondant, nous

aurons, d'après l'égalité (15) et en supposant, pour simplifier, $g(z) = 0$,

$$(16)\qquad \varpi = \frac{2}{l}\sum_{1}^{\infty} \cos a\alpha_i t \cos\alpha_i z \int_0^l f(x)\cos\alpha_i x\, dx.$$

Considérons, maintenant, le cas où la fonction $F(z)$ n'est pas nulle, et imaginons le nouvel état initial défini de la façon suivante : pour $t < 0$ et depuis une époque très reculée, la température de la tige a été maintenue égale à $F(z)$, de sorte que celle-ci a pris un état d'équilibre bien défini, correspondant à cette température stationnaire $F(z)$ et caractérisé, en chaque point, par la valeur du déplacement ϖ que nous désignerons par $D h(z)$. A l'instant initial, nous supposons qu'on abandonne la tige à elle-même, sans vitesse et à partir de cet état, en la laissant se refroidir naturellement ; elle va prendre un certain mouvement que nous appellerons *mouvement d'origine purement calorifique,* et, si nous désignons par ϖ_1 le déplacement longitudinal correspondant, nous aurons, d'après ce qui précède,

$$(17)\qquad \varpi_1 = D\, h(z), \qquad \frac{\partial \varpi_1}{\partial t} = 0 \qquad \text{pour} \qquad t = 0.$$

Commençons par calculer l'expression de la fonction $h(z)$. Nous avons pour cela les deux premières équations (5), où l'on a effacé, dans l'équation indéfinie, le terme $\frac{\partial^2 \varpi}{\partial t^2}\cdot$ D'après ces équations, on doit avoir

$$\frac{d^2 h}{dz^2} = \frac{dF}{dz},$$

$$\frac{dh}{dz} = 0 \qquad \text{pour} \qquad z = (0, l).$$

La première de ces équations donne, en intégrant et en tenant compte de la condition aux extrémités, où la fonction F est aussi nulle,

$$\frac{dh}{dz} = F(z).$$

Une deuxième intégration donne, en remarquant que la section, qui contient le centre de gravité, est supposée ne pas éprouver de déplacement longitudinal,

$$(18)\qquad h(z) = \int_{\frac{l}{2}}^{z} F(x)\, dx.$$

Cela posé, tenons compte des conditions initiales (17) dans l'équation (15), groupons les termes périodiques par rapport au temps, et nous obtiendrons, en définitive,

$$(19) \qquad \Psi_1 = -D\sum_1^\infty \left[\frac{\alpha_i}{\alpha_i^2+\beta_i^2} A_i e^{-a\beta_i t} + M_i \sin(a\alpha_i t - \gamma_i)\right]\cos\alpha_i z.$$

équation où nous avons posé

$$B_i = \frac{2}{l}\int_0^l h(x)\cos\alpha_i x\,dx,$$

$$M_i = \sqrt{\frac{A_i(A_i+2B_i\alpha_i)}{\alpha_i^2+\beta_i^2}+B_i^2}, \qquad \operatorname{tang}\gamma_i = \frac{A_i\alpha_i + B_i(\alpha_i^2+\beta_i^2)}{A_i\beta_i}.$$

L'égalité (19) nous montre que le mouvement d'origine purement calorifique est la superposition d'un mouvement progressif de contraction, qui s'évanouit asymptotiquement comme l'échauffement lui-même, et d'un mouvement vibratoire qui ne diffère de celui d'origine purement mécanique, fourni par l'égalité (16), que par l'amplitude et par la phase. Il est donc intéressant de comparer les amplitudes de ces deux mouvements, et de reconnaître si le mouvement vibratoire calorifique peut, dans certains cas, avoir assez d'intensité pour constituer un son perceptible. Nous allons choisir, à cet effet, un cas particulier simple, où le calcul effectif des coefficients des séries puisse se faire aisément et qui soit, en même temps, facilement réalisable.

II. — Comparaison du mouvement vibratoire d'origine purement calorifique à celui d'origine purement mécanique.

Considérons le mouvement d'origine purement mécanique, dont la loi est donnée par l'équation (16). Nous allons étudier le cas particulier, où la tige est mise en mouvement de la façon suivante : on exerce sur ses deux bases deux tractions égales et opposées, dont la valeur par unité de surface est égale à P; la tige va, dans ces conditions, prendre un certain état d'équilibre, défini par la valeur $f(z)$ du déplacement longitudinal en chaque point. Puis, à l'instant initial, on supprime brusquement les deux tractions P, en abandonnant la tige à elle-même sans vitesse.

Calculons, tout d'abord, $f(z)$. Les équations (7) et (8) du Chapitre III nous donnent ici, en introduisant le module d'Young $\mathcal{E}$,

$$(20)\qquad \frac{d^2 f}{dz^2} = 0,$$

$$\mathcal{E}\frac{df}{dz} = \mp p_z \qquad \text{pour} \qquad z = (0, l).$$

Mais nous avons $p_z = -\text{P}$ pour $z = 0$, et $p_z = \text{P}$ pour $z = l$, ce qui nous donne simplement

$$(21)\qquad \frac{df}{dz} = \frac{\text{P}}{\mathcal{E}} \qquad \text{pour} \qquad z = (0, l).$$

En intégrant une première fois l'équation (20), nous obtiendrons, en tenant compte de la condition (21),

$$\frac{df}{dz} = \frac{\text{P}}{\mathcal{E}},$$

et une nouvelle intégration nous donnera, en remarquant que le déplacement au point $z = \frac{l}{2}$ est nul,

$$f(z) = \frac{\text{P}}{\mathcal{E}}\left(z - \frac{l}{2}\right).$$

Cela posé, nous trouvons, par un calcul facile,

$$\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\alpha_i x\,dx = -2l\frac{\text{P}}{\mathcal{E}}\,\frac{1-\cos i\pi}{i^2\pi^2},$$

de sorte que l'équation (16) nous donne, pour le mouvement cherché,

$$(22)\qquad \mathfrak{W} = -2l\frac{\text{P}}{\mathcal{E}}\sum_1^\infty \frac{1-\cos i\pi}{i^2\pi^2}\cos a\alpha_i t\cos\alpha_i z.$$

Considérons, maintenant, la tige animée d'un mouvement dont l'origine soit purement calorifique. Supposons la température initiale $\text{F}(z)$ constante et égale à θ_0 ; la formule (18) nous donne

$$h(z) = \theta_0\left(z - \frac{l}{2}\right),$$

et nous en déduisons, pour les coefficients A_i, B_i et M_i,

$$A_i = 2\theta_0 \frac{1-\cos i\pi}{i\pi}, \quad B_i = -2l\theta_0 \frac{1-\cos i\pi}{i^2\pi^2}, \quad M_i = 2l\theta_0 \frac{\beta_i}{\sqrt{\alpha_i^2+\beta_i^2}} \frac{1-\cos i\pi}{i^2\pi^2}.$$

L'équation (19) nous donne alors, pour le mouvement calorifique,

$$(23) \quad \mathfrak{P}_1 = -2D\theta_0 \sum_1^\infty \frac{1-\cos i\pi}{i\pi\sqrt{\alpha_i^2+\beta_i^2}} \left[\frac{\alpha_i}{\sqrt{\alpha_i^2+\beta_i^2}} e^{-a\beta_i t} + \frac{\beta_i}{\alpha_i}\sin(a\alpha_i t - \gamma_i)\right]\cos\alpha_i z.$$

Les expressions (22) et (23) nous permettent de former le rapport r_i de l'amplitude de l'harmonique de rang i, dans le mouvement vibratoire calorifique, à l'amplitude de l'harmonique de même rang, dans le mouvement vibratoire d'origine mécanique; nous obtenons

$$(24) \qquad r_i = D\theta_0 \frac{\mathcal{E}}{P} \frac{\beta_i}{\sqrt{\alpha_i^2+\beta_i^2}}.$$

D'après les deux premières égalités (3), nous voyons que le rapport $\frac{\beta_i}{\sqrt{\alpha_i^2+\beta_i^2}}$ tend vers l'unité, quand i augmente indéfiniment. Nous avons donc

$$r_\infty = D\theta_0 \frac{\mathcal{E}}{P}.$$

Faisons le calcul numérique de cette expression dans le cas du cuivre, pour lequel on a (Chap. I, § V)

$$\mathcal{E} = 10\,519 \text{ kg : mm}^2, \qquad \rho = 8,85, \qquad C = 0,842, \qquad D = 17,173.10^{-6}.$$

Prenons pour P la charge de sécurité du cuivre, qui est de 4^{kg} par millimètre carré ; nous aurons

$$\frac{\mathcal{E}}{P} = 2,63.10^3, \qquad r_\infty = 0,0452\,\theta_0.$$

Ceci nous montre que, pour $\theta_0 = 22°,15$, on aurait $r_\infty = 1$. Si donc, la température initiale est supérieure à cette valeur, il arrivera, à partir d'un certain rang, que les harmoniques du mouvement calorifique dépasseront en amplitude ceux du mouvement d'origine mécanique.

Comment varie r_i en fonction de α_i? Il suffit d'étudier la variation de la quantité $\frac{\beta_i}{\sqrt{\alpha_i^2+\beta_i^2}}$, quand on fait varier α_i de o à $+\infty$.

D'après la deuxième égalité (3), on reconnaît que cette quantité part de la valeur 1 et commence par décroître, passe par un minimum égal à $\frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{4b^2\mathfrak{L}_1}}}$ pour $\alpha_i = \frac{\sqrt{\mathfrak{L}_1}}{b}$, puis croît en tendant asymptotiquement vers la valeur 1. Tenons compte des formules (1) et de la formule (14) du Chapitre III

$$\mathfrak{L} = \mathrm{L} + \frac{s}{\sigma}k;$$

si nous supposons, pour simplifier, que la tige soit athermane ($\mathrm{L} = 0$), nous trouverons pour le minimum de $\frac{\beta_i}{\sqrt{\alpha_i^2+\beta_i^2}}$ l'expression $\frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2\mathrm{C}^2\sigma}{4\mathrm{K}ks}}}$, ce qui nous donne, pour le minimum de r_i,

$$(r_i)_{\text{min.}} = \mathrm{D}\,\theta_0\,\frac{\mathfrak{C}}{\mathrm{P}}\,\frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2\mathrm{C}^2\sigma}{4\mathrm{K}ks}}}. \tag{25}$$

Ce minimum a lieu pour $\alpha_i = \sqrt{\frac{sk}{\sigma\mathrm{K}}}$, c'est-à-dire pour une longueur de tige donnée par la formule

$$l = i\pi\sqrt{\frac{\sigma\mathrm{K}}{sk}}. \tag{26}$$

Nous allons faire le calcul numérique de ces expressions dans le cas d'une tige de cuivre de section circulaire. Supposons que la tige soit placée dans un courant d'air atmosphérique à la température de la glace fondante, qui sera notre zéro thermométrique, et imaginons que la vitesse V du courant fluide soit uniforme et dirigée perpendiculairement à l'axe de la tige. M. Boussinesq a montré [1] que, dans ces conditions, le coefficient de conductibilité extérieur k était donné par la

---

[1] J. Boussinesq, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 6e série, t. I, 1905.

formule

$$k = 4\sqrt{\frac{K_1 C_1 V}{\pi^3 \varepsilon}},$$

où K_1 désigne le coefficient de conductibilité interne du fluide, C_1 sa capacité calorifique par unité de volume et ε le rayon de la section de la tige. Dans le système C. G. S., *petite calorie, degré centigrade* et à la température de la glace fondante, on a

$$K_1 = 5.10^{-5}, \qquad C_1 = 3,06.10^{-4}.$$

Si nous prenons $V = 400^{cm}$, ce qui correspond à une brise légère, nous trouverons, pour une tige de 1^{cm} de diamètre ($\varepsilon = 0,5$),

$$k = 2,51.10^{-3}.$$

Ajoutons aux données précédentes, relatives au cuivre, la valeur de son coefficient de conductibilité $K = 0,819$ (C. G. S.), et nous aurons, en prenant encore $\frac{\mathcal{E}}{P} = 2,63,10^3$,

$$a = \sqrt{\frac{\mathcal{E}}{\rho}} = 3,42.10^5, \qquad \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a^2 C^2 \sigma}{4 K k s}}} = 1,554.10^{-7};$$

ce qui nous donne, d'après les formules (25) et (26),

$$(r_i)_{\text{min.}} = 0,702.10^{-8}\theta_0 \qquad \text{pour} \qquad l = i.28,7;$$

de sorte que, si la tige que nous considérons a une longueur de $28^{cm},7$, le minimum aura lieu pour le terme fondamental de la série. Comme nous venons de voir qu'il est extrêmement petit, même si θ_0 atteint quelques centaines de degrés, il s'ensuit que, pour une tige de cette longueur, le mouvement vibratoire calorifique sera absolument imperceptible en comparaison de celui d'origine mécanique.

Puisque, comme nous l'avons vu, le rapport $\frac{\beta_i}{\sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2}}$ prend sa plus forte valeur, qui est 1, quand α_i est nul ou infini, il en résulte, pour un harmonique de rang déterminé, que r_i sera d'autant plus grand que la longueur de la tige sera elle-même, ou plus grande, ou plus petite que la valeur (26), qui correspond au minimum précédemment

calculé. Mais le cas d'une tige très courte n'est pas à considérer, car si l'on cherche, avec les données numériques qui précèdent, l'ordre de grandeur des fortes valeurs de α_i qui rendraient la quantité $\frac{\beta_i}{\sqrt{\alpha_i^2+\beta_i^2}}$ à peu près comparable à l'unité, on trouve pour α_i une valeur telle, qu'en faisant $i=1$, la longueur de la tige devrait être de l'ordre du millième de millimètre.

Prenons donc le cas d'une tige très longue, et choisissons sa longueur de façon que le terme fondamental corresponde à un son qui soit à la limite des sons graves perceptibles, dont la fréquence serait égale à 8, d'après les expériences de Savart. Pour une longueur de 200^{m} ($l=2.10^4$), on trouve une fréquence fondamentale $n_1=\frac{a}{2l}=8{,}55$, et, pour les quantités α_1, β_1, r_1, les valeurs

$$\alpha_1=\frac{\pi}{l}=1{,}57.10^{-4},\qquad \beta_1=\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{C}a}\left(\frac{2k}{\varepsilon\mathrm{K}}+\alpha_1^2\right)=1{,}724.10^{-7},$$

$$r_1=\mathrm{D}\theta_0\frac{\mathcal{E}}{\mathrm{P}}\frac{\beta_1}{\sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2}}=4{,}96.10^{-5}\theta_0.$$

Appelons r'_1 le rapport de l'amplitude fondamentale du mouvement calorifique dans la tige de 200^{m}, à celle du mouvement d'origine mécanique qui se produirait dans une tige de 1^{m} de longueur seulement, étirée initialement dans les mêmes conditions. L'expérience montre que le mouvement, ainsi produit, a assez d'amplitude pour produire un son d'intensité très appréciable. L'amplitude étant, toutes choses égales, proportionnelle à l, nous aurons

$$r'_1=200\,r_1=9{,}92.10^{-3}\theta_0.$$

Le rapport de l'intensité du son d'origine calorifique, dans la tige de 200^{m}, à l'intensité du son d'origine mécanique, dans la tige de 1^{m}, est donc

$$r_1'^2=9{,}83.10^{-5}\theta_0^2.$$

Pour $\theta_0=200°$, on aurait $r_1'^2=3{,}93$, ce qui montre que le son d'origine calorifique aurait bien assez d'intensité pour être entendu.

Ainsi et en résumé, il n'y a que les tiges extrêmement longues et portées à une température initiale élevée, qui puissent, par refroidisse-

ment, donner naissance à un son appréciable ; ce son est d'autant plus grave que la tige est plus longue.

III. — Variations de température résultant du mouvement longitudinal d'une tige.

Supposons, maintenant, que la température initiale de la tige soit nulle. D'après les équations (2), la température reste égale à zéro pendant toute la durée du mouvement, du moins à une première approximation, et le déplacement longitudinal w est donné par l'équation (15)

$$(27) \qquad w = \frac{2}{l}\sum_{1}^{\infty}\cos\alpha_i z\int_0^l\left[\frac{g(x)}{a\alpha_i}\sin a\alpha_i t + f(x)\cos a\alpha_i t\right]\cos\alpha_i x\,dx,$$

où l'on a fait $A_i = 0$.

Proposons-nous de calculer la température de la tige en deuxième approximation ; il nous faut intégrer l'équation (16) (Chap. III, § II), où nous faisons $S = 0$. Cette équation peut s'écrire

$$(28) \qquad \frac{\partial\theta}{\partial t} = b^2\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} - \zeta_1\theta - \frac{\mu}{\lambda+\mu}\frac{T_0}{CE}\nu\frac{\partial^2 w}{\partial z\,\partial t};$$

$\dfrac{\partial^2 w}{\partial z\,\partial t}$ doit y être remplacé par sa valeur, déduite de l'égalité (27). Nous devons avoir, en outre,

$$\theta = 0 \quad \text{pour} \quad z = (0, l) \qquad \text{et} \qquad \theta = 0 \quad \text{pour} \quad t = 0.$$

L'égalité (27) nous donne

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z\,\partial t} = \frac{2}{l}\sum_{1}^{\infty}\alpha_i\sin\alpha_i z\int_0^l[-g(x)\cos a\alpha_i t + a\alpha_i f(x)\sin a\alpha_i t]\cos\alpha_i x\,dx,$$

en admettant, toutefois, la convergence uniforme du second membre. En raisonnant comme nous l'avons fait précédemment, nous reconnaîtrions que l'égalité précédente est légitime.

Si nous posons

$$\theta = e^{-\zeta_1 t}V,$$

V étant la nouvelle fonction inconnue, et

$$M_i = \frac{\mu}{\lambda+\mu}\,\frac{T_0 \nu}{CE}\,\frac{2\alpha_i}{l}\int_0^l g(x)\cos\alpha_i x\,dx,$$

$$N_i = -\frac{\mu}{\lambda+\mu}\,\frac{T_0 \nu}{CE}\,\frac{2a\alpha_i^2}{l}\int_0^l f(x)\cos\alpha_i x\,dx,$$

nous reconnaîtrons, d'après l'équation (28), qu'on doit avoir

$$\text{(29)}\qquad \frac{\partial V}{\partial t} = b^2\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + e^{\mathcal{L}_1 t}\sum_1^\infty (M_i\cos a\alpha_i t + N_i \sin a\alpha_i t)\sin\alpha_i z,$$

et que V satisfait aux mêmes conditions définies et initiale que θ.

Si nous cherchons une solution particulière φ de cette équation, de la forme

$$\text{(30)}\qquad \varphi = e^{\mathcal{L}_1 t}\sum_1^\infty (\mathfrak{M}_i\cos a\alpha_i t + \mathfrak{N}_i \sin a\alpha_i t)\sin\alpha_i z,$$

cette solution satisfait d'elle-même aux conditions aux extrémités. Pour qu'elle satisfasse, en même temps, à l'équation indéfinie (29), on reconnaît aisément, en tenant compte de la deuxième égalité (3), qu'on doit avoir

$$\mathfrak{M}_i = \frac{\beta_i M_i - \alpha_i N_i}{a(\alpha_i^2+\beta_i^2)}, \qquad \mathfrak{N}_i = \frac{\alpha_i M_i + \beta_i N_i}{a(\alpha_i^2+\beta_i^2)},$$

et que, d'après ces valeurs, la convergence uniforme de la fonction φ et des fonctions $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$, obtenues en différentiant terme à terme l'égalité (30), est assurée.

Si nous posons ensuite

$$V = \varphi + v,$$

v étant une nouvelle fonction inconnue, nous devrons avoir

$$\frac{\partial v}{\partial t} = b^2\frac{\partial^2 v}{\partial z^2},$$

$$v = 0 \qquad \text{pour} \qquad z = (0, l),$$

$$v = -\sum_1^\infty \mathfrak{M}_i \sin\alpha_i z \qquad \text{pour} \qquad t = 0.$$

Ce sont les équations du refroidissement de la tige portée à la température initiale $-\sum_1^\infty \mathfrak{M}_i \sin\alpha_i z$. Nous avons donc

$$v = -\sum_1^\infty \mathfrak{M}_i\, e^{-b^2\alpha_i^2 t} \sin\alpha_i z,$$

ce qui nous donne, en définitive, pour la fonction θ

$$(31)\qquad \theta = -\sum_1^\infty \mathfrak{M}_i\, e^{-a\beta_i t} \sin\alpha_i z + \sum_1^\infty (\mathfrak{M}_i \cos a\alpha_i t + \mathfrak{N}_i \sin a\alpha_i t) \sin\alpha_i z.$$

Posons enfin

$$\tan\!g\,\gamma_i = \frac{\beta_i M_i - \alpha_i N_i}{\alpha_i M_i + \beta_i N_i},$$

et l'équation (31) deviendra

$$(32)\qquad \theta = -\sum_1^\infty \mathfrak{M}_i\, e^{-a\beta_i t} \sin\alpha_i z + \frac{1}{a}\sum_1^\infty \sqrt{\frac{M_i^2 + N_i^2}{\alpha_i^2 + \beta_i^2}} \sin(a\alpha_i t + \gamma_i) \sin\alpha_i z.$$

Ce résultat nous montre que la température, calculée en deuxième approximation, comprend deux parties : l'une qui s'évanouit asymptotiquement, l'autre qui est périodique et de même période que le mouvement vibratoire d'origine mécanique qui lui donne naissance. Cherchons la valeur de l'amplitude du terme fondamental de la partie périodique, dans le cas simple déjà considéré, où l'on a

$$f(z) = \frac{P}{\mathcal{E}} z, \qquad g(z) = 0.$$

On a d'abord

$$M_i = 0, \qquad N_i = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{T_0 \nu}{CE} \frac{2a}{l} \frac{P}{\mathcal{E}} (1 - \cos i\pi).$$

ce qui nous donne, pour l'amplitude du terme de rang i, en introduisant le coefficient de dilatation thermique D,

$$(33)\qquad \frac{N_i}{a\sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2}} = 2\frac{T_0}{CE} \frac{D}{\sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2}} \frac{P}{l} (1 - \cos i\pi).$$

Nous avons vu que, dans le cas d'une tige de cuivre de 200^m de lon-

gueur, β_1 était négligeable vis-à-vis de α_1; *a fortiori* en est-il de même de β_i vis-à-vis de α_i, surtout si la tige est plus courte. Dans ces conditions, l'expression (33) devient indépendante de la longueur de la tige, et pour $i = 1$, on a

$$\frac{N_1}{a\alpha_1} = \frac{4}{\pi}\frac{T_0}{CE}DP.$$

Faisons le calcul numérique de cette expression pour le cuivre, en prenant toujours $P = 4^{kg}$ et $T_0 = 273$; nous obtenons

$$\frac{N_1}{a\alpha_1} = 0,67.10^{-3} \text{ degré centigrade.}$$

Ce résultat nous montre combien sont petites les variations de température, engendrées par le mouvement d'un solide élastique; ces variations sont inobservables, non seulement parce qu'elles sont très faibles, mais aussi parce que leurs périodes sont extrêmement courtes.

IV. — Refroidissement d'une tige dont on suppose les équations de l'équilibre constamment vérifiées.

Nous venons de voir que le mouvement vibratoire d'origine mécanique n'a pas d'influence appréciable sur la température de la tige. Il en sera donc, *a fortiori*, de même du mouvement vibratoire d'origine calorifique, qui accompagne le refroidissement, et dont l'amplitude est incomparablement plus faible que celle du mouvement vibratoire mécanique, dans le cas de tiges de longueur modérée. Nous n'avons donc plus qu'à nous occuper de l'influence, sur le refroidissement, du mouvement de contraction qui accompagne celui-ci. Mais, étant donnée la lenteur de ce mouvement, nous pourrons, sans erreur sensible, supposer que la tige est, à chaque instant, en équilibre mécanique et poser, par conséquent,

$$\frac{\partial w}{\partial z} = D\theta.$$

Si donc nous posons

$$C_1 = C + \frac{\mu}{\lambda + \mu}\frac{T_0 \nu}{E}D,$$

il est facile de voir que l'équation indéfinie de la température deviendra

$$C_1 \frac{\partial \theta}{\partial t} = K \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + S - \mathfrak{L}\theta.$$

Ceci nous montre que l'effet de la contraction est d'accroître, fictivement, la capacité calorifique de la tige, ce qui entraîne une diminution de la vitesse de refroidissement. L'accroissement relatif de la capacité calorifique est

$$\frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{T_0 \nu}{CE} D = \frac{\mathcal{E} T_0 D^2}{CE},$$

expression qui, dans le cas du cuivre et à la température de la glace fondante, a pour valeur $2,34.10^{-3}$.

Duhamel avait fait la même hypothèse, pour tenir compte de la contraction, dans l'étude du refroidissement de la sphère.

Sur l'élimination des longitudes dans le problème des trois corps;

Par M. H. DUPORT.

PRÉFACE.

Le problème des trois corps a été l'objet de travaux nombreux depuis la découverte de la loi de l'attraction universelle. Les géomètres les plus éminents s'en sont occupés et l'intérêt qui s'attache à cette difficile question se comprend aisément; car, la Lune étant l'astre le plus rapproché de nous, la détermination précise de son mouvement a une très grande importance.

On a souvent voulu attacher à ce problème un intérêt théorique qui est plus difficile à justifier, celui de la vérification même de la loi de l'attraction universelle. Il est clair que cette loi ne peut être qu'une loi physique qui est assurément vraie dans son application à la Mécanique céleste, mais il ne faut pas songer à la considérer autrement. On n'est arrivé, en partant de ce point de vue, qu'à l'hypothèse absurde de la continuité de la matière, à la théorie incompréhensible des actions de contact, tandis que la conception atomique combinée avec les actions à distance permettra sans doute de dévoiler la constitution de la matière. Je renverrai le lecteur que ces questions intéressent au dernier Mémoire que j'ai publié sur ce sujet, qui a été présenté à l'Académie des Sciences dans la séance du 18 mars 1901, et qui a paru dans la *Revue bourguignonne de l'enseignement supérieur*, t. XI, n° 3. J'ai pu m'assurer depuis que l'étude des équations fonctionnelles, à laquelle la recherche de la loi de l'attraction universelle est maintenant ramenée, est susceptible d'être faite par des analystes adroits.

Si nous revenons maintenant à la question qui nous occupe aujourd'hui, celle du problème des trois corps, on n'est pas encore en possession d'une solution satisfaisante au point de vue des formules à employer. Il semble qu'un point de vue surtout ait empêché les progrès de se faire. Dès le début, les géomètres ont été séduits par le côté brillant de certains travaux de Jacobi sur les équations différentielles de la Mécanique. Ces travaux font jouer à la fonction des forces un rôle prépondérant, et, dès lors, on n'a plus pu s'en séparer.

Cependant, ces travaux de Jacobi sont inspirés par un principe analytiquement faux, celui de résoudre des équations différentielles à l'aide d'une équation aux dérivées partielles. Tout le contraire a lieu dans la réalité, et je puis dire que, si l'on se reporte aux deux Mémoires que j'ai publiés sur cette question dans le *Journal de Liouville* (t. III, fasc. I, et t. VI, fasc. I, 5e série), il reste très peu de chose à faire pour ramener dans tous les cas le système que j'ai traité aux équations différentielles, et que la nature de la solution permet de croire qu'il en sera de même dans le cas d'un système quelconque d'équations aux dérivées partielles [1]. En Mécanique céleste, non seulement la considération de la fonction des forces complique la question, car on introduit une fonction qu'on transforme trop pour pouvoir ensuite l'étudier avec fruit, mais on n'a pas même l'excuse d'une seule fonction. Il faut autant de fonctions perturbatrices qu'il y a de corps, et dès lors le petit intérêt qui existait au début à l'introduire a complètement disparu.

INTRODUCTION.

Le présent Mémoire renferme toutes les formules nécessaires à la détermination des mouvements des comètes, des planètes et de la

---

[1] Dans le cas général, au lieu de trouver comme dans le premier ordre les solutions comprenant des fonctions arbitraires, on trouve séparément des solutions dépendant d'un certain nombre de constantes arbitraires. Ce résultat est bien d'accord avec les travaux publiés sur les équations aux dérivées partielles; à défaut de la solution générale, on est arrivé dans bien des cas à trouver quelques solutions dépendant de constantes arbitraires.

Lune. Elles sont plus simples que celles qui ont été utilisées jusqu'ici. La méthode suivie consiste à séparer dès le début les directions et les distances. Elle s'impose dans l'observation, car, tandis que les coordonnées angulaires des astres peuvent s'obtenir avec soin, au contraire la mesure des diamètres apparents ne fournit sur les distances que des renseignements incomplets et peu précis. Il est assez curieux que le même point de vue donne aussi les meilleurs résultats dans les problèmes théoriques qui font l'objet de la partie la plus importante de la Mécanique céleste.

Ce Mémoire est divisé en quatre Parties :

La première traite de la détermination de l'orbite d'une planète ou d'une comète au moyen d'observations voisines et surabondantes. Il paraîtra évident à toute personne ayant lu la Préface que M. Poincaré a écrite en tête des leçons professées à ce sujet par Tisserand et rédigées après lui par M. Perchot, qu'une solution plus simple de ce problème ne peut résulter que de l'emploi d'un nombre d'observations plus grand que celui qui serait suffisant et en plus d'observations voisines. C'est le problème ainsi posé que j'ai résolu. On sait qu'il est nécessaire de faire trois observations de direction pour que le problème soit déterminé, lorsqu'on néglige la masse de la planète vis-à-vis de celle du Soleil. En faisant quatre observations, on peut, d'une part, ramener le problème au premier degré, et, d'autre part, déterminer la masse de la planète inconnue.

Dans la deuxième Partie, j'ai considéré le système formé par le Soleil, la Terre et la Lune. Je me suis d'abord proposé de déterminer les masses de ces corps et les rapports de leurs distances au moyen d'observations de direction. Le problème n'offre pas de grandes difficultés, et, comme on connaît ladistance de la Terre à la Lune, on voit qu'on peut tirer de là en particulier la valeur de la parallaxe solaire par une méthode qui a l'avantage de pouvoir être appliquée à un moment quelconque. La solution de cette question est naturellement d'une grande utilité quand on cherche ensuite les mouvements, car alors les coefficients qui entrent dans les équations différentielles sont connus avec précision et les données initiales peuvent être rigoureusement obtenues au moyen d'observations.

Dans la troisième Partie, j'ai abordé le problème des trois corps en

étudiant les mouvements du Soleil et de la Lune relativement à la Terre. La méthode suivie a une grande analogie avec celle de Lagrange, fondée sur la recherche des distances mutuelles, puisque les inconnues fondamentales sont les distances de la Terre au Soleil et à la Lune, et l'angle sous lequel on voit de la Terre la distance du Soleil à la Lune. On en déduit aisément les formules relatives à la détermination des orbites képlériennes. J'ai indiqué enfin une modification de la méthode ordinaire de calcul en utilisant les intégrales des aires. Cette voie pourra paraître un peu compliquée, mais elle n'est pas au-dessus des forces des mathématiciens qui affrontent les difficultés de la Mécanique céleste, et il semble qu'elle puisse fournir une solution satisfaisante du problème des trois corps. C'est ce qui légitime le titre de ce travail.

Dans la quatrième Partie, j'ai repris la méthode de Jacobi qui consiste à déterminer, d'une part, le mouvement relativement au Soleil du système formé par la Terre et la Lune, puis le mouvement de la Lune relativement à la Terre. La méthode de calcul est rapide et peut s'étendre au système solaire entier, c'est-à-dire à un système formé du Soleil, des planètes et de leurs satellites.

PREMIÈRE PARTIE.

Soient le Soleil en S; des axes rectangulaires Sx, Sy, Sz. Soient la Terre en T; x_1, y_1, z_1 ses coordonnées. Elles sont supposées connues à un facteur constant près dont la valeur inconnue correspond à la détermination précise de la parallaxe solaire. On sait que la connaissance de ce facteur n'est pas utile pour déterminer les directions, les rapports des distances, ainsi que les rapports des masses entre elles et le rapport de l'une d'elles au cube de la distance. En supposant ce coefficient K égal à l'unité, nous faisons une hypothèse, et l'erreur commise pourra être aisément corrigée quand on en aura la valeur exacte.

Soient $T\xi$, $T\eta$, $T\zeta$ des axes parallèles aux axes fixes menés par le centre de la Terre. Il n'est pas nécessaire de supposer que le plan

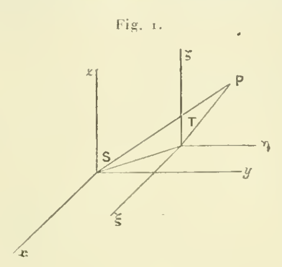
des xy est le plan de l'écliptique. Le plan des $\xi\eta$ peut être, par exemple, celui de l'équateur. Comme on se place toujours dans l'un de ces deux cas, on peut admettre que $T\xi$ est la ligne allant au point γ.

Soient ξ, η, ζ les coordonnées de la planète P relativement à la Terre; x, y, z ses coordonnées relativement au Soleil. Je poserai

$$\xi = \rho\alpha, \qquad \eta = \rho\beta, \qquad \zeta = \rho\gamma.$$

α, β, γ étant les cosinus directeurs de la direction TP et ρ la distance TP.

Fig. 1.



On aura les formules

$$(1) \qquad x = x_1 + \rho\alpha, \qquad y = y_1 + \rho\beta, \qquad z = z_1 + \rho\gamma.$$

On a aussi les équations

$$(2) \qquad \frac{d^2 x}{dt^2} = -\mu' \frac{x}{r^3}, \qquad \frac{d^2 y}{dt^2} = -\mu' \frac{y}{r^3}, \qquad \frac{d^2 z}{dt^2} = -\mu' \frac{z}{r^3},$$

où μ' est la somme des masses du Soleil et de la planète, et où r désigne la distance SP. On a également

$$(3) \qquad \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -\mu \frac{x_1}{R^3}, \qquad \frac{d^2 y_1}{dt^2} = -\mu \frac{y_1}{R^3}, \qquad \frac{d^2 z_1}{dt^2} = -\mu \frac{z_1}{R^3},$$

où μ désigne la somme des masses du Soleil et de la Terre, et où R désigne la distance ST.

Des équations (2) on tire

$$(4) \qquad y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} = C, \qquad z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt} = C', \qquad x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = C'',$$

C, C', C'' étant des constantes. Des équations (3) on tire de même

$$(5)\quad y_1\frac{dz_1}{dt}-z_1\frac{dy_1}{dt}=A,\qquad z_1\frac{dx_1}{dt}-x_1\frac{dz_1}{dt}=A',\qquad x_1\frac{dy_1}{dt}-y_1\frac{dx_1}{dt}=A'',$$

A, A', A'' étant des constantes. On aura aussi

$$(6)\qquad \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1.$$

En remplaçant x, y, z par leurs valeurs, les équations (4) peuvent s'écrire de la manière suivante, où il a été tenu compte des équations (5) :

$$(7)\quad\left\{\begin{aligned}
&A+\rho\left(\beta\frac{dz_1}{dt}-\gamma\frac{dy_1}{dt}\right)+\rho\left(y_1\frac{d\gamma}{dt}-z_1\frac{d\beta}{dt}\right)\\
&\qquad+\rho^2\left(\beta\frac{d\gamma}{dt}-\gamma\frac{d\beta}{dt}\right)+\frac{d\rho}{dt}(y_1\gamma-z_1\beta)=C,\\
&A'+\rho\left(\gamma\frac{dx_1}{dt}-\alpha\frac{dz_1}{dt}\right)+\rho\left(z_1\frac{d\alpha}{dt}-x_1\frac{d\gamma}{dt}\right)\\
&\qquad+\rho^2\left(\gamma\frac{d\alpha}{dt}-\alpha\frac{d\gamma}{dt}\right)+\frac{d\rho}{dt}(z_1\alpha-x_1\gamma)=C',\\
&A''+\rho\left(\alpha\frac{dy_1}{dt}-\beta\frac{dx_1}{dt}\right)+\rho\left(x_1\frac{d\beta}{dt}-y_1\frac{d\alpha}{dt}\right)\\
&\qquad+\rho^2\left(\alpha\frac{d\beta}{dt}-\beta\frac{d\alpha}{dt}\right)+\frac{d\rho}{dt}(x_1\beta-y_1\alpha)=C''.
\end{aligned}\right.$$

Multiplions les équations (7) respectivement par α, β, γ et ajoutons ; on aura

$$\begin{aligned}A\alpha+A'\beta+A''\gamma+\rho\Big[x_1\left(\gamma\frac{d\beta}{dt}-\beta\frac{d\gamma}{dt}\right)&+y_1\left(\alpha\frac{d\gamma}{dt}-\gamma\frac{d\alpha}{dt}\right)\\
&+z_1\left(\beta\frac{d\alpha}{dt}-\alpha\frac{d\beta}{dt}\right)\Big]=C\alpha+C'\beta+C''\gamma.\end{aligned}$$

Je poserai

$$(8)\qquad A\alpha+A'\beta+A''\gamma=L,$$

$$(9)\quad x_1\left(\gamma\frac{d\beta}{dt}-\beta\frac{d\gamma}{dt}\right)+y_1\left(\alpha\frac{d\gamma}{dt}-\gamma\frac{d\alpha}{dt}\right)+z_1\left(\beta\frac{d}{dt}-\alpha\frac{d\beta}{dt}\right)=M,$$

et l'équation précédente peut s'écrire

$$(10)\qquad L+M\rho=C\alpha+C'\beta+C''\gamma.$$

Multiplions maintenant les équations (7) respectivement par x_1, y_1, z_1 et ajoutons; on aura

$$(11) \qquad -\rho L - \rho^2 M = C x_1 + C' y_1 + C'' z_1.$$

Enfin multiplions les équations (7) par $\frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\beta}{dt}, \frac{d\gamma}{dt}$, et ajoutons; on aura

$$A\frac{d\alpha}{dt} + A'\frac{d\beta}{dt} + A''\frac{d\gamma}{dt} + \rho\left[\frac{dx_1}{dt}\left(\gamma\frac{d\beta}{dt} - \beta\frac{d\gamma}{dt}\right) + \frac{dy_1}{dt}\left(\alpha\frac{d\gamma}{dt} - \gamma\frac{d\alpha}{dt}\right) + \frac{dz_1}{dt}\left(\beta\frac{d\alpha}{dt} - \alpha\frac{d\beta}{dt}\right)\right] - \frac{d\rho}{dt}M = C\frac{d\alpha}{dt} + C'\frac{d\beta}{dt} + C''\frac{d\gamma}{dt}.$$

Posons

$$(12) \qquad \frac{dM}{dt} - P = \frac{dx_1}{dt}\left(\gamma\frac{d\beta}{dt} - \beta\frac{d\gamma}{dt}\right) + \frac{dy_1}{dt}\left(\alpha\frac{d\gamma}{dt} - \gamma\frac{d\alpha}{dt}\right) + \frac{dz_1}{dt}\left(\beta\frac{d\alpha}{dt} - \alpha\frac{d\beta}{dt}\right),$$

ou bien

$$(13) \quad P = x_1\left(\gamma\frac{d^2\beta}{dt^2} - \beta\frac{d^2\gamma}{dt^2}\right) + y_1\left(\alpha\frac{d^2\gamma}{dt^2} - \gamma\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right) + z_1\left(\beta\frac{d^2\alpha}{dt^2} - \alpha\frac{d^2\beta}{dt^2}\right);$$

l'équation précédente devient

$$(14) \qquad \frac{dL}{dt} - M\frac{d\rho}{dt} + \rho\left(\frac{dM}{dt} - P\right) = C\frac{d\alpha}{dt} + C'\frac{d\beta}{dt} + C''\frac{d\gamma}{dt}.$$

Réunissons les équations (10), (11) et (14) :

$$(10) \qquad L + M\rho = C\alpha + C'\beta + C''\gamma,$$

$$(11) \qquad -L\rho - M\rho^2 = Cx_1 + C'y_1 + C''z_1,$$

$$(14) \qquad \frac{dL}{dt} - M\frac{d\rho}{dt} + \rho\left(\frac{dM}{dt} - P\right) = C\frac{d\alpha}{dt} + C'\frac{d\beta}{dt} + C''\frac{d\gamma}{dt}.$$

Dérivons l'équation (10) et retranchons-en l'équation (14). On aura

$$\frac{dL}{dt} + \frac{dM}{dt}\rho + M\frac{d\rho}{dt} = \frac{dL}{dt} - M\frac{d\rho}{dt} + \rho\left(\frac{dM}{dt} - P\right)$$

ou bien

$$(15) \qquad 2M\frac{d\rho}{dt} + P\rho = 0,$$

et l'équation (14) s'écrira

$$(16) \qquad \frac{dL}{dt} + \rho\left(\frac{dM}{dt} - \frac{P}{2}\right) = C\frac{d\alpha}{dt} + C'\frac{d\beta}{dt} + C''\frac{d\gamma}{dt}.$$

Dérivons l'équation (11); on aura

$$-L\frac{d\rho}{dt} - 2M\rho\frac{d\rho}{dt} - \rho\frac{dL}{dt} - \rho^2\frac{dM}{dt} = C\frac{dx_1}{dt} + C'\frac{dy_1}{dt} + C''\frac{dz_1}{dt},$$

ou bien, en tenant compte de (15),

$$(17) \qquad -\rho\left(\frac{dL}{dt} - \frac{PL}{2M}\right) - \rho^2\left(\frac{dM}{dt} - P\right) = C\frac{dx_1}{dt} + C'\frac{dy_1}{dt} + C''\frac{dz_1}{dt}.$$

Entre les équations (10), (11), (16) et (17), éliminons C, C′, C″; on aura

$$\begin{vmatrix} L + M\rho & \alpha & \beta & \gamma \\ -L\rho - M\rho^2 & x_1 & y_1 & z_1 \\ \dfrac{dL}{dt} + \rho\left(\dfrac{dM}{dt} - \dfrac{P}{2}\right) & \dfrac{d\alpha}{dt} & \dfrac{d\beta}{dt} & \dfrac{d\gamma}{dt} \\ -\rho\left(\dfrac{dL}{dt} - \dfrac{PL}{2M}\right) - \rho^2\left(\dfrac{dM}{dt} - P\right) & \dfrac{dx_1}{dt} & \dfrac{dy_1}{dt} & \dfrac{dz_1}{dt} \end{vmatrix} = 0.$$

Il est aisé de vérifier que cette équation est une identité; en la développant par rapport aux éléments de la première colonne, elle s'écrira

$$-\frac{dL}{dt}(L + M\rho) + (\rho L + \rho^2 M)\left(P - \frac{dM}{dt}\right) + \left[\frac{dL}{dt} + \rho\left(\frac{dM}{dt} - \frac{P}{2}\right)\right]L + \left[\rho\left(\frac{dL}{dt} - \frac{PL}{2M}\right) + \rho^2\left(\frac{dM}{dt} - P\right)\right]M = 0.$$

Il est aisé de voir que tous les termes se détruisent.

Dérivons maintenant l'équation (16); on aura

$$(18) \quad \frac{d^2L}{dt^2} + \rho\left[\frac{d^2M}{dt^2} - \frac{1}{2}\frac{dP}{dt} - \frac{P}{2M}\left(\frac{dM}{dt} - \frac{P}{2}\right)\right] = C\frac{d^2\alpha}{dt^2} + C'\frac{d^2\beta}{dt^2} + C''\frac{d^2\gamma}{dt^2},$$

en tenant compte de l'équation (15).

En éliminant C, C′, C″ entre les équations (10), (11), (16) et (18), on aura

$$(19)\quad \begin{vmatrix} L + M\rho & \alpha & \beta & \gamma \\ -L\rho - M\rho^2 & x_1 & y_1 & z_1 \\ \frac{dL}{dt} + \rho\left(\frac{dM}{dt} - \frac{P}{2}\right) & \frac{d\alpha}{dt} & \frac{d\beta}{dt} & \frac{d\gamma}{dt} \\ \frac{d^2L}{dt^2} - \rho\left[\frac{d^2M}{dt^2} - \frac{1}{2}\frac{dP}{dt} - \frac{P}{2M}\frac{dM}{dt} + \frac{P^2}{4M}\right] & \frac{d^2\alpha}{dt^2} & \frac{d^2\beta}{dt^2} & \frac{d^2\gamma}{dt^2} \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation (19) n'est pas une identité, car le terme en ρ^2 a pour coefficient, au facteur près M, le déterminant

$$(20)\quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \frac{d\alpha}{dt} & \frac{d\beta}{dt} & \frac{d\gamma}{dt} \\ \frac{d^2\alpha}{dt^2} & \frac{d^2\beta}{dt^2} & \frac{d^2\gamma}{dt^2} \end{vmatrix} = Q,$$

qui n'est pas nul, car il est égal à

$$\frac{1}{\rho^3}\begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \frac{d\xi}{dt} & \frac{d\eta}{dt} & \frac{d\zeta}{dt} \\ \frac{d^2\xi}{dt^2} & \frac{d^2\eta}{dt^2} & \frac{d^2\zeta}{dt^2} \end{vmatrix},$$

et, si ce dernier déterminant était nul, la trajectoire apparente de la planète vue de la Terre serait une courbe plane dont le plan passerait par la Terre.

Calculons maintenant le terme tout connu; il est égal au déterminant

$$\begin{vmatrix} L & \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & x_1 & y_1 & z_1 \\ \frac{dL}{dt} & \frac{d\alpha}{dt} & \frac{d\beta}{dt} & \frac{d\gamma}{dt} \\ \frac{d^2L}{dt^2} & \frac{d^2\alpha}{dt^2} & \frac{d^2\beta}{dt^2} & \frac{d^2\gamma}{dt^2} \end{vmatrix},$$

ou encore

$$\begin{vmatrix} A\alpha + A'\beta + A''\gamma & \alpha & \beta & \gamma \\ A\dfrac{d\alpha}{dt} + A'\dfrac{d\beta}{dt} + A''\dfrac{d\gamma}{dt} & \dfrac{d\alpha}{dt} & \dfrac{d\beta}{dt} & \dfrac{d\gamma}{dt} \\ A\dfrac{d^2\alpha}{dt^2} + A'\dfrac{d^2\beta}{dt^2} + A''\dfrac{d^2\gamma}{dt^2} & \dfrac{d^2\alpha}{dt^2} & \dfrac{d^2\beta}{dt^2} & \dfrac{d^2\gamma}{dt^2} \\ 0 & x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix},$$

ou bien en retranchant de la première colonne le résultat obtenu en multipliant les éléments de la seconde par A, de la troisième par A′, de la quatrième par A″, et faisant la somme

$$\begin{vmatrix} 0 & \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & \dfrac{d\alpha}{dt} & \dfrac{d\beta}{dt} & \dfrac{d\gamma}{dt} \\ 0 & \dfrac{d^2\alpha}{dt^2} & \dfrac{d^2\beta}{dt^2} & \dfrac{d^2\gamma}{dt^2} \\ -Ax_1 - A'y_1 - A''z_1 & x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant est nul, puisqu'on a

$$Ax_1 + A'y_1 + A''z_1 = 0.$$

L'équation (19) se réduit donc au premier degré; elle fournira la valeur de ρ.

Les équations (10), (11) et (16) fourniront ensuite c, c', c''.

Revenons maintenant aux équations (2). Elles peuvent s'écrire, en tenant compte de (3),

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} -\mu\frac{x_1}{R^3} + \rho\frac{d^2\alpha}{dt^2} + 2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\alpha}{dt} + \alpha\frac{d^2\rho}{dt^2} &= -\mu'\frac{x_1+\rho\alpha}{r^3}, \\ -\mu\frac{y_1}{R^3} + \rho\frac{d^2\beta}{dt^2} + 2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\beta}{dt} + \beta\frac{d^2\rho}{dt^2} &= -\mu'\frac{y_1+\rho\beta}{r^3}, \\ -\mu\frac{z_1}{R^3} + \rho\frac{d^2\gamma}{dt^2} + 2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\gamma}{dt} + \gamma\frac{d^2\rho}{dt^2} &= -\mu'\frac{z_1+\rho\gamma}{r^3}. \end{aligned}\right.$$

Multiplions la première de ces équations par $\beta\dfrac{d\gamma}{dt} - \gamma\dfrac{d\beta}{dt}$, la seconde

par $\gamma \frac{d\alpha}{dt} - \alpha \frac{d\gamma}{dt}$, la troisième par $\alpha \frac{d\beta}{dt} - \beta \frac{d\alpha}{dt}$, et ajoutons; il viendra

$$\mu \frac{M}{R^3} + \rho \begin{vmatrix} \alpha & \frac{d\alpha}{dt} & \frac{d^2\alpha}{dt^2} \\ \beta & \frac{d\beta}{dt} & \frac{d^2\beta}{dt^2} \\ \gamma & \frac{d\gamma}{dt} & \frac{d^2\gamma}{dt^2} \end{vmatrix} = \mu' \frac{M}{r^3},$$

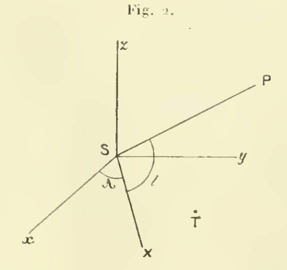
ou bien

$$(22) \qquad \rho Q = M\left(\frac{\mu'}{r^3} - \frac{\mu}{R^3}\right).$$

C'est l'équation de Laplace. Elle fournit μ', car on a

$$(23) \qquad r^2 = R^2 + \rho^2 - 2\rho R \cos\widehat{STP} = R^2 + \rho^2 + 2\rho(\alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1).$$

Fig. 2.



Pour achever la question, reprenons la figure précédente, mais dans laquelle les axes Sx, Sy sont dans le plan de l'écliptique. Soient SX la ligne des nœuds de la planète, Ω la longitude du nœud, i l'inclinaison de l'orbite, λ la longitude géocentrique de la planète, β sa latitude géocentrique, L la longitude de la Terre, l la longitude de la planète dans son orbite comptée à partir de la ligne des nœuds.

On a les équations

$$(24) \qquad \begin{cases} r\cos l = R\cos(L - \Omega) + \rho\cos\beta\cos(\lambda - \Omega), \\ r\sin l \cos i = R\sin(L - \Omega) + \rho\cos\beta\sin(\lambda - \Omega), \\ r\sin l \sin i = \rho\sin\beta. \end{cases}$$

Les valeurs de C, C′, C″ ont fourni $\mathfrak{L}$ et i qui sont désormais connus, et je poserai en plus

$$(25) \qquad G^2 = C^2 + C'^2 + C''^2,$$

G étant positif. Si l'on pose

$$(26) \qquad \begin{cases} B = R[\sin\beta\cos i\cos(L - \mathfrak{L}) + \cos\beta\sin i\sin(L - \lambda)], \\ B' = R\sin(L - \mathfrak{L})\sin\beta, \\ B'' = \sin\beta\cos i - \cos\beta\sin i\sin(\lambda - \mathfrak{L}), \end{cases}$$

les équations fournissent

$$(27) \qquad r\cos l = \frac{B}{B''}, \qquad r\sin l = \frac{B'}{B''}.$$

On a d'ailleurs les formules

$$(28) \qquad r = \frac{G^2}{\mu'}\,\frac{1}{1 + e\cos(l - \varpi)}, \qquad \frac{dr}{dt} = \frac{\mu'}{G}\,e\sin(l - \varpi),$$

e étant l'excentricité de l'orbite planétaire, ϖ la longitude du périhélie.

On tire des équations (27), (28) et de la loi des aires

$$r^2\frac{dl}{dt} = G$$

les formules suivantes :

$$(29) \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}(r\cos l) = -\dfrac{\mu'}{G}(\sin l + e\sin\varpi) = \dfrac{B''\dfrac{dB}{dt} - B\dfrac{dB''}{dt}}{B''^2}, \\[2ex] \dfrac{d}{dt}(r\sin l) = \dfrac{\mu'}{G}(\cos l + e\cos\varpi) = \dfrac{B''\dfrac{dB'}{dt} - B'\dfrac{dB''}{dt}}{B''^2}. \end{cases}$$

On calculera l à l'aide des équations (27), puis e et ϖ à l'aide de (29).

Ayant l, on calculera enfin l'époque du passage de la planète au périhélie.

Je vais développer l'équation (19). Elle s'écrit

$$\begin{aligned} M\Big[x_1\Big(\frac{d\beta}{dt}\frac{d^2\gamma}{dt^2}-\frac{d\gamma}{dt}\frac{d^2\beta}{dt^2}\Big)&+y_1\Big(\frac{d\gamma}{dt}\frac{d^2\alpha}{dt^2}-\frac{d\alpha}{dt}\frac{d^2\gamma}{dt^2}\Big)\\ &+z_1\Big(\frac{d\alpha}{dt}\frac{d^2\beta}{dt^2}-\frac{d\beta}{dt}\frac{d^2\alpha}{dt^2}\Big)\Big]\\ &+(L+M\rho)Q+P\Big(\frac{dM}{dt}-\frac{P}{2}\Big)\\ &-M\Big(\frac{d^2M}{dt^2}-\frac{1}{2}\frac{dP}{dt}\Big)+\frac{P}{2}\frac{dM}{dt}-\frac{P^2}{4}=0, \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} M\Big[x_1\Big(\frac{d\beta}{dt}\frac{d^2\gamma}{dt^2}-\frac{d\gamma}{dt}\frac{d^2\beta}{dt^2}\Big)&+y_1\Big(\frac{d\gamma}{dt}\frac{d^2\alpha}{dt^2}-\frac{d\alpha}{dt}\frac{d^2\gamma}{dt^2}\Big)\\ &+z_1\Big(\frac{d\alpha}{dt}\frac{d^2\beta}{dt^2}-\frac{d\beta}{dt}\frac{d^2\alpha}{dt^2}\Big)\\ &-\frac{d^2M}{dt^2}+\frac{1}{2}\frac{dP}{dt}+\rho Q\Big]\\ &+LQ+\frac{3P}{2}\Big(\frac{dM}{dt}-\frac{P}{2}\Big)=0, \end{aligned}$$

ou enfin, en remplaçant $\frac{d^2M}{dt^2}$ par sa valeur,

$$(19')\qquad \begin{aligned} M\Big[x_1\Big(\gamma\frac{d^3\beta}{dt^3}-\beta\frac{d^3\gamma}{dt^3}\Big)&+y_1\Big(\alpha\frac{d^3\gamma}{dt^3}-\gamma\frac{d^3\alpha}{dt^3}\Big)\\ +z_1\Big(\beta\frac{d^3\alpha}{dt^3}-\alpha\frac{d^3\beta}{dt^3}\Big)&-\frac{3}{2}\frac{dP}{dt}+\mu\frac{M}{R^3}+\rho Q\Big]\\ &+LQ+\frac{3P}{2}\Big(\frac{dM}{dt}-\frac{P}{2}\Big)=0. \end{aligned}$$

Dans la valeur de $\frac{d^2M}{dt^2}$ nous avons remplacé les termes en $\frac{d^2x_1}{dt^2}$, $\frac{d^2y_1}{dt^2}$, $\frac{d^2z_1}{dt^2}$ par leurs valeurs tirées des équations (3).

Bien que la question posée soit résolue, des considérations supplémentaires seront utiles. Reprenons les équations (21). Si on les multiplie respectivement par $\beta z_1-\gamma y_1$, $\gamma x_1-\alpha z_1$, $\alpha y_1-\beta x_1$ et que l'on ajoute, on obtient l'équation

$$\begin{aligned} \rho\Big[\frac{d^2\alpha}{dt^2}(\beta z_1-\gamma y_1)&+\frac{d^2\beta}{dt^2}(\gamma x_1-\alpha z_1)+\frac{d^2\gamma}{dt^2}(\alpha y_1-\beta x_1)\Big]\\ +2\frac{d\rho}{dt}\Big[\frac{d\alpha}{dt}(\beta z_1-\gamma y_1)&+\frac{d\beta}{dt}(\gamma x_1-\alpha z_1)+\frac{d\gamma}{dt}(\alpha y_1-\beta x_1)\Big]=0, \end{aligned}$$

qui n'est autre que

$$(15)\qquad 2M\frac{d\rho}{dt}+P\rho=0.$$

Multiplions maintenant les équations (21) par α, β, γ et ajoutons; il viendra

$$-\mu\frac{\alpha x_1+\beta y_1+\gamma z_1}{R^3}+\rho\left(\alpha\frac{d^2\alpha}{dt^2}+\beta\frac{d^2\beta}{dt^2}+\gamma\frac{d^2\gamma}{dt^2}\right)+\frac{d^2\rho}{dt^2}$$
$$=-\mu'\frac{\rho}{r^3}-\mu'\frac{\alpha x_1+\beta y_1+\gamma z_1}{r^3}$$

ou bien

$$\left(\frac{\mu'}{r^3}-\frac{\mu}{R^3}\right)(\alpha x_1+\beta y_1+\gamma z_1)+\rho\left(\alpha\frac{d^2\alpha}{dt^2}+\beta\frac{d^2\beta}{dt^2}+\gamma\frac{d^2\gamma}{dt^2}\right)+\frac{d^2\rho}{dt^2}=-\mu\frac{\rho}{r^3};$$

de l'équation (15) on tire

$$\frac{d^2\rho}{dt^2}=H\rho,$$

en posant

$$(30)\qquad H=\frac{2P\dfrac{dM}{dt}-2M\dfrac{dP}{dt}+P^2}{4M^2}.$$

En tenant compte de l'équation (22), notre combinaison devient

$$\frac{\rho Q}{M}(\alpha x_1+\beta y_1+\gamma z_1)+\rho\left(\alpha\frac{d^2\alpha}{dt^2}+\beta\frac{d^2\beta}{dt^2}+\gamma\frac{d^2\gamma}{dt^2}+H\right)=-\frac{\mu'\rho}{r^3}.$$

En supprimant le facteur ρ, on obtient l'équation

$$(31)\qquad Q(\alpha x_1+\beta y_1+\gamma z_1)+M\left(\alpha\frac{d^2\alpha}{dt^2}+\beta\frac{d^2\beta}{dt^2}+\gamma\frac{d^2\gamma}{dt^2}+H\right)=-\frac{\mu' M}{r^3}.$$

Cette équation résoudrait aussi la question, car elle fait connaître r, d'où l'on peut obtenir la valeur de ρ; mais il est préférable d'y substituer de suite l'inconnue ρ à l'aide de l'équation (22), puisque μ' n'est pas connu exactement. Cette équation devient alors

$$Q(\alpha x_1+\beta y_1+\gamma z_1)+M\left(H+\alpha\frac{d^2\alpha}{dt^2}+\beta\frac{d^2\beta}{dt^2}+\gamma\frac{d^2\gamma}{dt^2}\right)+\frac{\mu M}{R^3}+\rho Q=0,$$

ou enfin, en remplaçant H par sa valeur,

$$(32)\quad M\Big[Q(\alpha x_1+\beta y_1+\gamma z_1) + M\left(\alpha\frac{d^2\alpha}{dt^2}+\beta\frac{d^2\beta}{dt^2}+\gamma\frac{d^2\gamma}{dt^2}\right)-\frac{1}{2}\frac{dP}{dt}+\mu\frac{M}{R^3}+\rho Q\Big] + \frac{P^2}{4}+\frac{P}{2}\frac{dM}{dt}=0.$$

Je vais montrer que cette équation (32) est la même que (19'). Retranchons pour cela l'équation (19') de l'équation (32). On a

$$(33)\quad M\Big[Q(\alpha x_1+\beta y_1+\gamma z_1)+M\left(\alpha\frac{d^2\alpha}{dt^2}+\beta\frac{d^2\beta}{dt^2}+\gamma\frac{d^2\gamma}{dt^2}\right) + \frac{dP}{dt}-x_1\left(\gamma\frac{d^3\beta}{dt^3}-\beta\frac{d^3\gamma}{dt^3}\right)-y_1\left(\alpha\frac{d^3\gamma}{dt^3}-\gamma\frac{d^3\alpha}{dt^3}\right) - z_1\left(\beta\frac{d^3\alpha}{dt^3}-\alpha\frac{d^3\beta}{dt^3}\right)\Big] + P^2-P\frac{dM}{dt}-LQ=0.$$

On a

$$\frac{dP}{dt}-x_1\left(\gamma\frac{d^3\beta}{dt^3}-\beta\frac{d^3\gamma}{dt^3}\right)-y_1\left(\alpha\frac{d^3\gamma}{dt^3}-\gamma\frac{d^3\alpha}{dt^3}\right)-z_1\left(\beta\frac{d^3\alpha}{dt^3}-\alpha\frac{d^3\beta}{dt^3}\right)$$
$$=\frac{dx_1}{dt}\left(\gamma\frac{d^2\beta}{dt^2}-\beta\frac{d^2\gamma}{dt^2}\right)+\frac{dy_1}{dt}\left(\alpha\frac{d^2\gamma}{dt^2}-\gamma\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)+\frac{dz_1}{dt}\left(\beta\frac{d^2\alpha}{dt^2}-\alpha\frac{d^2\beta}{dt^2}\right)$$
$$+x_1\left(\frac{d\gamma}{dt}\frac{d^2\beta}{dt^2}-\frac{d\beta}{dt}\frac{d^2\gamma}{dt^2}\right)+y_1\left(\frac{d\alpha}{dt}\frac{d^2\gamma}{dt^2}-\frac{d\gamma}{dt}\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right) + z_1\left(\frac{d\beta}{dt}\frac{d^2\alpha}{dt^2}-\frac{d\alpha}{dt}\frac{d^2\beta}{dt^2}\right),$$

puis

$$Q(\alpha x_1+\beta y_1+\gamma z_1)+M\left(\alpha\frac{d^2\alpha}{dt^2}+\beta\frac{d^2\beta}{dt^2}+\gamma\frac{d^2\gamma}{dt^2}\right) +x_1\left(\frac{d\gamma}{dt}\frac{d^2\beta}{dt^2}-\frac{d\beta}{dt}\frac{d^2\gamma}{dt^2}\right)+y_1\left(\frac{d\alpha}{dt}\frac{d^2\gamma}{dt^2}-\frac{d\gamma}{dt}\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right) + z_1\left(\frac{d\beta}{dt}\frac{d^2\alpha}{dt^2}-\frac{d\alpha}{dt}\frac{d^2\beta}{dt^2}\right)=0,$$

car cette expression n'est autre que le déterminant

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & 1 \\ \frac{d\alpha}{dt} & \frac{d\beta}{dt} & \frac{d\gamma}{dt} & 0 \\ \frac{d^2\alpha}{dt^2} & \frac{d^2\beta}{dt^2} & \frac{d^2\gamma}{dt^2} & \alpha\frac{d^2\alpha}{dt^2}+\beta\frac{d^2\beta}{dt^2}+\gamma\frac{d^2\gamma}{dt^2} \\ x_1 & y_1 & z_1 & \alpha x_1+\beta y_1+\gamma z_1 \end{vmatrix},$$

qui est nul, puisque les éléments de la quatrième colonne s'obtiennent en multipliant ceux de la première par α, ceux de la seconde par β, ceux de la troisième par γ et ajoutant.

L'équation (33) devient alors

$$\begin{aligned} \mathrm{M}\Bigg[\frac{dx_1}{dt}\left(\gamma\frac{d^2\beta}{dt^2}-\beta\frac{d^2\gamma}{dt^2}\right)+\frac{dy_1}{dt}\left(\alpha\frac{d^2\gamma}{dt^2}-\gamma\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right) \\ +\frac{dz_1}{dt}\left(\beta\frac{d^2\alpha}{dt^2}-\alpha\frac{d^2\beta}{dt^2}\right)\Bigg]-\mathrm{P}\left(\frac{d\mathrm{M}}{dt}-\mathrm{P}\right)-\mathrm{LQ}=0, \end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned} &\mathrm{M}\left[\frac{dx_1}{dt}\left(\gamma\frac{d^2\beta}{dt^2}-\beta\frac{d^2\gamma}{dt^2}\right)+\frac{dy_1}{dt}\left(\alpha\frac{d^2\gamma}{dt^2}-\gamma\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)+\frac{dz_1}{dt}\left(\beta\frac{d^2\alpha}{dt^2}-\alpha\frac{d^2\beta}{dt^2}\right)\right] \\ -&\mathrm{P}\left[\frac{dx_1}{dt}\left(\gamma\frac{d\beta}{dt}-\beta\frac{d\gamma}{dt}\right)+\frac{dy_1}{dt}\left(\alpha\frac{d\gamma}{dt}-\gamma\frac{d\alpha}{dt}\right)+\frac{dz_1}{dt}\left(\beta\frac{d\alpha}{dt}-\alpha\frac{d\beta}{dt}\right)\right] \\ -&\mathrm{Q}\left[\frac{dx_1}{dt}(\beta z_1-\gamma y_1)+\frac{dy_1}{dt}(\gamma x_1-\alpha z_1)+\frac{dz_1}{dt}(\alpha y_1-\beta x_1)\right]=0. \end{aligned}$$

Le terme en $\frac{dx_1}{dt}$ dans cette équation est

$$\mathrm{M}\left(\gamma\frac{d^2\beta}{dt^2}-\beta\frac{d^2\gamma}{dt^2}\right)-\mathrm{P}\left(\gamma\frac{d\beta}{dt}-\beta\frac{d\gamma}{dt}\right)-\mathrm{Q}(\beta z_1-\gamma y_1).$$

On peut l'écrire sous forme de déterminant

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & 0 \\ \frac{d\alpha}{dt} & \frac{d\beta}{dt} & \frac{d\gamma}{dt} & \gamma\frac{d\beta}{dt}-\beta\frac{d\gamma}{dt} \\ \frac{d^2\alpha}{dt^2} & \frac{d^2\beta}{dt^2} & \frac{d^2\gamma}{dt^2} & \gamma\frac{d^2\beta}{dt^2}-\beta\frac{d^2\gamma}{dt^2} \\ x_1 & y_1 & z_1 & \gamma y_1-\beta z_1 \end{vmatrix}.$$

En y remplaçant l'élément zéro par $\gamma\beta-\beta\gamma$, on voit que ce déter-

minant est nul. Ainsi les équations (19) et (32) sont équivalentes. Dans la forme (32), on peut remplacer

$$\alpha \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \beta \frac{d^2\beta}{dt^2} + \gamma \frac{d^2\gamma}{dt^2} \quad \text{par} \quad -\left(\frac{d\alpha^2}{dt^2} + \frac{d\beta^2}{dt^2} + \frac{d\gamma^2}{dt^2}\right).$$

Lorsqu'on fait quatre observations de directions et que l'on considère, comme nous l'avons fait, μ' comme une inconnue, le problème comporte sept inconnues, et l'on doit pouvoir trouver par conséquent une équation de condition. Il est aisé de voir que l'on peut en effet la former. Reprenons l'équation de Laplace

$$(22) \qquad \rho Q = M\left(\frac{\mu'}{r^3} - \frac{\mu}{R^3}\right).$$

Cette équation ne contient que les dérivées secondes des quantités α, β, γ. Si donc on prend sa dérivée par rapport au temps, on formera une équation qui ne renfermera que les dérivées troisièmes et qui pourra être constituée avec les données; on le fera aisément à l'aide des équations (15) et (23). Elle pourra fournir une vérification des calculs; mais, en pratique, je crois qu'il sera préférable de prendre même plus de quatre observations, afin d'avoir les dérivées avec le plus de précision possible. Quant aux calculs, la meilleure vérification consiste à les faire faire séparément par des calculateurs différents.

Je vais, pour terminer ce Chapitre, montrer comment la même méthode s'appliquerait à la détermination des ellipses décrites à un moment donné par le Soleil et la Lune autour de la Terre. La détermination de ces ellipses ayant la plus grande importance dans le problème des trois corps en particulier, les calculs qui suivent ont une application immédiate.

Reprenons les équations relatives au Soleil :

$$(3) \qquad \frac{d^2x_1}{dt^2} = -\mu\frac{x_1}{R^3}, \qquad \frac{d^2y_1}{dt^2} = -\mu\frac{y_1}{R^3}, \qquad \frac{d^2z_1}{dt^2} = -\mu\frac{z_1}{R^3}.$$

Je poserai

$$x_1 = -R\xi, \qquad y_1 = -R\eta, \qquad z_1 = -R\zeta;$$

alors ξ, η, ζ seront les cosinus directeurs de TS et les équations (3)

deviennent

$$(34)\qquad \frac{d^2 R\xi}{dt^2} = -\frac{\mu}{R^2}\xi, \qquad \frac{d^2 R\eta}{dt^2} = -\frac{\mu}{R^2}\eta, \qquad \frac{d^2 R\zeta}{dt^2} = -\frac{\mu}{R^2}\zeta.$$

On peut écrire ces équations

$$(35)\qquad \left\{\begin{aligned} &R\frac{d^2\xi}{dt^2} + 2\frac{dR}{dt}\frac{d\xi}{dt} + \left(\frac{d^2R}{dt^2} + \frac{\mu}{R^2}\right)\xi = 0,\\ &R\frac{d^2\eta}{dt^2} + 2\frac{dR}{dt}\frac{d\eta}{dt} + \left(\frac{d^2R}{dt^2} + \frac{\mu}{R^2}\right)\eta = 0,\\ &R\frac{d^2\zeta}{dt^2} + 2\frac{dR}{dt}\frac{d\zeta}{dt} + \left(\frac{d^2R}{dt^2} + \frac{\mu}{R^2}\right)\zeta = 0.\end{aligned}\right.$$

Le déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{d^2\xi}{dt^2} & \frac{d\xi}{dt} & \xi \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} & \frac{d\eta}{dt} & \eta \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} & \frac{d\zeta}{dt} & \zeta \end{vmatrix}$$

étant nul, on peut poser

$$(36)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} &= m\frac{d\xi}{dt} - n\xi,\\ \frac{d^2\eta}{dt^2} &= m\frac{d\eta}{dt} - n\eta,\\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} &= m\frac{d\zeta}{dt} - n\zeta,\end{aligned}\right.$$

et l'on a

$$(37)\qquad n = \frac{d\xi^2}{dt^2} + \frac{d\eta^2}{dt^2} + \frac{d\zeta^2}{dt^2}, \qquad m = \frac{1}{2n}\frac{dn}{dt}.$$

Les équations (35) deviennent

$$\left(Rm + 2\frac{dR}{dt}\right)\frac{d\xi}{dt} + \left(\frac{d^2R}{dt^2} + \frac{\mu}{R^2} - nR\right)\xi = 0,$$

$$\left(Rm + 2\frac{dR}{dt}\right)\frac{d\eta}{dt} + \left(\frac{d^2R}{dt^2} + \frac{\mu}{R^2} - nR\right)\eta = 0,$$

$$\left(Rm + 2\frac{dR}{dt}\right)\frac{d\zeta}{dt} + \left(\frac{d^2R}{dt^2} + \frac{\mu}{R^2} - nR\right)\zeta = 0,$$

et donnent séparément

$$(38)\qquad Rm + 2\frac{dR}{dt} = 0, \qquad \frac{d^2R}{dt^2} + \frac{\mu}{R^2} - nR = 0.$$

On en tire

$$(39)\qquad \frac{d^2R}{dt^2} = R\,\frac{m^2 - 2\dfrac{dm}{dt}}{4}, \qquad \frac{\mu}{R^3} = n + \frac{1}{2}\frac{dm}{dt} - \frac{m^2}{4}.$$

Supposons maintenant qu'à l'aide des valeurs de $\xi, \eta, \zeta, \frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}$, on ait déterminé la trace du plan de l'orbite sur le plan des xy et l'inclinaison de l'orbite. Si cette trace est alors supposée l'axe des x, on aura

$$\xi = \cos l, \qquad \eta = \sin l \cos i, \qquad \zeta = \sin l \sin i,$$

l étant la longitude dans l'orbite; on a donc

$$\frac{dl}{dt} = \frac{C}{R^2}, \qquad R = \frac{C^2}{\mu}\,\frac{1}{1 + e\cos(l - \varpi)}, \qquad \frac{dR}{dt} = \frac{\mu}{C}\,e\sin(l - \varpi).$$

On a

$$\frac{d\xi}{dt} = -\sin l\,\frac{dl}{dt}, \qquad \frac{d\eta}{dt} = \cos l \cos i\,\frac{dl}{dt}, \qquad \frac{d\zeta}{dt} = \cos l \sin i\,\frac{dl}{dt};$$

d'où

$$(40)\qquad n = \frac{dl^2}{dt^2} = \frac{C^2}{R^4}.$$

De cette équation et de la dernière de (39), on tire les valeurs

$$\frac{C^2}{\mu R}, \qquad \frac{CR}{\mu}.$$

Soient H et K ces valeurs qu'on obtient à l'aide des directions observées; on a alors

$$(41)\qquad \begin{cases} 1 + e\cos(l - \varpi) = H, \\ e\sin(l - \varpi) = -K\,\dfrac{m}{2}. \end{cases}$$

On tirera de ces équations e et ϖ. Si l'on prend comme inconnue le

demi-grand axe a de l'ellipse, on a ensuite

$$\frac{C^2}{\mu} = a(1-e^2), \qquad H = a\frac{1-e^2}{K}, \qquad K = \frac{C}{\mu}\frac{a(1-e^2)}{H},$$

d'où l'on tire

$$\frac{C}{\mu} = \frac{HK}{a(1-e^2)},$$

et enfin

$$(42) \qquad C = \frac{a^2(1-e^2)^2}{HK}, \qquad \mu = \frac{a^3(1-e^2)^3}{H^2K^2}.$$

On détermine enfin l'époque du passage au périgée. La question est complètement résolue.

DEUXIÈME PARTIE.

Je considère le système formé par le Soleil, la Terre et la Lune. Je suppose que les axes sont de direction constante passant par le centre de gravité du système. Soient :

M la masse du Soleil, x', y', z' ses coordonnées;
m celle de la Terre, x, y, z ses coordonnées;
μ celle de la Lune, x'', y'', z'' ses coordonnées;
R la distance ST, r la distance TL, ρ la distance SL.

Soient ξ, η, ζ les cosinus directeurs de TS; α, β, γ ceux de TL.

On a les formules

$$(1) \qquad \begin{cases} mx + Mx' + \mu x'' = 0, \\ my + My' + \mu y'' = 0, \\ mz + Mz' + \mu z'' = 0; \end{cases}$$

puis

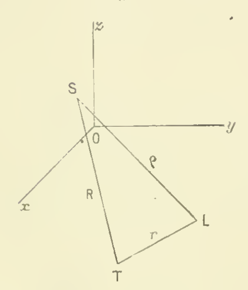
$$(2) \qquad \begin{cases} x' = x + R\xi, \quad y' = y + R\eta, \quad z' = z + R\zeta, \\ x'' = x + r\alpha, \quad y'' = y + r\beta, \quad z'' = z + r\gamma. \end{cases}$$

Les équations des aires dans le mouvement relatif au centre de

gravité sont :

$$(3)\quad \begin{cases} m\left(y\dfrac{dz}{dt}-z\dfrac{dy}{dt}\right)+\mathrm{M}\left(y'\dfrac{dz'}{dt}-z'\dfrac{dy'}{dt}\right)+\mu\left(y''\dfrac{dz''}{dt}-z''\dfrac{dy''}{dt}\right)=\mathrm{A}, \\ m\left(z\dfrac{dx}{dt}-x\dfrac{dz}{dt}\right)+\mathrm{M}\left(z'\dfrac{dx'}{dt}-x'\dfrac{dz'}{dt}\right)+\mu\left(z''\dfrac{dx''}{dt}-x''\dfrac{dz''}{dt}\right)=\mathrm{A}', \\ m\left(x\dfrac{dy}{dt}-y\dfrac{dx}{dt}\right)+\mathrm{M}\left(x'\dfrac{dy'}{dt}-y'\dfrac{dx'}{dt}\right)+\mu\left(x''\dfrac{dy''}{dt}-y''\dfrac{dx''}{dt}\right)=\mathrm{A}''. \end{cases}$$

Fig. 3.



Des équations (1) et (2) on tire

$$(4)\quad x=-\frac{\mathrm{MR}\xi+\mu r\alpha}{\mathrm{M}+m+\mu},\qquad y=-\frac{\mathrm{MR}\eta+\mu r\beta}{\mathrm{M}+m+\mu},\qquad z=-\frac{\mathrm{MR}\zeta+\mu r\gamma}{\mathrm{M}+m+\mu}.$$

La première des équations (3) peut s'écrire

$$\begin{aligned} m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)&+\mathrm{M}\left[(y+\mathrm{R}\eta)\left(\frac{dz}{dt}+\frac{d\mathrm{R}\zeta}{dt}\right)-(z+\mathrm{R}\zeta)\left(\frac{dy}{dt}+\frac{d\mathrm{R}\eta}{dt}\right)\right] \\ &+\mu\left[(y+r\beta)\left(\frac{dz}{dt}+\frac{dr\gamma}{dt}\right)-(z+r\gamma)\left(\frac{dy}{dt}+\frac{dr\beta}{dt}\right)\right]=\mathrm{A}. \end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned} &(\mathrm{M}+m+\mu)\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right) \\ &\quad+\mathrm{M}\left[\mathrm{R}\eta\frac{dz}{dt}-\mathrm{R}\zeta\frac{dy}{dt}+y\frac{d\mathrm{R}\zeta}{dt}-z\frac{d\mathrm{R}\eta}{dt}+\mathrm{R}^2\left(\eta\frac{d\zeta}{dt}-\zeta\frac{d\eta}{dt}\right)\right] \\ &\quad+\mu\left[r\beta\frac{dz}{dt}-r\gamma\frac{dy}{dt}+y\frac{dr\gamma}{dt}-z\frac{dr\beta}{dt}+r^2\left(\beta\frac{d\gamma}{dt}-\gamma\frac{d\beta}{dt}\right)\right]=\mathrm{A}, \end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned}
&-\frac{dz}{dt}(\mathrm{MR}\eta+\mu r\beta)+\frac{dy}{dt}(\mathrm{MR}\zeta+\mu r\gamma)\\
&\quad+\mathrm{M}\left(\mathrm{R}\eta\frac{dz}{dt}-\mathrm{R}\zeta\frac{dy}{dt}+y\frac{d\mathrm{R}\zeta}{dt}-z\frac{d\mathrm{R}\eta}{dt}\right)+\mathrm{MR}^2\left(\eta\frac{d\zeta}{dt}-\zeta\frac{d\eta}{dt}\right)\\
&\quad+\mu\left(r\beta\frac{dz}{dt}-r\gamma\frac{dy}{dt}+y\frac{dr\gamma}{dt}-z\frac{dr\beta}{dt}\right)+\mu r^2\left(\beta\frac{d\gamma}{dt}-\gamma\frac{d\beta}{dt}\right)=\mathrm{A},
\end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}\left(y\frac{d\mathrm{R}\zeta}{dt}-z\frac{d\mathrm{R}\eta}{dt}\right)+\mu\left(y\frac{dr\gamma}{dt}-z\frac{dr\beta}{dt}\right)+\mathrm{MR}^2\left(\eta\frac{d\zeta}{dt}-\zeta\frac{d\eta}{dt}\right)&\\
+\mu r^2\left(\beta\frac{d\gamma}{dt}-\gamma\frac{d\beta}{dt}\right)&=\mathrm{A},
\end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned}
&\frac{\left(\mathrm{M}\frac{d\mathrm{R}\eta}{dt}+\mu\frac{dr\beta}{dt}\right)(\mathrm{MR}\zeta+\mu r\gamma)-\left(\mathrm{M}\frac{d\mathrm{R}\zeta}{dt}+\mu\frac{dr\gamma}{dt}\right)(\mathrm{MR}\eta+\mu r\beta)}{\mathrm{M}+m+\mu}\\
&\quad+\mathrm{MR}^2\left(\eta\frac{d\zeta}{dt}-\zeta\frac{d\eta}{dt}\right)+\mu r^2\left(\beta\frac{d\gamma}{dt}-\gamma\frac{d\beta}{dt}\right)=\mathrm{A},
\end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned}
&\mathrm{M}^2\mathrm{R}^2\left(\zeta\frac{d\eta}{dt}-\eta\frac{d\zeta}{dt}\right)+\mu^2r^2\left(\gamma\frac{d\beta}{dt}-\beta\frac{d\gamma}{dt}\right)\\
&\quad+\mu\mathrm{M}\left(r\gamma\frac{d\mathrm{R}\eta}{dt}+\mathrm{R}\zeta\frac{dr\beta}{dt}-r\beta\frac{d\mathrm{R}\zeta}{dt}-\mathrm{R}\eta\frac{dr\gamma}{dt}\right)\\
&\quad+(\mathrm{M}+m+\mu)\left[\mathrm{MR}^2\left(\eta\frac{d\zeta}{dt}-\zeta\frac{d\eta}{dt}\right)+\mu r^2\left(\beta\frac{d\gamma}{dt}-\gamma\frac{d\beta}{dt}\right)\right]=\mathrm{A},
\end{aligned}$$

ou bien enfin

$$\begin{aligned}
(5)\quad&\mathrm{M}(m+\mu)\mathrm{R}^2\left(\eta\frac{d\zeta}{dt}-\zeta\frac{d\eta}{dt}\right)\\
&\quad+\mu(m+\mathrm{M})r^2\left(\beta\frac{d\gamma}{dt}-\gamma\frac{d\beta}{dt}\right)+\mathrm{M}\mu\left(\mathrm{R}\frac{dr}{dt}-r\frac{d\mathrm{R}}{dt}\right)(\beta\zeta-\gamma\eta)\\
&\quad+\mathrm{M}\mu\mathrm{R}r\left(\gamma\frac{d\eta}{dt}-\eta\frac{d\gamma}{dt}+\zeta\frac{d\beta}{dt}-\beta\frac{d\zeta}{dt}\right)=\mathrm{A}.
\end{aligned}$$

Posons maintenant

$$\begin{vmatrix}\alpha & \xi & \frac{d\xi}{dt}\\ \beta & \eta & \frac{d\eta}{dt}\\ \gamma & \zeta & \frac{d\zeta}{dt}\end{vmatrix}=\mathrm{P},\qquad \begin{vmatrix}\xi & \alpha & \frac{d\alpha}{dt}\\ \eta & \beta & \frac{d\beta}{dt}\\ \zeta & \gamma & \frac{d\gamma}{dt}\end{vmatrix}=\mathrm{Q},$$

et

$$\begin{vmatrix} \alpha & \frac{d\alpha}{dt} & \frac{d\xi}{dt} \\ \beta & \frac{d\beta}{dt} & \frac{d\eta}{dt} \\ \gamma & \frac{d\gamma}{dt} & \frac{d\zeta}{dt} \end{vmatrix} = \mathrm{T}, \qquad \begin{vmatrix} \xi & \frac{d\xi}{dt} & \frac{d\alpha}{dt} \\ \eta & \frac{d\eta}{dt} & \frac{d\beta}{dt} \\ \zeta & \frac{d\zeta}{dt} & \frac{d\gamma}{dt} \end{vmatrix} = \mathrm{S}.$$

On a deux équations analogues à (5). En les multipliant par α, β, γ et ajoutant, on a

$$\mathrm{A}\alpha + \mathrm{A}'\beta + \mathrm{A}''\gamma = \mathrm{M}(m+\mu)\mathrm{R}^2\mathrm{P} + \mathrm{M}\mu\mathrm{R}r\mathrm{Q};$$

en les multipliant par ξ, η, ζ et ajoutant, on a

$$\mathrm{A}\xi + \mathrm{A}'\eta + \mathrm{A}''\zeta = \mu(m+\mathrm{M})r^2\mathrm{Q} + \mathrm{M}\mu\mathrm{R}r\mathrm{P};$$

en les multipliant par $\frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\beta}{dt}, \frac{d\gamma}{dt}$ et ajoutant, on a

$$\mathrm{A}\frac{d\alpha}{dt} + \mathrm{A}'\frac{d\beta}{dt} + \mathrm{A}''\frac{d\gamma}{dt} = \mathrm{M}(m+\mu)\mathrm{R}^2\mathrm{S} - \mathrm{M}\mu\left(\mathrm{R}\frac{dr}{dt} - r\frac{d\mathrm{R}}{dt}\right)\mathrm{Q} + \mathrm{M}\mu\mathrm{R}r\mathrm{T};$$

enfin, en les multipliant par $\frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}$ et ajoutant, on a

$$\mathrm{A}\frac{d\xi}{dt} + \mathrm{A}'\frac{d\eta}{dt} + \mathrm{A}''\frac{d\zeta}{dt} = \mu(m+\mathrm{M})r^2\mathrm{T} + \mathrm{M}\mu\left(\mathrm{R}\frac{dr}{dt} - r\frac{d\mathrm{R}}{dt}\right)\mathrm{P} + \mathrm{M}\mu\mathrm{R}r\mathrm{S}.$$

Je vais réunir ces équations, qui du reste se réduisent à trois :

$$(6)\quad \begin{cases} \mathrm{M}(m+\mu)\mathrm{R}^2\mathrm{P} + \mathrm{M}\mu\mathrm{R}r\mathrm{Q} = \mathrm{A}\alpha + \mathrm{A}'\beta + \mathrm{A}''\gamma, \\ \mu(m+\mathrm{M})r^2\mathrm{Q} + \mathrm{M}\mu\mathrm{R}r\mathrm{P} = \mathrm{A}\xi + \mathrm{A}'\eta + \mathrm{A}''\zeta, \\ \mathrm{M}(m+\mu)\mathrm{R}^2\mathrm{S} - \mathrm{M}\mu\left(\mathrm{R}\frac{dr}{dt} - r\frac{d\mathrm{R}}{dt}\right)\mathrm{Q} + \mathrm{M}\mu\mathrm{R}r\mathrm{T} \\ \qquad = \mathrm{A}\frac{d\alpha}{dt} + \mathrm{A}'\frac{d\beta}{dt} + \mathrm{A}''\frac{d\gamma}{dt}, \\ \mu(m+\mathrm{M})r^2\mathrm{T} + \mathrm{M}\mu\left(\mathrm{R}\frac{dr}{dt} - r\frac{d\mathrm{R}}{dt}\right)\mathrm{P} + \mathrm{M}\mu\mathrm{R}r\mathrm{S} \\ \qquad = \mathrm{A}\frac{d\xi}{dt} + \mathrm{A}'\frac{d\eta}{dt} + \mathrm{A}''\frac{d\zeta}{dt}. \end{cases}$$

On peut écrire la première de ces équations

$$\mathrm{M}(m+\mu)\mathrm{R}^2\mathrm{P} + \mathrm{M}\mu\frac{\mathrm{R}}{r}r^2\mathrm{Q} = \mathrm{A}\alpha + \mathrm{A}'\beta + \mathrm{A}''\gamma.$$

En la dérivant par rapport au temps et comparant à la troisième, on a

$$\mathrm{M}(m+\mu)\frac{d}{dt}(\mathrm{R}^2\mathrm{P}) + \mathrm{M}\mu\frac{\mathrm{R}}{r}\frac{d}{dt}(r^2\mathrm{Q}) + \mathrm{M}\mu\left(r\frac{d\mathrm{R}}{dt} - \mathrm{R}\frac{dr}{dt}\right)$$
$$= \mathrm{M}(m+\mu)\mathrm{R}^2\mathrm{S} - \mathrm{M}\mu\left(\mathrm{R}\frac{dr}{dt} - r\frac{d\mathrm{R}}{dt}\right) + \mathrm{M}\mu\mathrm{R}r\mathrm{T}$$

ou bien

$$(7)\qquad \mathrm{M}(m+\mu)\left[\frac{d}{dt}(\mathrm{R}^2\mathrm{P}) - \mathrm{R}^2\mathrm{S}\right] + \mathrm{M}\mu\frac{\mathrm{R}}{r}\left[\frac{d}{dt}(r^2\mathrm{Q}) - r^2\mathrm{T}\right] = 0.$$

On peut écrire de même la seconde des équations (6) :

$$\mu(m+\mathrm{M})r^2\mathrm{Q} + \mathrm{M}\mu\frac{r}{\mathrm{R}}\mathrm{R}^2\mathrm{P} = \mathrm{A}\xi + \mathrm{A}'\eta + \mathrm{A}''\zeta;$$

en la dérivant par rapport au temps et comparant à la quatrième, on a

$$\mu(m+\mathrm{M})\frac{d}{dt}(r^2\mathrm{Q}) + \mathrm{M}\mu\left(\mathrm{R}\frac{dr}{dt} - r\frac{d\mathrm{R}}{dt}\right)\mathrm{P} + \mathrm{M}\mu\frac{r}{\mathrm{R}}\frac{d}{dt}(\mathrm{R}^2\mathrm{P})$$
$$= \mu(m+\mathrm{M})r^2\mathrm{T} + \mathrm{M}\mu\left(\mathrm{R}\frac{dr}{dt} - r\frac{d\mathrm{R}}{dt}\right)\mathrm{P} + \mathrm{M}\mu\mathrm{R}r\mathrm{S}$$

ou bien

$$(8)\qquad \mu(m+\mathrm{M})\left[\frac{d}{dt}(r^2\mathrm{Q}) - r^2\mathrm{T}\right] + \mathrm{M}\mu\frac{r}{\mathrm{R}}\left[\frac{d}{dt}(\mathrm{R}^2\mathrm{P}) - \mathrm{R}^2\mathrm{S}\right] = 0.$$

Des équations (7) et (8) on tire séparément

$$(9)\qquad \frac{d}{dt}(\mathrm{R}^2\mathrm{P}) = \mathrm{R}^2\mathrm{S},\qquad \frac{d}{dt}(r^2\mathrm{Q}) = r^2\mathrm{T},$$

ou encore

$$(10)\qquad \begin{cases} 2\mathrm{P}\dfrac{d\mathrm{R}}{dt} + \mathrm{R}\left(\dfrac{d\mathrm{P}}{dt} - \mathrm{S}\right) = 0, \\ 2\mathrm{Q}\dfrac{dr}{dt} + r\left(\dfrac{d\mathrm{Q}}{dt} - \mathrm{T}\right) = 0. \end{cases}$$

Je vais maintenant écrire les équations de mouvement de chaque point; ce sont

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{d^2 x}{dt^2} &= +\frac{\mu}{r^2}\alpha + \frac{M}{R^2}\xi,\\
\frac{d^2 y}{dt^2} &= +\frac{\mu}{r^2}\beta + \frac{M}{R^2}\eta,\\
\frac{d^2 z}{dt^2} &= +\frac{\mu}{r^2}\gamma + \frac{M}{R^2}\zeta,\\
\frac{d^2 x'}{dt^2} &= -\frac{m}{R^2}\xi + \frac{\mu}{\rho^2}\varphi,\\
\frac{d^2 y'}{dt^2} &= -\frac{m}{R^2}\eta + \frac{\mu}{\rho^2}\psi,\\
\frac{d^2 z'}{dt^2} &= -\frac{m}{R^2}\zeta + \frac{\mu}{\rho^2}\chi,\\
\frac{d^2 x''}{dt^2} &= -\frac{m}{r^2}\alpha - \frac{M}{\rho^2}\varphi,\\
\frac{d^2 y''}{dt^2} &= -\frac{m}{r^2}\beta - \frac{M}{\rho^2}\psi,\\
\frac{d^2 z''}{dt^2} &= -\frac{m}{r^2}\gamma - \frac{M}{\rho^2}\chi,
\end{aligned}\right.$$

dans lesquelles φ, ψ, χ sont les cosinus directeurs de SL; c'est-à-dire qu'on a

$$\varphi = \frac{r\alpha - R\xi}{\rho},\qquad \psi = \frac{r\beta - R\eta}{\rho},\qquad \chi = \frac{r\gamma - R\zeta}{\rho}.$$

On en tire

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{d^2 R\xi}{dt^2} &= -\frac{M+m}{R^2}\xi + \frac{\mu}{\rho^2}\varphi - \frac{\mu}{r^2}\alpha,\\
\frac{d^2 R\eta}{dt^2} &= -\frac{M+m}{R^2}\eta + \frac{\mu}{\rho^2}\psi - \frac{\mu}{r^2}\beta,\\
\frac{d^2 R\zeta}{dt^2} &= -\frac{M+m}{R^2}\zeta + \frac{\mu}{\rho^2}\chi - \frac{\mu}{r^2}\gamma,
\end{aligned}\right.$$

et

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{d^2 r\alpha}{dt^2} &= -\frac{m+\mu}{r^2}\alpha - \frac{M}{\rho^2}\varphi - \frac{M}{R^2}\xi,\\
\frac{d^2 r\beta}{dt^2} &= -\frac{m+\mu}{r^2}\beta - \frac{M}{\rho^2}\psi - \frac{M}{R^2}\eta,\\
\frac{d^2 r\gamma}{dt^2} &= -\frac{m+\mu}{r^2}\gamma - \frac{M}{\rho^2}\chi - \frac{M}{R^2}\zeta.
\end{aligned}\right.$$

Les équations (10) sont les combinaisons obtenues en multipliant les équations (12) respectivement par $\beta\zeta - \gamma\eta$, $\gamma\xi - \alpha\zeta$, $\alpha\eta - \beta\xi$ et ajoutant, et faisant la même chose pour les équations (13).

Multiplions maintenant les équations (12) par ξ, η, ζ et ajoutons; on aura

$$(14)\qquad \frac{d^2 R}{dt^2} + R\left(\xi\frac{d^2\xi}{dt^2} + \eta\frac{d^2\eta}{dt^2} + \zeta\frac{d^2\zeta}{dt^2}\right) = -\left(\frac{M+m}{R^2} + \frac{\mu R}{\rho^3}\right) + \left(\frac{\mu r}{\rho^3} - \frac{\mu}{r^2}\right)\cos STL.$$

Multiplions-les par α, β, γ et ajoutons; on aura

$$(15)\qquad \begin{aligned} &\frac{d^2 R}{dt^2}\cos STL + 2\frac{dR}{dt}\left(\alpha\frac{d\xi}{dt} + \beta\frac{d\eta}{dt} + \gamma\frac{d\zeta}{dt}\right) \\ &\quad + R\left(\alpha\frac{d^2\xi}{dt^2} + \beta\frac{d^2\eta}{dt^2} + \gamma\frac{d^2\zeta}{dt^2}\right) \\ &\quad = -\left(\frac{M+m}{R^2} + \frac{\mu R}{\rho^3}\right)\cos STL + \left(\frac{\mu r}{\rho^3} - \frac{\mu}{r^2}\right). \end{aligned}$$

En tenant compte de la première des équations (10) et de l'équation obtenue en la dérivant par rapport au temps, on voit que l'on pourra tirer des équations (14) et (15) les suivantes,

$$(16)\qquad \frac{M+m}{R^3} + \frac{\mu}{\rho^3} = H, \qquad \mu\left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{r^3}\right) = H'\frac{R}{r},$$

où H et H′ ne dépendent que des quantités α, β, γ, ξ, η, ζ et de leurs dérivées premières, secondes et troisièmes.

On tirera de même des équations (13) les suivantes,

$$(17)\qquad \frac{m+\mu}{r^3} + \frac{M}{\rho^3} = L, \qquad M\left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{R^3}\right) = L'\frac{r}{R},$$

où L et L′ ne dépendent que de α, β, γ, ξ, η, ζ et de leurs dérivées des trois premiers ordres.

Il est aisé de tirer des équations (10), (16) et (17) la solution de la question qui fait l'objet de la deuxième Partie du Mémoire, c'est-à-dire la détermination des masses et des distances.

Retranchons les deux équations (16); on aura

$$(18)\qquad \frac{M+m}{R^3} + \frac{\mu}{r^3} = H - H'\frac{R}{r}.$$

Si l'on dérive cette équation et qu'on se serve des équations (10), on obtiendra une nouvelle équation du premier degré dans les quantités

$$\frac{M+m}{R^3}, \quad \frac{\mu}{r^3}, \quad \frac{R}{r}.$$

En opérant de même sur cette nouvelle équation, on en obtiendra une seconde, et l'on aura alors trois équations du premier degré qui fourniront les quantités précédentes.

En retranchant les deux équations (17), on aura de même

(19) $$\frac{m+\mu}{r^3} + \frac{M}{R^3} = L - L'\frac{r}{R}.$$

En la traitant comme l'équation (18), on en tirera les quantités

$$\frac{m+\mu}{r^3}, \quad \frac{M}{R^3}, \quad \frac{r}{R}.$$

On obtiendra donc les rapports

$$\frac{M+m}{M}, \quad \frac{m+\mu}{\mu}, \quad \frac{r}{R}, \quad \frac{M}{R^3},$$

ce que l'on se proposait de faire.

La méthode précédente est rigoureuse; elle est un peu longue. On pourrait certainement la simplifier en tenant compte des grandeurs relatives des éléments à déterminer et en se servant de l'équation

(20) $$\rho^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos STL.$$

Par exemple, les équations (16) et (17) deviennent sensiblement

$$\frac{M}{R^3} = H, \qquad -\frac{\mu}{r^3} = H'\frac{R}{r}, \qquad \frac{m+\mu}{r^3} + \frac{M}{R^3}\left(1 + 3\cos STL\frac{r}{R}\right) = L,$$

$$\frac{M}{R^3}\left[3\cos STL + \frac{3}{2}(5\cos^2 STL - 1)\frac{r}{R}\right] = L'.$$

La première fournit $\frac{M}{R^3}$, la quatrième $\frac{r}{R}$, la seconde $\frac{\mu}{r^3}$ et la troisième $\frac{m}{r^3}$. On pourrait ensuite tenir compte des termes négligés.

TROISIÈME PARTIE.

I. Cette Partie est consacrée à l'exposé de la méthode de résolution du problème des trois corps qui consiste à chercher les mouvements du Soleil et de la Lune relativement à la Terre.

Cette méthode, ainsi qu'on le verra, présente, dans sa nature, une très grande ressemblance avec celle de Lagrange. La méthode de Lagrange n'a rien donné, d'abord parce qu'elle contient une inconnue auxiliaire qui est fournie par une équation du quatrième degré, ce qui revient à dire qu'on ne peut l'obtenir. On est alors conduit à substituer à cette équation du quatrième degré l'équation différentielle à laquelle satisfait l'inconnue, ce qui élève d'une unité le degré du système différentiel. Cela ne serait pas un grand inconvénient, mais la vérité est que le système Terre, Soleil, Lune est très mal déterminé par les distances mutuelles. On est alors amené à substituer l'angle STL à la distance SL; mais la transformation des équations de Lagrange serait alors longue et pénible, et il vaut mieux traiter le problème ainsi posé directement [1].

La méthode que je vais exposer consiste à se servir des formules déjà obtenues dans la deuxième Partie et est très rapide. J'ai posé

$$(1)\quad \left\{ \begin{array}{ll} \begin{vmatrix} \alpha & \xi & \dfrac{d\xi}{dt} \\ \beta & \eta & \dfrac{d\eta}{dt} \\ \gamma & \zeta & \dfrac{d\zeta}{dt} \end{vmatrix} = \mathrm{P}, & \begin{vmatrix} \xi & \alpha & \dfrac{d\alpha}{dt} \\ \eta & \beta & \dfrac{d\beta}{dt} \\ \zeta & \gamma & \dfrac{d\gamma}{dt} \end{vmatrix} = \mathrm{Q}, \\ \begin{vmatrix} \alpha & \dfrac{d\alpha}{dt} & \dfrac{d\xi}{dt} \\ \beta & \dfrac{d\beta}{dt} & \dfrac{d\eta}{dt} \\ \gamma & \dfrac{d\gamma}{dt} & \dfrac{d\zeta}{dt} \end{vmatrix} = \mathrm{T}, & \begin{vmatrix} \xi & \dfrac{d\xi}{dt} & \dfrac{d\alpha}{dt} \\ \eta & \dfrac{d\eta}{dt} & \dfrac{d\beta}{dt} \\ \zeta & \dfrac{d\zeta}{dt} & \dfrac{d\gamma}{dt} \end{vmatrix} = \mathrm{S}. \end{array} \right.$$

---

[1] C'est cette modification que j'avais en vue quand j'ai publié sur le problème des trois corps une courte Note insérée au *Bulletin astronomique*, octobre 1898.

Je poserai de plus

$$(2)\quad \cos V = \alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta, \quad \alpha\frac{d\xi}{dt} + \beta\frac{d\eta}{dt} + \gamma\frac{d\zeta}{dt} = X, \quad \xi\frac{d\alpha}{dt} + \eta\frac{d\beta}{dt} + \zeta\frac{d\gamma}{dt} = Y.$$

L'angle V n'est autre chose que l'angle STL.

Écrivons les équations

$$\begin{aligned}
(\beta\zeta - \gamma\eta)\frac{d\xi}{dt} + (\gamma\xi - \alpha\zeta)\frac{d\eta}{dt} + (\alpha\eta - \beta\xi)\frac{d\zeta}{dt} &= P,\\
\xi\frac{d\xi}{dt} + \eta\frac{d\eta}{dt} + \zeta\frac{d\zeta}{dt} &= 0,\\
\alpha\frac{d\xi}{dt} + \beta\frac{d\eta}{dt} + \gamma\frac{d\zeta}{dt} &= X.
\end{aligned}$$

On en tire

$$(3)\quad \begin{cases}
\sin^2 V\dfrac{d\xi}{dt} = (\beta\zeta - \gamma\eta)P + (\alpha - \xi\cos V)X,\\[2mm]
\sin^2 V\dfrac{d\eta}{dt} = (\gamma\xi - \alpha\zeta)P + (\beta - \eta\cos V)X,\\[2mm]
\sin^2 V\dfrac{d\zeta}{dt} = (\alpha\eta - \beta\xi)P + (\gamma - \zeta\cos V)X.
\end{cases}$$

On a de même

$$\begin{aligned}
(\beta\zeta - \gamma\eta)\frac{d\alpha}{dt} + (\gamma\xi - \alpha\zeta)\frac{d\beta}{dt} + (\alpha\eta - \beta\xi)\frac{d\gamma}{dt} &= -Q,\\
\alpha\frac{d\alpha}{dt} + \beta\frac{d\beta}{dt} + \gamma\frac{d\gamma}{dt} &= 0,\\
\xi\frac{d\alpha}{dt} + \eta\frac{d\beta}{dt} + \zeta\frac{d\gamma}{dt} &= Y.
\end{aligned}$$

On en tire

$$(4)\quad \begin{cases}
\sin^2 V\dfrac{d\alpha}{dt} = -(\beta\zeta - \gamma\eta)Q + (\xi - \alpha\cos V)Y,\\[2mm]
\sin^2 V\dfrac{d\beta}{dt} = -(\gamma\xi - \alpha\zeta)Q + (\eta - \beta\cos V)Y,\\[2mm]
\sin^2 V\dfrac{d\gamma}{dt} = -(\alpha\eta - \beta\xi)Q + (\zeta - \gamma\cos V)Y.
\end{cases}$$

On tire aussi des valeurs de P, Q, S, T les formules

$$\alpha S + \xi T - \frac{d\xi}{dt} Q - \frac{d\alpha}{dt} P = 0,$$

$$\beta S + \eta T - \frac{d\eta}{dt} Q - \frac{d\beta}{dt} P = 0,$$

$$\gamma S + \zeta T - \frac{d\zeta}{dt} Q - \frac{d\gamma}{dt} P = 0;$$

d'où

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} & S + T\cos V - QX = 0, \qquad S = \frac{QX - PY\cos V}{\sin^2 V}, \\ & T + S\cos V - PY = 0, \qquad T = \frac{PY - QX\cos V}{\sin^2 V}. \end{aligned} \right.$$

Écrivons de nouveau les équations déjà vues dans la deuxième Partie :

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} & 2P\frac{dR}{dt} + R\left(\frac{dP}{dt} - S\right) = 0, \\ & 2Q\frac{dr}{dt} + r\left(\frac{dQ}{dt} - T\right) = 0, \end{aligned} \right.$$

puis

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \frac{d^2R}{dt^2} - R\left(\frac{d\xi^2}{dt^2} + \frac{d\eta^2}{dt^2} + \frac{d\zeta^2}{dt^2}\right) = -\left(\frac{M+m}{R^2} + \frac{\mu R}{\rho^3}\right) + \mu\left(\frac{r}{\rho^3} - \frac{1}{r^2}\right)\cos V, \\ & \frac{d^2R}{dt^2}\cos V + 2\frac{dR}{dt}X + R\left(\frac{dX}{dt} - \frac{d\alpha}{dt}\frac{d\xi}{dt} - \frac{d\beta}{dt}\frac{d\eta}{dt} - \frac{d\gamma}{dt}\frac{d\zeta}{dt}\right) \\ & \qquad = -\left(\frac{M+m}{R^2} + \frac{\mu R}{\rho^3}\right)\cos V + \mu\left(\frac{r}{\rho^3} - \frac{1}{r^2}\right), \\ & \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\alpha^2}{dt^2} + \frac{d\beta^2}{dt^2} + \frac{d\gamma^2}{dt^2}\right) = -\left(\frac{m+\mu}{r^2} + \frac{Mr}{\rho^3}\right) + M\left(\frac{R}{\rho^3} - \frac{1}{R^2}\right)\cos V, \\ & \frac{d^2r}{dt^3}\cos V + 2\frac{dr}{dt}Y + r\left(\frac{dY}{dt} - \frac{d\alpha}{dt}\frac{d\xi}{dt} - \frac{d\beta}{dt}\frac{d\eta}{dt} - \frac{d\gamma}{dt}\frac{d\zeta}{dt}\right) \\ & \qquad = -\left(\frac{m+\mu}{r^2} + \frac{Mr}{\rho^3}\right)\cos V + M\left(\frac{R}{\rho^3} - \frac{1}{R^2}\right). \end{aligned} \right.$$

On a, de plus,

$$(8) \qquad -\sin V\frac{dV}{dt} = X + Y.$$

Des équations (3) et (4) on tire

$$(9)\quad \begin{cases} \sin^2 V\left(\dfrac{d\xi^2}{dt^2}+\dfrac{d\eta^2}{dt^2}+\dfrac{d\zeta^2}{dt^2}\right)=P^2+X^2,\\ \sin^2 V\left(\dfrac{d\alpha^2}{dt^2}+\dfrac{d\beta^2}{dt^2}+\dfrac{d\gamma^2}{dt^2}\right)=Q^2+Y^2,\\ \sin^2 V\left(\dfrac{d\xi}{dt}\dfrac{d\alpha}{dt}+\dfrac{d\eta}{dt}\dfrac{d\beta}{dt}+\dfrac{d\zeta}{dt}\dfrac{d\gamma}{dt}\right)=-PQ-XY\cos V.\end{cases}$$

Dans les équations (6) on remplacera S et T par leurs valeurs données par les équations (5). Dans la seconde des équations (7), on remplacera $\dfrac{d^2R}{dt^2}$ par sa valeur tirée de la première; de même, dans la quatrième, on remplacera $\dfrac{d^2r}{dt^2}$ par sa valeur tirée de la troisième et l'on aura le système suivant d'équations :

$$\frac{2P}{R}\frac{dR}{dt}+\frac{dP}{dt}=\frac{QX-PY\cos V}{\sin^2 V},$$

$$\frac{2Q}{r}\frac{dr}{dt}+\frac{dQ}{dt}=\frac{PY-QX\cos V}{\sin^2 V},$$

$$\frac{d^2R}{dt^2}=R\,\frac{P^2+X^2}{\sin^2 V}-\left(\frac{M+m}{R^2}+\frac{\mu R}{\rho^3}\right)+\mu\left(\frac{r}{\rho^3}-\frac{1}{r^2}\right)\cos V,$$

$$(10)\qquad R\frac{dX}{dt}+2\frac{dR}{dt}X+R\,\frac{PQ+XY\cos V}{\sin^2 V}+R\cos V\,\frac{P^2+X^2}{\sin^2 V}=\mu\left(\frac{r}{\rho^3}-\frac{1}{r^2}\right)\sin^2 V,$$

$$\frac{d^2r}{dt^2}=r\,\frac{Q^2+Y^2}{\sin^2 V}-\left(\frac{m+\mu}{r^2}+\frac{Mr}{\rho^3}\right)+M\left(\frac{R}{\rho^3}-\frac{1}{R^2}\right)\cos V,$$

$$r\frac{dY}{dt}+2\frac{dr}{dt}Y+r\,\frac{PQ+XY\cos V}{\sin^2 V}+r\cos V\,\frac{Q^2+Y^2}{\sin^2 V}=M\left(\frac{R}{\rho^3}-\frac{1}{R^2}\right)\sin^2 V,$$

$$-\sin V\,\frac{dV}{dt}=X+Y.$$

Ces équations constituent un système d'équations différentielles du 9e ordre aux fonctions inconnues P, Q, X, Y, V, R, r. Ce système réalise sur celui de Lagrange un perfectionnement, puisqu'il n'y a pas d'équation algébrique à résoudre.

11. Je fais former l'équation des aires et celle des forces vives qui théoriquement ramènent ce système au 6e ordre.

Si, dans la troisième des équations (6) de la deuxième Partie, on remplace $\frac{d\alpha}{dt}$, $\frac{d\beta}{dt}$, $\frac{d\gamma}{dt}$ par leurs valeurs données par les formules (4), puis qu'on utilise les deux premières formules (6) de la deuxième Partie, on obtient l'équation

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}(m+\mu)\mathrm{R}^2\mathrm{S} - \mathrm{M}\mu\left(\mathrm{R}\frac{dr}{dt} - r\frac{d\mathrm{R}}{dt}\right) + \mathrm{M}\mu\mathrm{R}r\mathrm{T} \\
= -\frac{\mathrm{Q}}{\sin^2\mathrm{V}}[\mathrm{A}(\beta\zeta-\gamma\eta) + \mathrm{A}'(\gamma\xi-\alpha\zeta) + \mathrm{A}''(\alpha\eta-\beta\xi)] \\
+ \frac{\mathrm{Y}}{\sin^2\mathrm{V}}[\mu(m+\mathrm{M})r^2\mathrm{Q} + \mathrm{M}\mu\mathrm{R}r\mathrm{P}] \\
- \frac{\mathrm{Y}\cos\mathrm{V}}{\sin^2\mathrm{V}}[\mathrm{M}(m+\mu)\mathrm{R}^2\mathrm{P} + \mathrm{M}\mu\mathrm{R}r\mathrm{Q}].
\end{aligned}$$

En remplaçant dans cette équation S et T par leurs valeurs données par les formules (5), il vient après réductions

$$\begin{aligned}
(11)\quad [\mu(m+\mathrm{M})r^2 - \mathrm{M}\mu\mathrm{R}r\cos\mathrm{V}]\mathrm{Y} - [\mathrm{M}(m+\mu)r^2 - \mathrm{M}\mu\mathrm{R}r\cos\mathrm{V}]\mathrm{X} \\
+ \mathrm{M}\mu\left(\mathrm{R}\frac{dr}{dt} - r\frac{d\mathrm{R}}{dt}\right)\sin^2\mathrm{V} \\
= \mathrm{A}(\beta\zeta-\gamma\eta) + \mathrm{A}'(\gamma\xi-\alpha\zeta) + \mathrm{A}''(\alpha\eta-\beta\xi).
\end{aligned}$$

On pourrait former cette équation, mais moins rapidement, à l'aide de l'équation (5) de la deuxième Partie et des deux équations analogues. On multiplierait l'équation (5) par $\beta\zeta-\gamma\eta$, les deux analogues respectivement par $\gamma\xi-\alpha\zeta$ et $\alpha\eta-\beta\xi$ et l'on ajouterait.

Désignons maintenant par I, I', I'' les premiers membres de l'équation (11) et des deux premières équations (6) de la deuxième Partie; on en déduira

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned}
\mathrm{A}\sin^2\mathrm{V} &= \mathrm{I}(\beta\zeta-\gamma\eta) + \mathrm{I}'(\alpha-\xi\cos\mathrm{V}) + \mathrm{I}''(\xi-\alpha\cos\mathrm{V}),\\
\mathrm{A}'\sin^2\mathrm{V} &= \mathrm{I}(\gamma\xi-\alpha\zeta) + \mathrm{I}'(\beta-\eta\cos\mathrm{V}) + \mathrm{I}''(\eta-\beta\cos\mathrm{V}),\\
\mathrm{A}''\sin^2\mathrm{V} &= \mathrm{I}(\alpha\eta-\beta\xi) + \mathrm{I}'(\gamma-\zeta\cos\mathrm{V}) + \mathrm{I}''(\zeta-\gamma\cos\mathrm{V}).
\end{aligned}\right.$$

En élevant ces équations au carré et posant

$$\mathrm{G}^2 = \mathrm{A}^2 + \mathrm{A}'^2 + \mathrm{A}''^2,$$

G étant une quantité positive, on aura

(13) $$G^2 \sin^2 V = I^2 - I'^2 + I''^2 - 2 I' I'' \cos V.$$

C'est l'équation des aires.

Je vais maintenant former celle des forces vives, dans le mouvement relatif au centre de gravité. C'est

$$m\left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}\right) + M\left(\frac{dx'^2}{dt^2} + \frac{dy'^2}{dt^2} + \frac{dz'^2}{dt^2}\right) + \mu\left(\frac{dx''^2}{dt^2} + \frac{dy''^2}{dt^2} + \frac{dz''^2}{dt^2}\right)$$
$$= 2\left(\frac{m\mu}{r} + \frac{Mm}{R} + \frac{M\mu}{\rho}\right) + \text{const.}$$

ou bien

$$(m + M + \mu)\left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}\right) + 2\frac{dx}{dt}\left(M\frac{dR\xi}{dt} + \mu\frac{dr\alpha}{dt}\right)$$
$$+ 2\frac{dy}{dt}\left(M\frac{dR\eta}{dt} + \mu\frac{dr\beta}{dt}\right) + 2\frac{dz}{dt}\left(M\frac{dR\zeta}{dt} + \mu\frac{dr\gamma}{dt}\right)$$
$$+ M\left[\left(\frac{dR\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dR\eta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dR\zeta}{dt}\right)^2\right] + \mu\left[\left(\frac{dr\alpha}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr\beta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr\gamma}{dt}\right)^2\right]$$
$$= 2\left(\frac{m\mu}{r} + \frac{Mm}{R} + \frac{M\mu}{\rho}\right) + \text{const.},$$

ou bien, d'après les formules (4) de la deuxième Partie.

$$-\frac{1}{M + m + \mu}\left[\left(M\frac{dR\xi}{dt} + \mu\frac{dr\alpha}{dt}\right)^2 + \left(M\frac{dR\eta}{dt} + \mu\frac{dr\beta}{dt}\right)^2 + \left(M\frac{dR\zeta}{dt} + \mu\frac{dr\gamma}{dt}\right)^2\right]$$
$$+ M\left[\left(\frac{dR\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dR\eta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dR\zeta}{dt}\right)^2\right] + \mu\left[\left(\frac{dr\alpha}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr\beta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr\gamma}{dt}\right)^2\right]$$
$$= 2\left(\frac{m\mu}{r} + \frac{Mm}{R} + \frac{M\mu}{\rho}\right) + \text{const.},$$

ou bien

$$M(m + \mu)\left[\left(\frac{dR\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dR\eta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dR\zeta}{dt}\right)^2\right]$$
$$+ \mu(m + M)\left[\left(\frac{dr\alpha}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr\beta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr\gamma}{dt}\right)^2\right]$$
$$- 2M\mu\left(\frac{dR\xi}{dt}\frac{dr\alpha}{dt} + \frac{dR\eta}{dt}\frac{dr\beta}{dt} + \frac{dR\zeta}{dt}\frac{dr\gamma}{dt}\right)$$
$$= 2(M + m + \mu)\left(\frac{m\mu}{r} + \frac{Mm}{R} + \frac{M\mu}{\rho}\right) + h,$$

h désignant une constante. En développant cette équation, on a finalement

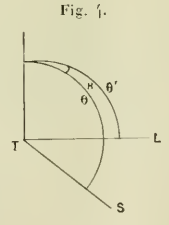
$$\mathrm{M}(m+\mu)\left[\frac{d\mathrm{R}^2}{dt^2}+\mathrm{R}^2\left(\frac{d\xi^2}{dt^2}+\frac{d\eta^2}{dt^2}+\frac{d\zeta^2}{dt^2}\right)\right]$$
$$+\mu(m+\mathrm{M})\left[\frac{dr^2}{dt^2}+r^2\left(\frac{d\alpha^2}{dt^2}+\frac{d\beta^2}{dt^2}+\frac{d\gamma^2}{dt^2}\right)\right]$$
$$-2\mathrm{M}\mu\left[\frac{d\mathrm{R}}{dt}\frac{dr}{dt}\cos\mathrm{V}+\frac{d\mathrm{R}}{dt}r\mathrm{Y}+\frac{dr}{dt}\mathrm{R}\mathrm{X}+\mathrm{R}r\left(\frac{d\alpha}{dt}\frac{d\xi}{dt}+\frac{d\beta}{dt}\frac{d\eta}{dt}+\frac{d\gamma}{dt}\frac{d\zeta}{dt}\right)\right]$$
$$=2(\mathrm{M}+m+\mu)\left(\frac{m\mu}{r}+\frac{\mathrm{M}m}{\mathrm{R}}+\frac{\mathrm{M}\mu}{\rho}\right)+h,$$

ou bien, d'après les formules (9),

$$(14)\quad \mathrm{M}(m+\mu)\left(\frac{d\mathrm{R}^2}{dt^2}+\mathrm{R}^2\frac{\mathrm{P}^2+\mathrm{X}^2}{\sin^2\mathrm{V}}\right)+\mu(m+\mathrm{M})\left(\frac{dr^2}{dt^2}+r^2\frac{\mathrm{Q}^2+\mathrm{Y}^2}{\sin^2\mathrm{V}}\right)$$
$$-2\mathrm{M}\mu\left(\frac{d\mathrm{R}}{dt}\frac{dr}{dt}\cos\mathrm{V}+\frac{d\mathrm{R}}{dt}r\mathrm{Y}+\frac{dr}{dt}\mathrm{R}\mathrm{X}-\mathrm{R}r\frac{\mathrm{PQ}+\mathrm{XY}\cos\mathrm{V}}{\sin^2\mathrm{V}}\right)$$
$$=2(\mathrm{M}+m+\mu)\left(\frac{m\mu}{r}+\frac{\mathrm{M}m}{\mathrm{R}}+\frac{\mathrm{M}\mu}{\rho}\right)+h.$$

III. Je vais maintenant appliquer aux équations (10) la méthode d'intégration fondée sur la considération d'orbites elliptiques variables képlériennes.

Fig. 4.



Les quantités P, Q, X, Y, R, r, V ne dépendent que des positions relatives du système formé par le Soleil, la Terre et la Lune.

Si j'imagine alors par la Terre les plans des orbites elliptiques décrites à chaque instant par le Soleil et la Lune, j'aurai la figure ci-jointe et je puis calculer les quantités P, Q, x, y, V en supposant que les plans des orbites sont fixes dans l'espace. Je prendrai alors

pour un instant la ligne d'intersection pour axe des z; je désignerai par φ et φ' les angles supposés constants que font les traces des orbites avec l'axe des x; j'aurai

$$\begin{array}{lll} \xi = \sin\theta\cos\varphi, & \alpha = \sin\theta'\cos\varphi', & \dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{C}{R^2}, \\ \eta = \sin\theta\sin\varphi, & \beta = \sin\theta'\sin\varphi', & \dfrac{d\theta'}{dt} = \dfrac{C'}{r^2}, \\ \zeta = \cos\theta, & \gamma = \cos\theta', & \end{array}$$

θ et θ' étant les angles de longitude que font dans leurs orbites le Soleil et la Lune, angles comptés à partir de l'intersection; C et C' étant les intégrales des aires relatives la première au Soleil, la seconde à la Lune. Je désignerai par H l'angle aigu des deux orbites, et l'on a

$$\varphi' - \varphi = H.$$

$$\begin{array}{ll} \dfrac{d\xi}{dt} = \cos\theta\cos\varphi\dfrac{C}{R^2}, & \dfrac{d\alpha}{dt} = \cos\theta'\cos\varphi'\dfrac{C'}{r^2}, \\ \dfrac{d\eta}{dt} = \cos\theta\sin\varphi\dfrac{C}{R^2}, & \dfrac{d\beta}{dt} = \cos\theta'\sin\varphi'\dfrac{C'}{r^2}, \\ \dfrac{d\zeta}{dt} = -\sin\theta\dfrac{C}{R^2}, & \dfrac{d\gamma}{dt} = -\sin\theta'\dfrac{C'}{r^2}; \end{array}$$

et par suite

$$P = \begin{vmatrix} \sin\theta'\cos\varphi' & \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta'\sin\varphi' & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta' & \cos\theta & -\sin\theta \end{vmatrix} \frac{C}{R^2} = \sin\theta'\sin H\frac{C}{R^2},$$

$$Q = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta'\cos\varphi' & \cos\theta'\cos\varphi' \\ \sin\theta\sin\varphi & \sin\theta'\sin\varphi' & \cos\theta'\sin\varphi' \\ \cos\theta & \cos\theta' & -\sin\theta' \end{vmatrix} \frac{C'}{r^2} = -\sin\theta\sin H\frac{C'}{r^2};$$

$$X = -(\cos\theta'\sin\theta - \cos\theta\sin\theta'\cos H)\frac{C}{R^2},$$

$$Y = -(\cos\theta\sin\theta' - \sin\theta\cos\theta'\cos H)\frac{C'}{r^2},$$

$$\cos V = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos H.$$

Si le raisonnement précédent, qui s'appuie sur le fait que dans le

changement qui consiste à introduire les variables képlériennes, les dérivées des coordonnées restent les mêmes par hypothèse que si les orbites étaient fixes et décrites suivant la loi des aires, paraît un peu délicat, on peut simplement dire qu'on substitue aux variables P, Q, x, y, V les nouvelles C, C′, θ, θ', H définies par les formules

$$(15)\quad \begin{cases} P = \sin\theta' \sin H \dfrac{C}{R^2}, & X = -(\cos\theta' \sin\theta - \cos\theta \sin\theta' \cos H)\dfrac{C}{R^2}, \\ Q = -\sin\theta \sin H \dfrac{C'}{r^2}, & Y = -(\cos\theta \sin\theta' - \cos\theta' \sin\theta \cos H)\dfrac{C'}{r^2}, \\ \cos V = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos H. \end{cases}$$

Je remarquerai encore que, dans ces formules, la permutation des éléments des orbites change H en $-$ H.

Dans le triangle sphérique précédent, introduisons les angles Θ et Θ' opposés aux côtés θ et θ'; on aura

$$X = -\sin V \cos\Theta' \frac{C}{R^2}, \qquad Y = -\sin V \cos\Theta \frac{C'}{r^2},$$

d'où

$$\begin{aligned} QX - PY\cos V &= \frac{CC'}{R^2 r^2}\sin\theta \sin H \sin V \cos\Theta' + \frac{CC'}{R^2 r^2}\sin\theta' \sin H \sin V \cos\Theta \cos V \\ &= \frac{CC'}{R^2 r^2}\sin^2 V(\cos\Theta' \sin\Theta + \cos\Theta \sin\Theta' \cos V) \\ &= \frac{CC'}{R^2 r^2}\sin H \cos\theta' \sin^2 V, \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} PY - QX\cos V &= -\frac{CC'}{R^2 r^2}\sin\theta' \sin H \sin V \cos\Theta - \frac{CC'}{R^2 r^2}\sin\theta \sin H \cos\Theta \cos V \sin V \\ &= -\frac{CC'}{R^2 r^2}\sin^2 V(\cos\Theta \sin\Theta' + \cos\Theta' \sin\Theta \cos V) \\ &= -\frac{CC'}{R^2 r^2}\sin H \cos\theta \sin^2 V. \end{aligned}$$

On aura aussi

$$\frac{P^2 + X^2}{\sin^2 V} = \frac{C^2}{R^4}, \qquad \frac{Q^2 + Y^2}{\sin^2 V} = \frac{C'^2}{r^4}$$

et

$$\frac{PQ + XY\cos V}{\sin^2 V} = \frac{CC'}{R^2 r^2}(-\sin\Theta\sin\Theta' + \cos\Theta\cos\Theta'\cos V)$$

$$= \frac{CC'}{R^2 r^2}[-\sin\Theta\sin\Theta' + \cos V(-\cos H + \sin\Theta\sin\Theta'\cos V)]$$

$$= -\frac{CC'}{R^2 r^2}(\cos H\cos V + \sin\Theta\sin\Theta'\sin^2 V)$$

$$= -\frac{CC'}{R^2 r^2}[\cos H(\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos H) + \sin\theta\sin\theta'\sin^2 H]$$

$$= -\frac{CC'}{R^2 r^2}(\sin\theta\sin\theta' + \cos\theta\cos\theta'\cos H).$$

Réunissons ces dernières formules

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{QX - PY\cos V}{\sin^2 V} &= \frac{CC'}{R^2 r^2}\sin H\cos\theta', \\ \frac{PY - QX\cos V}{\sin^2 V} &= -\frac{CC'}{R^2 r^2}\sin H\cos\theta, \\ \frac{P^2 + X^2}{\sin^2 V} = \frac{C^2}{R^4}, &\qquad \frac{Q^2 + Y^2}{\sin^2 V} = \frac{C'^2}{r^4}, \\ \frac{PQ + XY\cos V}{\sin^2 V} &= -\frac{CC'}{R^2 r^2}(\sin\theta\sin\theta' + \cos\theta\cos\theta'\cos H). \end{aligned}\right.$$

Je vais maintenant transformer les équations (10); la première peut s'écrire

$$\frac{d}{dt}(R^2 P) = \frac{QX - PY\cos V}{\sin^2 V}R^2,$$

ou bien

$$\frac{d}{dt}(R^2 P) = \frac{CC'}{r^2}\sin H\cos\theta',$$

ou bien

$$\frac{dC}{dt}\sin\theta'\sin H + C\cos\theta'\sin H\frac{d\theta'}{dt} + C\sin\theta'\cos H\frac{dH}{dt} = \frac{CC'}{r^2}\sin H\cos\theta',$$

ou enfin

$$(17)\quad \frac{1}{C}\frac{dC}{dt}\sin\theta'\sin H + \cos\theta'\sin H\left(\frac{d\theta'}{dt} - \frac{C'}{r^2}\right) + \sin\theta'\cos H\frac{dH}{dt} = 0.$$

La seconde peut de même s'écrire

$$\frac{d}{dt}(r^2 Q) = r^2 \frac{PY - QX\cos V}{\sin^2 V} = -\sin H \cos\theta \frac{CC'}{R^2},$$

ou bien

$$\frac{d}{dt}(\sin\theta \sin HC') = \sin H \cos\theta \frac{CC'}{R^2},$$

ou bien

$$(18) \qquad \frac{1}{C'}\frac{dC'}{dt}\sin\theta\sin H + \cos\theta\sin H\left(\frac{d\theta}{dt} - \frac{C}{R^2}\right) + \sin\theta\cos H\frac{dH}{dt} = 0.$$

La dernière est

$$(-\sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta'\cos H)\frac{d\theta}{dt}$$
$$+ (-\sin\theta'\cos\theta + \sin\theta\cos\theta'\cos H)\frac{d\theta'}{dt} - \sin\theta\sin\theta'\sin H\frac{dH}{dt}$$
$$= -(\cos\theta'\sin\theta - \cos\theta\sin\theta'\cos H)\frac{C}{R^2} - (\cos\theta\sin\theta' - \sin\theta\cos\theta'\cos H)\frac{C'}{r^2},$$

ou bien

$$(19) \quad \sin\theta\sin\theta'\sin H\frac{dH}{dt} + \sin V\cos\Theta'\left(\frac{d\theta}{dt} - \frac{C}{R^2}\right) + \sin V\cos\Theta\left(\frac{d\theta'}{dt} - \frac{C'}{r^2}\right) = 0.$$

Multiplions l'équation (19) par $\cos H$, et éliminons $\frac{dH}{dt}$ entre l'équation ainsi obtenue et (17). On aura

$$\sin\theta\sin H\left[-\frac{1}{C}\frac{dC}{dt}\sin\theta'\sin H - \cos\theta'\sin H\left(\frac{d\theta'}{dt} - \frac{C'}{r^2}\right)\right]$$
$$+ \cos H\sin V\cos\Theta'\left(\frac{d\theta}{dt} - \frac{C}{R^2}\right) + \cos H\sin V\cos\Theta\left(\frac{d\theta'}{dt} - \frac{C'}{r^2}\right) = 0,$$

ou bien

$$-\sin\theta\sin\theta'\sin^2 H\frac{dC}{dt}\frac{1}{C} + \cos H\sin V\cos\Theta'\left(\frac{d\theta}{dt} - \frac{C}{R^2}\right)$$
$$+ (\cos H\sin V\cos\Theta - \sin\theta\cos\theta'\sin^2 H)\left(\frac{d\theta'}{dt} - \frac{C'}{r^2}\right) = 0,$$

ou bien

$$-\sin\theta\sin\theta'\sin^2 H\frac{dC}{dt}\frac{1}{C} + \cos H\sin V\cos\Theta'\left(\frac{d\theta}{dt} - \frac{C}{R^2}\right)$$
$$+ (\cos H\sin V\cos\Theta - \cos\theta'\sin H\sin V\sin\Theta)\left(\frac{d\theta'}{dt} - \frac{C'}{r^2}\right) = 0,$$

ou bien

$$(20)\quad \sin\theta\sin\theta'\sin^2 H\,\frac{dC}{dt}\,\frac{1}{C} = \sin V\cos\Theta'\left[\cos H\left(\frac{d\theta}{dt}-\frac{C}{R^2}\right)-\left(\frac{d\theta'}{dt}-\frac{C'}{r^2}\right)\right].$$

Multiplions encore l'équation (19) par $\cos H$, et éliminons $\frac{dH}{dt}$ entre l'équation ainsi obtenue et (18). On aura

$$\sin\theta'\sin H\left[-\frac{1}{C'}\frac{dC'}{dt}\sin\theta\sin H-\cos\theta\sin H\left(\frac{d\theta}{dt}-\frac{C}{R^2}\right)\right]$$
$$+\cos H\sin V\cos\Theta'\left(\frac{d\theta}{dt}-\frac{C}{R^2}\right)+\sin V\cos\Theta\cos H\left(\frac{d\theta'}{dt}-\frac{C'}{r^2}\right)=0,$$

ou bien

$$-\frac{1}{C'}\frac{dC'}{dt}\sin\theta\sin\theta'\sin^2 H+\sin V\cos\Theta\cos H\left(\frac{d\theta'}{dt}-\frac{C'}{r^2}\right)$$
$$+(\cos H\sin V\cos\Theta'-\sin\theta'\cos\theta\sin^2 H)\left(\frac{d\theta}{dt}-\frac{C}{R^2}\right)=0,$$

ou bien

$$-\frac{1}{C'}\frac{dC'}{dt}\sin\theta\sin\theta'\sin^2 H+\sin V\cos\Theta\cos H\left(\frac{d\theta'}{dt}-\frac{C'}{r^2}\right)$$
$$+(\cos H\sin V\cos\Theta'-\cos\theta\sin H\sin\Theta'\sin V)\left(\frac{d\theta}{dt}-\frac{C}{R^2}\right)=0,$$

ou bien

$$(21)\quad \sin\theta\sin\theta'\sin^2 H\,\frac{1}{C'}\,\frac{dC'}{dt} = \sin V\cos\Theta\left[\cos H\left(\frac{d\theta'}{dt}-\frac{C'}{r^2}\right)-\left(\frac{d\theta}{dt}-\frac{C}{R^2}\right)\right].$$

Réunissons les équations (19), (20), (21). Ce sont

$$(19)\quad \sin\theta\sin\theta'\sin H\,\frac{dH}{dt} = -\sin V\cos\Theta'\left(\frac{d\theta}{dt}-\frac{C}{R^2}\right)-\sin V\cos\Theta\left(\frac{d\theta'}{dt}-\frac{C'}{r^2}\right),$$

$$(20)\quad \sin\theta\sin\theta'\sin^2 H\,\frac{dC}{dt}\,\frac{1}{C} = \sin V\cos\Theta'\left[\cos H\left(\frac{d\theta}{dt}-\frac{C}{R^2}\right)-\left(\frac{d\theta'}{dt}-\frac{C'}{r^2}\right)\right],$$

$$(21)\quad \sin\theta\sin\theta'\sin^2 H\,\frac{dC'}{dt}\,\frac{1}{C'} = \sin V\cos\Theta\left[\cos H\left(\frac{d\theta'}{dt}-\frac{C'}{r^2}\right)-\left(\frac{d\theta}{dt}-\frac{C}{R^2}\right)\right].$$

Prenons maintenant la quatrième des équations (10); elle peut

s'écrire

$$\frac{d}{dt}(\mathrm{R}^2\mathrm{X}) + \mathrm{R}^2\,\frac{\mathrm{PQ}+\mathrm{XY}\cos\mathrm{V}}{\sin^2\mathrm{V}} + \mathrm{R}^2\cos\mathrm{V}\,\frac{\mathrm{P}^2+\mathrm{X}^2}{\sin^2\mathrm{V}} = \mu\mathrm{R}\left(\frac{r}{\rho^3}-\frac{1}{r^2}\right)\sin^2\mathrm{V},$$

ou bien

$$\frac{d}{dt}(\mathrm{R}^2\mathrm{X}) - \frac{\mathrm{CC}'}{r^2}(\sin\theta\sin\theta'+\cos\theta\cos\theta'\cos\mathrm{H}) + \cos\mathrm{V}\,\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{R}^2} = \mu\mathrm{R}\left(\frac{r}{\rho^3}-\frac{1}{r^2}\right)\sin^2\mathrm{V}.$$

ou bien

$$\begin{aligned}&-\frac{d\mathrm{C}}{dt}\cos\Theta'\sin\mathrm{V} - \mathrm{C}\cos\mathrm{V}\,\frac{d\theta}{dt} + \mathrm{C}(\sin\theta\sin\theta'+\cos\theta\cos\theta'\cos\mathrm{H})\,\frac{d\theta'}{dt}\\ &-\cos\theta\sin\theta'\,\mathrm{C}\sin\mathrm{H}\,\frac{d\mathrm{H}}{dt} + \cos\mathrm{V}\,\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{R}^2} - \frac{\mathrm{CC}'}{r^2}(\sin\theta\sin\theta'+\cos\theta\cos\theta'\cos\mathrm{H})\\ &= \mu\mathrm{R}\left(\frac{r}{\rho^3}-\frac{1}{r^2}\right)\sin^2\mathrm{V},\end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned}&-\frac{d\mathrm{C}}{dt}\,\frac{1}{\mathrm{C}}\cos\Theta'\sin\mathrm{V} - (\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos\mathrm{H})\left(\frac{d\theta}{dt}-\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{R}^2}\right)\\ &+(\sin\theta\sin\theta'+\cos\theta\cos\theta'\cos\mathrm{H})\left(\frac{d\theta'}{dt}-\frac{\mathrm{C}'}{r^2}\right) - \cos\theta\sin\theta'\sin\mathrm{H}\,\frac{d\mathrm{H}}{dt}\\ &= \mu\mathrm{R}\left(\frac{r}{\rho^3}-\frac{1}{r^2}\right)\sin^2\mathrm{V},\end{aligned}$$

ou bien

$$(22)\qquad \begin{aligned}&-\frac{d\mathrm{C}}{dt}\,\frac{1}{\mathrm{C}}\cos\Theta'\sin\mathrm{V} + \cos\theta\cos\theta'\,\frac{\sin\theta\sin\theta'\sin^2\mathrm{H}}{\sin\mathrm{V}\cos\Theta}\,\frac{d\mathrm{C}'}{dt}\,\frac{1}{\mathrm{C}'}\\ &-\sin\theta\sin\theta'\,\frac{\sin\theta\sin\theta'\sin^2\mathrm{H}}{\sin\mathrm{V}\cos\Theta'}\,\frac{d\mathrm{C}}{dt}\,\frac{1}{\mathrm{C}} - \cos\theta\sin\theta'\sin\mathrm{H}\,\frac{d\mathrm{H}}{dt}\\ &= \mu\mathrm{R}\left(\frac{r}{\rho^3}-\frac{1}{r^2}\right)\sin^2\mathrm{V}.\end{aligned}$$

L'équation (19) peut encore s'écrire

$$\begin{aligned}\sin\theta\sin\theta'\sin\mathrm{H}\,\frac{d\mathrm{H}}{dt} = {} & (-\cos\theta'\sin\theta+\sin\theta'\cos\theta\cos\mathrm{H})\left(\frac{d\theta}{dt}-\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{R}^2}\right)\\ &+(-\cos\theta\sin\theta'+\sin\theta\cos\theta'\cos\mathrm{H})\left(\frac{d\theta'}{dt}-\frac{\mathrm{C}'}{r^2}\right),\end{aligned}$$

ou bien

$$\sin\theta\sin\theta'\sin H\frac{dH}{dt}=\sin\theta\cos\theta'\frac{\sin\theta\sin\theta'\sin^2 H}{\sin V\cos\Theta}\frac{dC'}{dt}\frac{1}{C'}+\sin\theta'\cos\theta\frac{\sin\theta\sin\theta'\sin^2 H}{\sin V\cos\Theta'}\frac{dC}{dt}\frac{1}{C},$$

ou bien

$$(23)\qquad \frac{dH}{dt}=\frac{\sin\theta\cos\theta'\sin H}{\sin V\cos\Theta}\frac{dC'}{dt}\frac{1}{C'}+\frac{\sin\theta'\cos\theta\sin H}{\sin V\cos\Theta'}\frac{dC}{dt}\frac{1}{C}.$$

En portant cette valeur de $\frac{dH}{dt}$ dans l'équation (22), elle devient

$$\begin{aligned}-\frac{dC}{dt}\frac{1}{C}\cos\Theta'\sin V&+\frac{\cos\theta\cos\theta'\sin\theta\sin\theta'\sin^2 H}{\sin V\cos\Theta}\frac{dC'}{dt}\frac{1}{C'}\\&-\frac{\sin^2\theta\sin^2\theta'\sin^2 H}{\sin V\cos\Theta'}\frac{dC}{dt}\frac{1}{C}\\&-\cos\theta\sin\theta'\sin H\frac{\sin\theta\cos\theta'\sin H}{\sin V\cos\Theta}\frac{dC'}{dt}\frac{1}{C'}\\&-\cos\theta\sin\theta'\sin H\frac{\sin\theta'\cos\theta\sin H}{\sin V\cos\Theta'}\frac{dC}{dt}\frac{1}{C}=\frac{\mu R}{C}\left(\frac{r}{\rho^3}-\frac{1}{r^2}\right)\sin^2 V,\end{aligned}$$

ou bien

$$-\frac{dC}{dt}\frac{1}{C}\cos\Theta'\sin V-\frac{\sin^2\theta'\sin^2 H}{\sin V\cos\Theta'}\frac{dC}{dt}\frac{1}{C}=\frac{\mu R}{C}\left(\frac{r}{\rho^3}-\frac{1}{r^2}\right)\sin^2 V,$$

ou bien

$$-\frac{dC}{dt}\frac{1}{C}\frac{1}{\sin V\cos\Theta'}(\cos^2\Theta'\sin^2 V+\sin^2\Theta'\sin^2 V)=\frac{\mu R}{C}\left(\frac{r}{\rho^3}-\frac{1}{r^2}\right)\sin^2 V,$$

ou enfin

$$(24)\qquad \frac{dC}{dt}=-\sin V\cos\Theta'\mu R\left(\frac{r}{\rho^3}-\frac{1}{r^2}\right).$$

En suivant identiquement la même marche, la sixième des équations (10) donnera

$$(25)\qquad \frac{dC'}{dt}=-\sin V\cos\Theta M r\left(\frac{R}{\rho^3}-\frac{1}{R^2}\right).$$

Des équations (20) et (21) on tire ensuite les valeurs de $\frac{d\theta}{dt}-\frac{C}{R^2}$, $\frac{d\theta'}{dt}-\frac{C'}{r^2}$; l'équation (23) fournit $\frac{dH}{dt}$, et on a finalement le système

d'équations

$$(26)\quad \begin{cases} \dfrac{dC}{dt} = -(\cos\theta'\sin\theta - \cos\theta\sin\theta'\cos H)\mu R\left(\dfrac{r}{\rho^3} - \dfrac{1}{r^2}\right), \\ \dfrac{dC'}{dt} = -(\cos\theta\sin\theta' - \cos\theta'\sin\theta\cos H) M r\left(\dfrac{R}{\rho^3} - \dfrac{1}{R^2}\right), \\ \dfrac{d\theta}{dt} - \dfrac{C}{R^2} = \sin\theta\sin\theta'\left[\cos H\,\dfrac{\mu R}{C}\left(\dfrac{r}{\rho^3} - \dfrac{1}{r^2}\right) + \dfrac{M r}{C'}\left(\dfrac{R}{\rho^3} - \dfrac{1}{R^2}\right)\right], \\ \dfrac{d\theta'}{dt} - \dfrac{C'}{r^2} = \sin\theta\sin\theta'\left[\dfrac{\mu R}{C}\left(\dfrac{r}{\rho^3} - \dfrac{1}{r^2}\right) + \cos H\,\dfrac{M r}{C'}\left(\dfrac{R}{\rho^3} - \dfrac{1}{R^2}\right)\right], \\ \dfrac{dH}{dt} = -\sin\theta\cos\theta'\sin H\,\dfrac{M r}{C'}\left(\dfrac{R}{\rho^3} - \dfrac{1}{R^2}\right) \\ \qquad\quad - \cos\theta\sin\theta'\sin H\,\dfrac{\mu R}{C}\left(\dfrac{r}{\rho^3} - \dfrac{1}{r^2}\right). \end{cases}$$

Pour terminer le changement de variables, nous poserons

$$(27)\quad \begin{cases} R = \dfrac{C^2}{M+m}\,\dfrac{1}{1+e\cos(\theta-\varpi)}, & r = \dfrac{C'^2}{m+\mu}\,\dfrac{1}{1+e'\cos(\theta'-\varpi')}, \\ \dfrac{dR}{dt} = \dfrac{M+m}{C}\,e\sin(\theta-\varpi), & \dfrac{dr}{dt} = \dfrac{m+\mu}{C'}\,e'\sin(\theta'-\varpi'). \end{cases}$$

Je vais d'abord m'occuper de R. J'ai d'abord à écrire que la dérivée de R est toujours la valeur de $\dfrac{dR}{dt}$ écrite en dessous dans les formules (27). On obtiendra l'équation

$$\begin{aligned} &2C\frac{dC}{dt}\,\frac{1}{M+m}\,\frac{1}{1+e\cos(\theta-\varpi)} \\ &\quad - \frac{C^2}{M+m}\,\frac{1}{[1+e\cos(\theta-\varpi)]^2}\left[\frac{de}{dt}\cos(\theta-\varpi) - e\sin(\theta-\varpi)\left(\frac{d\theta}{dt} - \frac{d\varpi}{dt}\right)\right] \\ &= \frac{M+m}{C}\,e\sin(\theta-\varpi), \end{aligned}$$

ou bien, en chassant les dénominateurs,

$$\begin{aligned} &2C\frac{dC}{dt}[1+e\cos(\theta-\varpi)] \\ &\quad - C^2\left[\frac{de}{dt}\cos(\theta-\varpi) - e\sin(\theta-\varpi)\left(\frac{d\theta}{dt} - \frac{d\varpi}{dt}\right)\right] = \frac{C^3}{R^2}\,e\sin(\theta-\varpi), \end{aligned}$$

ou encore

$$(28)\qquad \frac{de}{dt}\cos(\vartheta - \varpi) - e\sin(\vartheta - \varpi)\left(\frac{d\vartheta}{dt} - \frac{C}{R^2} - \frac{d\varpi}{dt}\right) = 2\frac{dC}{dt}\frac{1}{C}[1 + e\cos(\vartheta - \varpi)].$$

Formons maintenant la troisième des équations (10); c'est

$$\frac{d^2R}{dt^2} - R\frac{P^2 + X^2}{\sin^2 V} + \frac{M+m}{R^2} = -\frac{\mu R}{\rho^3} + \mu\left(\frac{r}{\rho^3} - \frac{1}{r^2}\right)\cos V.$$

Elle devient

$$\begin{aligned} &-\frac{M+m}{C^2}\frac{dC}{dt}e\sin(\vartheta - \varpi) \\ &+\frac{M+m}{C}\left[\frac{de}{dt}\sin(\vartheta - \varpi) + e\cos(\vartheta - \varpi)\left(\frac{d\vartheta}{dt} - \frac{d\varpi}{dt}\right)\right] - \frac{C^2}{R^3} + \frac{M+m}{R^2} \\ &= -\frac{\mu R}{\rho^3} + \mu\left(\frac{r}{\rho^3} - \frac{1}{r^2}\right)\cos V. \end{aligned}$$

En remarquant qu'on a

$$-\frac{C^2}{R^3} + \frac{M+m}{R^2} = \frac{M+m}{R^2}\left(1 - \frac{C^2}{M+m}\frac{1}{R}\right) = -\frac{M+m}{R^2}e\cos(\vartheta - \varpi),$$

elle devient

$$\begin{aligned} &-\frac{M+m}{C^2}\frac{dC}{dt}e\sin(\vartheta - \varpi) \\ &+\frac{M+m}{C}\left[\frac{de}{dt}\sin(\vartheta - \varpi) + e\cos(\vartheta - \varpi)\left(\frac{d\vartheta}{dt} - \frac{C}{R^2} - \frac{d\varpi}{dt}\right)\right] \\ &= -\frac{\mu R}{\rho^3} + \mu\left(\frac{r}{\rho^3} - \frac{1}{r^2}\right)\cos V, \end{aligned}$$

ou enfin

$$(29)\qquad \begin{aligned} &\frac{de}{dt}\sin(\vartheta - \varpi) + e\cos(\vartheta - \varpi)\left(\frac{d\vartheta}{dt} - \frac{C}{R^2} - \frac{d\varpi}{dt}\right) \\ &= \frac{1}{C}\frac{dC}{dt}e\sin(\vartheta - \varpi) + \frac{C}{M+m}\left[-\frac{\mu R}{\rho^3} + \mu\left(\frac{r}{\rho^3} - \frac{1}{r^2}\right)\cos V\right]. \end{aligned}$$

On tire des équations (28) et (29) les suivantes :

$$
(30)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{de}{dt} &= \frac{\mu C}{M+m}\left(\frac{r}{\rho^3}-\frac{1}{r^2}\right)(-\sin\varpi\cos\theta'+\cos\varpi\sin\theta'\cos H)\\
&\quad+\frac{dC}{dt}\frac{1}{C}[\cos(\theta-\varpi)+e]-\frac{C}{M+m}\frac{\mu R}{\rho^3}\sin(\theta-\varpi),\\
e\left(\frac{d\theta}{dt}-\frac{C}{R^2}-\frac{d\varpi}{dt}\right) &= \frac{\mu C}{M+m}\left(\frac{r}{\rho^3}-\frac{1}{r^2}\right)(\cos\varpi\cos\theta'+\sin\varpi\sin\theta'\cos H)\\
&\quad-\frac{dC}{dt}\frac{1}{C}\sin(\theta-\varpi)-\frac{C}{M+m}\frac{\mu R}{\rho^3}\cos(\theta-\varpi),
\end{aligned}
\right.
$$

ou bien, si l'on préfère introduire les quantités $e\cos\varpi$ et $e\sin\varpi$,

$$
(31)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(e\cos\varpi)+e\sin\varpi\left(\frac{d\theta}{dt}-\frac{C}{R^2}\right)\\
&\quad=\frac{\mu C}{M+m}\left(\frac{r}{\rho^3}-\frac{1}{r^2}\right)\sin\theta'\cos H\\
&\quad\quad+\frac{dC}{dt}\frac{1}{C}(\cos\theta+e\cos\varpi)-\frac{C}{M+m}\frac{\mu R}{\rho^3}\sin\theta,\\
&\frac{d}{dt}(e\sin\varpi)-e\cos\varpi\left(\frac{d\theta}{dt}-\frac{C}{R^2}\right)\\
&\quad=-\frac{\mu C}{M+m}\left(\frac{r}{\rho^3}-\frac{1}{r^2}\right)\cos\theta'\\
&\quad\quad+\frac{dC}{dt}\frac{1}{C}(\sin\theta+e\sin\varpi)+\frac{C}{M+m}\frac{\mu R}{\rho^3}\cos\theta.
\end{aligned}
\right.
$$

On a les équations analogues en e', ϖ' que l'on déduit des équations (27) et de la cinquième des équations (10).

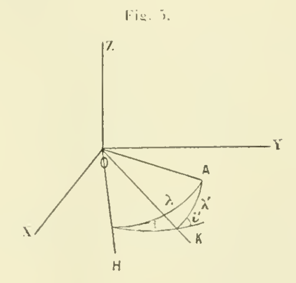
$$
(32)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{de'}{dt} &= \frac{MC'}{m+\mu}\left(\frac{R}{\rho^3}-\frac{1}{R^2}\right)(-\sin\varpi'\cos\theta+\cos\varpi'\sin\theta\cos H)\\
&\quad+\frac{dC'}{dt}\frac{1}{C'}[\cos(\theta'-\varpi')+e']-\frac{C'}{m+\mu}\frac{Mr}{\rho^3}\sin(\theta'-\varpi'),\\
e'\left(\frac{d\theta'}{dt}-\frac{C'}{r^2}-\frac{d\varpi'}{dt}\right) &= \frac{MC'}{m+\mu}\left(\frac{R}{\rho^3}-\frac{1}{R^2}\right)(\cos\varpi'\cos\theta+\sin\varpi'\sin\theta\cos H)\\
&\quad-\frac{dC'}{dt}\frac{1}{C'}\sin(\theta'-\varpi')-\frac{C'}{m+\mu}\frac{Mr}{\rho^3}\cos(\theta'-\varpi'),
\end{aligned}
\right.
$$

ou bien, si l'on préfère introduire les quantités $e\cos\varpi$ et $e'\sin\varpi'$,

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(e'\cos\varpi') + e'\sin\varpi'\left(\frac{d\theta'}{dt} - \frac{C'}{r^2}\right)\\
&\quad = -\frac{MC'}{m+\mu}\left(\frac{R}{\rho^3} - \frac{1}{R^2}\right)\sin\theta\cos H\\
&\qquad - \frac{dC'}{dt}\,\frac{1}{C'}(\cos\theta' + e'\cos\varpi') - \frac{C'}{m+\mu}\,\frac{Mr}{\rho^3}\sin\theta',\\
&\frac{d}{dt}(e'\sin\varpi') - e'\cos\varpi'\left(\frac{d\theta'}{dt} - \frac{C'}{r^2}\right)\\
&\quad = -\frac{MC'}{m+\mu}\left(\frac{R}{\rho^3} - \frac{1}{R^2}\right)\cos\theta\\
&\qquad - \frac{dC'}{dt}\,\frac{1}{C'}(\sin\theta' + e'\sin\varpi') + \frac{C'}{m+\mu}\,\frac{Mr}{\rho^3}\cos\theta'.
\end{aligned}\right.$$

Les équations (26), (30) et (32), ou bien (26), (31) et (33), dans lesquelles R et r sont remplacés par leurs valeurs données dans les équations (27), fournissent C, C', θ, θ', H, e, ϖ, e', ϖ'.

Fig. 5.



IV. Je vais maintenant montrer comment on achèvera la solution de la question.

Je supposerai d'abord qu'on ait pris le plan des aires pour plan des XY. Alors les équations (6) de la deuxième Partie deviennent

$$(34)\quad \left\{\begin{aligned}
&M(m+\mu)R^2P - M\mu RrQ = G\gamma,\\
&\mu(m+M)r^2Q - M\mu RrP = G\zeta,\\
&M(m+\mu)R^2S - M\mu\left(R\frac{dr}{dt} - r\frac{dR}{dt}\right)Q + M\mu RrT = G\frac{d\gamma}{dt},\\
&\mu(m+M)r^2T + M\mu\left(R\frac{dr}{dt} - r\frac{dR}{dt}\right)P + M\mu RrS = G\frac{d\zeta}{dt}.
\end{aligned}\right.$$

Je vais représenter les plans des orbites. Soient OH la trace du plan de l'orbite solaire, i l'inclinaison, v l'angle XOH; OK la trace du plan de l'orbite lunaire, i' l'inclinaison, OA l'intersection, v' l'angle XOK; λ et λ' désigneront les arcs AH et AK.

On aura les formules connues

$$\begin{aligned}
\xi &= \cos(\lambda+\theta)\cos v - \sin(\lambda+\theta)\sin v\cos i,\\
\eta &= \cos(\lambda+\theta)\sin v + \sin(\lambda+\theta)\cos v\cos i,\\
\zeta &= \sin(\lambda+\theta)\sin i,\\
\alpha &= \cos(\lambda'+\theta')\cos v' - \sin(\lambda'+\theta')\sin v'\cos i',\\
\beta &= \cos(\lambda'+\theta')\sin v' + \sin(\lambda'+\theta')\cos v'\cos i',\\
\gamma &= \sin(\lambda'+\theta')\sin i'.
\end{aligned}$$

Cela posé, la première et la troisième des équations (34) deviennent

$$\mathrm{M}(m+\mu)\mathrm{C}\sin\theta'\sin\mathrm{H} - \mathrm{M}\mu\frac{\mathrm{R}}{r}\mathrm{C}'\sin\theta\sin\mathrm{H} = \mathrm{G}\sin(\lambda'+\theta')\sin i',$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{M}(m+\mu)\frac{\mathrm{CC}'}{r^2}\sin\mathrm{H}\cos\theta'\\
&\quad+\mathrm{M}\mu\left(\mathrm{R}\frac{dr}{dt}-r\frac{d\mathrm{R}}{dt}\right)\frac{\mathrm{C}'}{r^2}\sin\theta\sin\mathrm{H}\\
&\qquad-\mathrm{M}\mu\frac{\mathrm{R}}{r}\frac{\mathrm{CC}'}{\mathrm{R}^2}\sin\mathrm{H}\cos\theta = \mathrm{G}\cos(\lambda'+\theta')\sin i'\frac{\mathrm{C}'}{r^2},
\end{aligned}$$

ou bien

$$(35)\quad\left\{\begin{aligned}
&\mathrm{M}(m+\mu)\mathrm{C}\sin\theta'\sin\mathrm{H} - \mathrm{M}\mu\frac{\mathrm{R}}{r}\mathrm{C}'\sin\theta\sin\mathrm{H} = \mathrm{G}\sin(\lambda'+\theta')\sin i',\\
&\mathrm{M}(m+\mu)\mathrm{C}\cos\theta'\sin\mathrm{H}\\
&\quad+\mathrm{M}\mu\left(\mathrm{R}\frac{dr}{dt}-r\frac{d\mathrm{R}}{dt}\right)\sin\theta\sin\mathrm{H}\\
&\qquad-\mathrm{M}\mu\frac{r}{\mathrm{R}}\mathrm{C}\sin\mathrm{H}\cos\theta = \mathrm{G}\cos(\lambda'+\theta')\sin i'.
\end{aligned}\right.$$

Multiplions la première par $\cos\theta'$, la seconde par $-\sin\theta'$, et ajoutons; il vient

$$\begin{aligned}
&-\mathrm{M}\mu\frac{\mathrm{R}}{r}\sin\theta\cos\theta'\mathrm{C}'\sin\mathrm{H} - \mathrm{M}\mu\left(\mathrm{R}\frac{dr}{dt}-r\frac{d\mathrm{R}}{dt}\right)\sin\theta\sin\theta'\sin\mathrm{H}\\
&\qquad+\mathrm{M}\mu\frac{r}{\mathrm{R}}\mathrm{C}\sin\mathrm{H}\cos\theta\sin\theta' = \mathrm{G}\sin i'\sin\lambda',
\end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned}
&\mathrm{M}\mu\mathrm{R}\sin\theta\sin\mathrm{H}\left\{\frac{m+\mu}{\mathrm{C}'}\cos\theta'[1+e'\cos(\theta'-\varpi')]\right.\\
&\qquad\qquad\left.+\frac{m+\mu}{\mathrm{C}'}e'\sin(\theta'-\varpi')\sin\theta'\right\}\\
&-\mathrm{M}\mu r\sin\theta\sin\mathrm{H}\left\{\frac{\mathrm{M}+m}{\mathrm{C}}\cos\theta[1+e\cos(\theta-\varpi)]\right.\\
&\qquad\qquad\left.+\frac{\mathrm{M}+m}{\mathrm{C}}e\sin(\theta-\varpi)\sin\theta\right\}=\mathrm{G}\sin i'\sin\lambda',
\end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned}
(36)\qquad &\mathrm{M}\mu\sin\mathrm{H}\left[\frac{\mathrm{M}+m}{\mathrm{C}}r\sin\theta(\cos\theta+e\cos\varpi)\right.\\
&\qquad\left.-\frac{m+\mu}{\mathrm{C}'}\mathrm{R}\sin\theta(\cos\theta'+e'\cos\varpi')\right]\\
&=\mathrm{G}\sin i'\sin\lambda'=\mathrm{G}\sin i\sin\lambda.
\end{aligned}$$

Multiplions la première des équations (35) par $\sin\theta'$, la seconde par $\cos\theta'$, et ajoutons; il viendra

$$\begin{aligned}
&\mathrm{M}(m+\mu)\mathrm{C}\sin\mathrm{H}-\mathrm{M}\mu\frac{\mathrm{R}}{r}\sin\theta\sin\theta'\mathrm{C}'\sin\mathrm{H}\\
&\qquad+\mathrm{M}\mu\left(\mathrm{R}\frac{dr}{dt}-r\frac{d\mathrm{R}}{dt}\right)\sin\theta\cos\theta'\sin\mathrm{H}\\
&\qquad\qquad-\mathrm{M}\mu\frac{r}{\mathrm{R}}\mathrm{C}\cos\theta\cos\theta'\sin\mathrm{H}=\mathrm{G}\sin i'\cos\lambda'.
\end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned}
&\mathrm{M}(m+\mu)\mathrm{C}\sin\mathrm{H}-\mathrm{M}\mu\mathrm{R}\sin\theta\sin\mathrm{H}\left(\frac{\mathrm{C}'}{r}\sin\theta'-\frac{dr}{dt}\cos\theta'\right)\\
&\qquad-\mathrm{M}\mu r\cos\theta'\sin\mathrm{H}\left(\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{R}}\cos\theta+\frac{d\mathrm{R}}{dt}\sin\theta\right)=\mathrm{G}\sin i\cos\lambda'.
\end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned}
&\mathrm{M}(m+\mu)\mathrm{C}\sin\mathrm{H}-\mathrm{M}\mu\mathrm{R}\sin\theta\sin\mathrm{H}\frac{m+\mu}{\mathrm{C}'}(\sin\theta'+e'\sin\varpi')\\
&\qquad-\mathrm{M}\mu r\cos\theta'\sin\mathrm{H}\frac{\mathrm{M}+m}{\mathrm{C}}(\cos\theta+e\cos\varpi)=\mathrm{G}\sin i'\cos\lambda',
\end{aligned}$$

ou enfin

$$\begin{aligned}
(37)\quad &\mathrm{M}(m+\mu)\mathrm{C}\sin\mathrm{H}\\
&\quad-\mathrm{M}\mu\sin\mathrm{H}\left[\frac{\mathrm{M}+m}{\mathrm{C}}r\cos\theta'(\cos\theta+e\cos\varpi)\right.\\
&\qquad\qquad\left.+\frac{m+\mu}{\mathrm{C}'}\mathrm{R}\sin\theta(\sin\theta'+e'\sin\varpi')\right]=\mathrm{G}\sin i'\cos\lambda'.
\end{aligned}$$

On aura une équation analogue à (37) que l'on tirerait de la deuxième et de la quatrième de (34); je réunis les trois équations obtenues; ce sera le système

$$\begin{gathered}
M\mu\sin H\left[\frac{M+m}{C}r\sin\theta'(\cos\theta+e\cos\varpi)\right.\\
\left.-\frac{m+\mu}{C'}R\sin\theta(\cos\theta'+e'\cos\varpi')\right]=G\sin i\sin\lambda=G\sin i'\sin\lambda',
\end{gathered}$$

$$(38)\quad\begin{gathered}
-\mu(m+M)C'\sin H\\
+M\mu\sin H\left[\frac{m+\mu}{C'}R\cos\theta(\cos\theta'+e'\cos\varpi')\right.\\
\left.+\frac{m+M}{C}r\sin\theta'(\sin\theta+e\sin\varpi)\right]=G\sin i\cos\lambda,
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
M(m+\mu)C\sin H\\
-M\mu\sin H\left[\frac{m+M}{C}r\cos\theta'(\cos\theta+e\cos\varpi)\right.\\
\left.+\frac{m+\mu}{C'}R\sin\theta(\sin\theta'+e'\sin\varpi')\right]=G\sin i'\cos\lambda'.
\end{gathered}$$

Ces équations fournissent i, i', λ, λ'; il reste à déterminer v et v'. J'écrirai pour cela les équations

$$\frac{d\xi}{dt}=\frac{d\xi}{d\theta}\frac{C}{R^2},\qquad\frac{d\eta}{dt}=\frac{d\eta}{dt}\frac{C}{R^2},\qquad\frac{d\zeta}{dt}=\frac{d\zeta}{d\theta}\frac{C}{R^2},$$

$$\frac{d\alpha}{dt}=\frac{d\alpha}{d\theta'}\frac{C'}{r^2},\qquad\frac{d\beta}{dt}=\frac{d\beta}{d\theta'}\frac{C'}{r^2},\qquad\frac{d\gamma}{dt}=\frac{d\gamma}{d\theta'}\frac{C'}{r^2}.$$

On s'est déjà servi de la troisième et de la sixième, pour former les deux dernières des équations (34).

Écrivons les trois premières; ce sont

$$\begin{gathered}
-[\sin(\lambda+\theta)\cos v+\cos(\lambda+\theta)\sin v\cos i]\left(\frac{d\theta}{dt}-\frac{C}{R^2}+\frac{d\lambda}{dt}\right)\\
-[\cos(\lambda+\theta)\sin v+\sin(\lambda+\theta)\cos v\cos i]\frac{dv}{dt}+\sin(\lambda+\theta)\sin v\sin i\frac{di}{dt}=0,
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
+[-\sin(\lambda+\theta)\sin v+\cos(\lambda+\theta)\cos v\cos i]\left(\frac{d\theta}{dt}-\frac{C}{R^2}+\frac{d\lambda}{dt}\right)\\
+[\cos(\lambda+\theta)\cos v-\sin(\lambda+\theta)\sin v\cos i]\frac{dv}{dt}-\sin(\lambda+\theta)\cos v\sin i\frac{di}{dt}=0,
\end{gathered}$$

$$\cos(\lambda+\theta)\sin i\left(\frac{d\theta}{dt}-\frac{C}{R^2}+\frac{d\lambda}{dt}\right)+\sin(\lambda+\theta)\cos i\frac{di}{dt}=0,$$

Ces équations donnent sans peine les suivantes :

$$(39)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\theta}{dt} - \frac{C}{R^2} + \frac{d\lambda}{dt} + \cos i\frac{dv}{dt} = 0,\\ &\cos(\lambda+\theta)\sin i\frac{dv}{dt} - \sin(\lambda+\theta)\frac{di}{dt} = 0,\\ &\cos(\lambda+\theta)\sin i\left(\frac{d\theta}{dt} - \frac{C}{R^2} + \frac{d\lambda}{dt}\right) + \sin(\lambda+\theta)\cos i\frac{di}{dt} = 0. \end{aligned}\right.$$

Ces équations se réduisent à deux; la dernière est la même que dans le système précédent. On aura aussi

$$(40)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\theta'}{dt} - \frac{C'}{r^2} + \frac{d\lambda'}{dt} + \cos i'\frac{dv'}{dt} = 0,\\ &\cos(\lambda'+\theta')\sin i'\frac{dv'}{dt} - \sin(\lambda'+\theta')\frac{di'}{dt} = 0.\\ &\cos(\lambda'+\theta')\sin i'\left(\frac{d\theta}{dt} - \frac{C'}{r^2} + \frac{d\lambda'}{dt}\right) + \sin(\lambda+\theta')\cos i'\frac{di'}{dt} = 0. \end{aligned}\right.$$

Je remarquerai que les équations (39) et (40) ne supposent pas que le plan des XY est le plan du maximum des aires. Il en est de même dans ce qui suit :

Considérons les deux équations

$$\begin{aligned} &\frac{d\theta}{dt} - \frac{C}{R^2} + \frac{d\lambda}{dt} + \cos i\frac{dv}{dt} = 0,\\ &\frac{d\theta'}{dt} - \frac{C'}{r^2} + \frac{d\lambda'}{dt} + \cos i'\frac{dv'}{dt} = 0. \end{aligned}$$

Multiplions la première par $\cos i'$, la seconde par $\cos i$, et retranchons : on aura

$$\begin{aligned} \cos i'\left(\frac{d\theta}{dt} - \frac{C}{R^2}\right) - \cos i\left(\frac{d\theta'}{dt} - \frac{C'}{r^2}\right)\\ + \frac{d\lambda}{dt}\cos i' - \frac{d\lambda'}{dt}\cos i - \cos i\cos i'\frac{d}{dt}(v'-v) = 0. \end{aligned}$$

Écrivons l'expression

$$\frac{d\lambda}{dt}\cos i' - \frac{d\lambda'}{dt}\cos i - \cos i\cos i'\frac{d}{dt}(v'-v).$$

Si on considère le triangle sphérique précédent, on posera pour un

moment

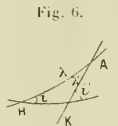
$$v' - v = a, \qquad \lambda' = b, \qquad \lambda = c,$$
$$H = A, \qquad i = B, \qquad i' = \pi - C,$$

et l'expression précédente deviendra

$$-\frac{dc}{dt}\cos C - \frac{db}{dt}\cos B + \cos B \cos C \frac{da}{dt}.$$

En se servant des relations différentielles entre les angles et les côtés

Fig. 6.



d'un triangle sphérique, cette expression devient successivement

$$-\frac{dc}{dt}\cos C - \frac{db}{dt}\cos B + \cos B \cos C\left(\cos C \frac{db}{dt} + \cos B \frac{dc}{dt} + \sin b \sin C \frac{dA}{dt}\right),$$

$$-\frac{dc}{dt}\cos C \sin^2 B - \frac{db}{dt}\cos B \sin^2 C + \cos B \cos C \sin b \sin C \frac{dA}{dt},$$

$$\sin C \cos B\left(\sin b \cos C \frac{dA}{dt} - \sin C \frac{db}{dt}\right) - \frac{dc}{dt}\cos C \sin^2 B,$$

$$-\sin C \cos B\left(\sin a \frac{dB}{dt} + \sin B \cos a \frac{dc}{dt}\right) - \frac{dc}{dt}\cos C \sin^2 B,$$

$$-\sin C \cos B \sin a \frac{dB}{dt} - \frac{dc}{dt}\sin B(\cos C \sin B + \sin C \cos B \cos a),$$

$$-\sin C \cos B \sin a \frac{dB}{dt} - \frac{dc}{dt}\sin B \sin A \cos c,$$

$$-\sin A\left(\sin c \cos B \frac{dB}{dt} + \sin B \cos c \frac{dc}{dt}\right),$$

$$-\sin A \frac{d}{dt}(\sin c \sin B).$$

On aura donc l'équation

$$(41) \qquad \cos i'\left(\frac{d\vartheta}{dt} - \frac{C}{R^2}\right) - \cos i\left(\frac{d\vartheta'}{dt} - \frac{C}{r^2}\right) = \sin H \frac{d}{dt}(\sin i \sin \lambda).$$

Écrivons de nouveau cette équation et la dernière du groupe (39).

Ce sont

$$\cos(\lambda+\theta)\sin i\left(\frac{d\theta}{dt}-\frac{C}{R^2}\right)+\frac{d\lambda}{dt}\cos(\lambda+\theta)\sin i+\frac{d\nu}{dt}\sin(\lambda+\theta)\cos i=0,$$

$$\cos i'\left(\frac{d\theta}{dt}-\frac{C}{R^2}\right)-\cos i\left(\frac{d\theta'}{dt}-\frac{C'}{r^2}\right)+\sin H\cos i\sin\lambda\frac{di}{dt}-\sin H\sin i\cos\lambda\frac{d\lambda}{dt}=0.$$

Multiplions la première par $\sin H\cos\lambda$, la seconde par $\cos(\lambda+\theta)$, et ajoutons; on aura

$$\cos(\lambda+\theta)\left[\sin i\sin H\cos\lambda\left(\frac{d\theta}{dt}-\frac{C}{R^2}\right)+\cos i'\left(\frac{d\theta}{dt}-\frac{C}{R^2}\right)-\cos i\left(\frac{d\theta'}{dt}-\frac{C'}{r^2}\right)\right]+\frac{di}{dt}\cos i\sin H\sin\theta=0$$

ou bien

$$\cos(\lambda+\theta)\left[\cos H\left(\frac{d\theta}{dt}-\frac{C}{R^2}\right)-\left(\frac{d\theta'}{dt}-\frac{C'}{r^2}\right)\right]+\frac{di}{dt}\sin H\sin\theta=0,$$

d'où, d'après (20) et (26),

$$\frac{di}{dt}=\sin\theta'\sin H\frac{\mu R}{C}\left(\frac{r}{\rho^3}-\frac{1}{r^2}\right)\cos(\lambda+\theta); \tag{42}$$

les équations (39) fournissent ensuite $\frac{d\lambda}{dt}$ et $\frac{d\nu}{dt}$; on a

$$\frac{d\nu}{dt}=\frac{\sin\theta'\sin H}{\sin i}\frac{\mu R}{C}\left(\frac{r}{\rho^3}-\frac{1}{r^2}\right)\sin(\lambda+\theta). \tag{43}$$

On aurait des formules analogues en i' et ν'; réunissons-les : on obtiendra le système suivant, dans lequel je n'ai pas achevé l'expression de $\frac{d\lambda}{dt}$, qui n'offre rien de particulier :

$$(44)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{di}{dt}=\sin\theta'\sin H\frac{\mu R}{C}\left(\frac{r}{\rho^3}-\frac{1}{r^2}\right)\cos(\lambda+\theta),\\
&\frac{d\nu}{dt}=\frac{\sin\theta'\sin H}{\sin i}\frac{\mu R}{C}\left(\frac{r}{\rho^3}-\frac{1}{r^2}\right)\sin(\lambda+\theta),\\
&\qquad\frac{d\theta}{dt}-\frac{C}{R^2}+\frac{d\lambda}{dt}=-\cos i\frac{d\nu}{dt},\\
&\frac{di'}{dt}=-\sin\theta\sin H\frac{Mr}{C'}\left(\frac{R}{\rho^3}-\frac{1}{R^2}\right)\cos(\lambda'+\theta'),\\
&\frac{d\nu'}{dt}=-\frac{\sin\theta'\sin H}{\sin i'}\frac{Mr}{C'}\left(\frac{R}{\rho^3}-\frac{1}{R^2}\right)\sin(\lambda'+\theta'),\\
&\qquad\frac{d\theta'}{dt}-\frac{C'}{r^2}+\frac{d\lambda'}{dt}=-\cos i'\frac{d\nu'}{dt}.
\end{aligned}\right.$$

La solution du problème s'achèvera donc de la manière suivante : si l'on a pris pour plan des XY le plan du maximum des aires, on déterminera i, i', λ, λ' par les équations (38); la deuxième et la cinquième des équations (44) fourniront v et v'. Si le plan des XY est quelconque, on se servira des équations (44) pour déterminer i, i', λ, λ', v, v'.

V. Je vais former avec les nouvelles variables les intégrales des aires et des forces vives.

Pour obtenir un peu rapidement l'équation des aires ou (13), j'opérerai de la manière suivante :

Je pose

$$\sin i \sin\lambda = x, \qquad \sin i \cos\lambda = y, \qquad \sin i' \cos\lambda' = y'.$$

On a les relations

$$\cos i = \cos i' \cos H + \sin i' \sin H \cos\lambda',$$
$$\cos i' = \cos i \cos H - \sin i \sin H \cos\lambda,$$

ou bien

$$\cos i - \cos i' \cos H = y' \sin H,$$
$$\cos i' - \cos i \cos H = -y \sin H.$$

On en tire

$$\cos i = \frac{y' - y \cos H}{\sin H}, \qquad \cos i' = \frac{y' \cos H - y}{\sin H}.$$

La relation

$$\sin^2 i + \cos^2 i = 1$$

donne

$$x^2 + y^2 + \left(\frac{y' - y\cos H}{\sin H}\right)^2 = 1,$$

ou bien

$$\sin^2 H = x^2 \sin^2 H + y^2 + y'^2 - 2yy' \cos H. \tag{45}$$

Si dans cette équation on remplace x, y, y' par leurs valeurs fournies par les équations (38), on a l'équation cherchée. Il n'en a pas été fait usage.

Je vais maintenant former l'équation des forces vives (14), qui est

plus intéressante :

$$\mathrm{M}(m+\mu)\left(\frac{d\mathrm{R}^2}{dt^2}+\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{R}^2}\right)+\mu(m+\mathrm{M})\left(\frac{dr^2}{dt^2}+\frac{\mathrm{C}'^2}{r^2}\right)$$
$$-2\mathrm{M}\mu\left(\frac{d\mathrm{R}}{dt}\frac{dr}{dt}\cos\mathrm{V}-\frac{d\mathrm{R}}{dt}\frac{\mathrm{C}'}{r}\cos\Theta\sin\mathrm{V}-\frac{dr}{dt}\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{R}}\cos\Theta'\sin\mathrm{V}\right.$$
$$\left.+\frac{\mathrm{CC}'}{\mathrm{R}r}(\sin\vartheta\sin\vartheta'+\cos\vartheta\cos\vartheta'\cos\mathrm{H})\right)$$
$$=2(\mathrm{M}+m+\mu)\left(\frac{m\mu}{r}+\frac{\mathrm{M}m}{\mathrm{R}}+\frac{\mathrm{M}\mu}{\rho}\right)+h.$$

On a

$$\frac{d\mathrm{R}^2}{dt^2}+\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{R}^2}=\frac{(\mathrm{M}+m)^2}{\mathrm{C}^2}e^2\sin^2(\vartheta-\varpi)+\frac{(\mathrm{M}+m)^2}{\mathrm{C}^2}[1+e\cos(\vartheta-\varpi)]^2$$
$$=\frac{(\mathrm{M}+m)^2}{\mathrm{C}^2}[1+2e\cos(\vartheta-\varpi)+e^2],$$

$$\frac{dr^2}{dt^2}+\frac{\mathrm{C}'^2}{r^2}=\frac{(m+\mu)^2}{\mathrm{C}'^2}e'^2\sin^2(\vartheta'-\varpi')+\frac{(m+\mu)^2}{\mathrm{C}'^2}[1+e'\cos(\vartheta'-\varpi')]^2$$
$$=\frac{(m+\mu)^2}{\mathrm{C}'^2}[1+2e'\cos(\vartheta'-\varpi')+e'^2],$$

$$\frac{d\mathrm{R}}{dt}\frac{dr}{dt}\cos\mathrm{V}-\frac{\mathrm{C}'}{r}\frac{d\mathrm{R}}{dt}\cos\Theta\sin\mathrm{V}-\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{R}}\frac{dr}{dt}\cos\Theta'\sin\mathrm{V}+\frac{\mathrm{CC}'}{\mathrm{R}r}(\sin\vartheta\sin\vartheta'+\cos\vartheta\cos\vartheta'\cos\mathrm{H})$$
$$=\frac{\mathrm{M}+m}{\mathrm{C}}e\sin(\vartheta-\varpi)\frac{m+\mu}{\mathrm{C}'}e'\sin(\vartheta'-\varpi')(\cos\vartheta\cos\vartheta'+\sin\vartheta\sin\vartheta'\cos\mathrm{H})$$
$$-\frac{\mathrm{M}+m}{\mathrm{C}}e\sin(\vartheta-\varpi)\frac{m+\mu}{\mathrm{C}'}[1+e'\cos(\vartheta'-\varpi')](\cos\vartheta\sin\vartheta'-\sin\vartheta\cos\vartheta'\cos\mathrm{H})$$
$$-\frac{m+\mu}{\mathrm{C}'}e'\sin(\vartheta'-\varpi')\frac{\mathrm{M}+m}{\mathrm{C}}[1+e\cos(\vartheta-\varpi)](\cos\vartheta'\sin\vartheta-\sin\vartheta'\cos\vartheta\cos\mathrm{H})$$
$$+\frac{\mathrm{M}+m}{\mathrm{C}}\frac{m+\mu}{\mathrm{C}'}[1+e\cos(\vartheta-\varpi)][1+e'\cos(\vartheta'-\varpi')](\sin\vartheta\sin\vartheta'+\cos\vartheta\cos\vartheta'\cos\mathrm{H})$$
$$=\frac{\mathrm{M}+m}{\mathrm{C}}\frac{m+\mu}{\mathrm{C}'}\Big\{ee'\sin(\vartheta-\varpi)\sin(\vartheta'-\varpi')(\cos\vartheta\cos\vartheta'+\sin\vartheta\sin\vartheta'\cos\mathrm{H})$$
$$-e\sin(\vartheta-\varpi)[1+e'\cos(\vartheta'-\varpi')](\cos\vartheta\sin\vartheta'-\sin\vartheta\cos\vartheta'\cos\mathrm{H})$$
$$-e'\sin(\vartheta'-\varpi')[1+e\cos(\vartheta-\varpi)](\cos\vartheta'\sin\vartheta-\sin\vartheta'\cos\vartheta\cos\mathrm{H})$$
$$+[1+e\cos(\vartheta-\varpi)][1+e'\cos(\vartheta'-\varpi')](\sin\vartheta\sin\vartheta'+\cos\vartheta\cos\vartheta'\cos\mathrm{H})\Big\}$$
$$=\frac{\mathrm{M}+m}{\mathrm{C}}\frac{m+\mu}{\mathrm{C}'}[\sin\vartheta\sin\vartheta'+\cos\vartheta\cos\vartheta'\cos\mathrm{H}+e(\sin\varpi\sin\vartheta'+\cos\varpi\cos\vartheta'\cos\mathrm{H})$$
$$+e'(\sin\varpi'\sin\vartheta+\cos\varpi'\cos\vartheta\cos\mathrm{H})+ee'(\sin\varpi\sin\varpi'+\cos\varpi\cos\varpi'\cos\mathrm{H})]$$
$$=\frac{\mathrm{M}+m}{\mathrm{C}}\frac{m+\mu}{\mathrm{C}'}[(\sin\vartheta+e\sin\varpi)(\sin\vartheta'+e'\sin\varpi')+\cos\mathrm{H}(\cos\vartheta+e\cos\varpi)(\cos\vartheta'+e'\cos\varpi')].$$

L'équation des forces vives devient donc

$$\frac{\mathrm{M}(m+\mathrm{M})}{\mathrm{C}^2}[1+2e\cos(\theta-\varpi)+e^2]+\frac{\mu(m+\mu)}{\mathrm{C}'^2}[1+2e'\cos(\theta'-\varpi')+e'^2]$$
$$-\frac{2\mathrm{M}\mu}{\mathrm{CC}'}[(\sin\theta+e\sin\varpi)(\sin\theta'+e'\sin\varpi')$$
$$+\cos\mathrm{H}(\cos\theta+e\cos\varpi)(\cos\theta'+e'\cos\varpi')]$$
$$=\frac{2(\mathrm{M}+m+\mu)}{(m+\mathrm{M})(m+\mu)}\left(\frac{m\mu}{r}+\frac{\mathrm{M}m}{\mathrm{R}}+\frac{\mathrm{M}\mu}{\rho}\right)+h',$$

h' étant une nouvelle constante, ou enfin

$$(46)\qquad \frac{\mathrm{M}(m+\mathrm{M})}{\mathrm{C}^2}(e^2-1)+\frac{\mu(m+\mu)}{\mathrm{C}'^2}(e'^2-1)$$
$$-\frac{2\mathrm{M}\mu}{\mathrm{CC}'}[(\sin\theta+e\sin\varpi)(\sin\theta'+e'\sin\varpi')$$
$$+\cos\mathrm{H}(\cos\theta+e\cos\varpi)(\cos\theta'+e'\cos\varpi')]$$
$$=\frac{2\mathrm{M}\mu}{(m+\mathrm{M})(m+\mu)}\left(\frac{\mathrm{M}+m+\mu}{\rho}-\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{R}}-\frac{\mu}{r}\right)+h'.$$

Cette équation, dans laquelle on remplace R et r par leurs valeurs, fournit une expression assez simple de $\frac{1}{\rho}$ qui peut remplacer la valeur tirée de la formule

$$(47)\qquad \rho^2=\mathrm{R}^2+r^2-2\mathrm{R}r\cos\mathrm{V}.$$

VI. Je vais indiquer dans ce paragraphe une méthode nouvelle pour résoudre le problème des trois corps; elle consiste à se servir des équations des aires (38) pour en tirer les variables θ et θ' et à former les équations différentielles desquelles dépendent les autres quantités. Les équations (38) étant au nombre de trois, on pourra toujours ramener au premier degré la détermination des lignes trigonométriques de θ et θ'.

Je vais commencer les calculs, et, pour cela, je poserai

$$\frac{\mathrm{M}+m}{\mathrm{C}}r\sin\theta'(\cos\theta+e\cos\varpi)-\frac{m+\mu}{\mathrm{C}'}\mathrm{R}\sin\theta(\cos\theta'+e'\cos\varpi')=\mathcal{B},$$
$$\frac{m+\mu}{\mathrm{C}'}\mathrm{R}\cos\theta(\cos\theta'+e'\cos\varpi')+\frac{m+\mathrm{M}}{\mathrm{C}}r\sin\theta'(\sin\theta+e\sin\varpi)=\mathcal{B}',$$
$$\frac{m+\mathrm{M}}{\mathrm{C}}r\cos\theta'(\cos\theta+e\cos\varpi)+\frac{m+\mu}{\mathrm{C}'}\mathrm{R}\sin\theta(\sin\theta'+e'\sin\varpi')=\mathcal{B}'',$$

et je rappellerai

$$R = \frac{C^2}{M+m}\,\frac{1}{1+e\cos(\theta-\varpi)}, \qquad r = \frac{C'^2}{m+\mu}\,\frac{1}{1+e'\cos(\theta'-\varpi')}.$$

On tire sans peine de ces équations

$$\mathcal{A}\cos\theta + \mathcal{A}'\sin\theta = C\frac{r}{R}\sin\theta',$$

$$\mathcal{A}''\sin\theta' - \mathcal{A}\cos\theta' = C'\frac{R}{r}\sin\theta,$$

$$\mathcal{A}'(\cos\theta + e\cos\varpi) - \mathcal{A}(\sin\theta + e\sin\varpi) = \frac{m+\mu}{C}\,\frac{C^2}{M+m}(\cos\theta' + e'\cos\varpi'),$$

$$\mathcal{A}(\sin\theta' + e'\sin\varpi') + \mathcal{A}''(\cos\theta' + e'\cos\varpi') = \frac{M+m}{C}\,\frac{C'^2}{m+\mu}(\cos\theta + e\cos\varpi).$$

Posons

$$\frac{C^2}{M+m}\,\frac{m+\mu}{C'^2} = \operatorname{tang}\varphi, \qquad n = \mathcal{A}e\sin\varpi - \mathcal{A}'e\cos\varpi + C'\operatorname{tang}\varphi\, e'\cos\varpi',$$

$$n' = -\mathcal{A}e'\sin\varpi' - \mathcal{A}''e'\cos\varpi' + C\operatorname{cotang}\varphi\, e\cos\varpi;$$

les deux dernières équations s'écriront

$$\mathcal{A}'\cos\theta - \mathcal{A}\sin\theta - C'\operatorname{tang}\varphi\cos\theta' = n,$$

$$\mathcal{A}\sin\theta' + \mathcal{A}''\cos\theta' - C\operatorname{cotang}\varphi\cos\theta = n'.$$

On a donc le système

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}R\cos\theta + \mathcal{A}'R\sin\theta - Cr\sin\theta' &= 0,\\
\mathcal{A}''r\sin\theta' - \mathcal{A}r\cos\theta' - C'R\sin\theta &= 0,\\
\mathcal{A}'\cos\theta - \mathcal{A}\sin\theta - C'\operatorname{tang}\varphi\cos\theta' &= n,\\
\mathcal{A}\sin\theta' + \mathcal{A}''\cos\theta' - C\operatorname{cotang}\varphi\cos\theta &= n'.
\end{aligned}$$

On tire de ces équations

$$\cos\theta = \frac{ru}{U}, \qquad \sin\theta = \frac{rw}{U},$$

$$\cos\theta' = \frac{Ru'}{U}, \qquad \sin\theta' = \frac{Rw'}{U},$$

u, u', w, w' étant des fonctions homogènes du premier degré en R et en r, U une fonction homogène du second degré en R et r; on en tire

(48) $$r^2(u^2+w^2) = U^2, \qquad R^2(u'^2+w'^2) = U^2;$$

on a encore la combinaison

$$\operatorname{tang}\varphi\frac{r}{R}=\frac{1+e\cos(\theta-\varpi)}{1+e'\cos(\theta'-\varpi')}=\frac{\cos\theta(\cos\theta+e\cos\varpi)+\sin\theta(\sin\theta+e\sin\varpi)}{\cos\theta'(\cos\theta'+e'\cos\varpi')+\sin\theta'(\sin\theta'+e'\sin\varpi')},$$

ou bien

$$\operatorname{tang}\varphi\frac{r}{R}=\frac{\frac{ru}{U}\left(\frac{ru}{U}+e\cos\varpi\right)+\frac{rw}{U}\left(\frac{rw}{U}+e\sin\varpi\right)}{\frac{Ru'}{U}\left(\frac{Ru'}{U}+e'\cos\varpi'\right)+\frac{Rw'}{U}\left(\frac{Rw'}{U}+e'\sin\varpi'\right)},$$

ou bien

$$\operatorname{tang}\varphi=\frac{(u^2+w^2)r+U(ue\cos\varpi+we\sin\varpi)}{(u'^2+w'^2)R+U(u'e'\cos\varpi'+w'e'\sin\varpi')},$$

ou bien

$$\operatorname{tang}\varphi=\frac{\frac{U}{r}+ue\cos\varpi+we\sin\varpi}{\frac{U}{R}+u'e'\cos\varpi'+w'e'\sin\varpi'};$$

d'où

$$\frac{U}{R}\operatorname{tang}\varphi-\frac{U}{r}=n'',$$

n'' étant une fonction homogène et du premier degré en R et r; cette dernière équation peut s'écrire

$$(49)\qquad U(r\operatorname{tang}\varphi-R)=n''Rr;$$

c'est une combinaison du troisième degré des équations (48). On formera donc aisément deux combinaisons homogènes du second degré; on en tirera des quantités proportionnelles à R^2, Rr, r^2; puis enfin des quantités proportionnelles à R et r. On aura alors les expressions de $\cos\theta$, $\cos\theta'$, $\sin\theta$, $\sin\theta'$, R, r.

Reprenons maintenant l'équation (41) et la dernière du groupe (39). Ce sont

$$(50)\quad\begin{cases}\cos i'\left(\frac{d\theta}{dt}-\frac{C}{R^2}\right)-\cos i\left(\frac{d\theta'}{dt}-\frac{C'}{r^2}\right)=\sin H\frac{d}{dt}(\sin i\sin\lambda),\\ \cos(\lambda+\theta)\sin i\left(\frac{d\theta}{dt}-\frac{C}{R^2}\right)+\cos\theta\frac{d}{dt}(\sin i\sin\lambda)+\sin\theta\frac{d}{dt}(\sin i\cos\lambda)=0.\end{cases}$$

On a déjà posé

$$\sin\lambda \sin i = x, \qquad \sin i \cos\lambda = y, \qquad \sin i' \cos\lambda' = y',$$

et on a trouvé les relations

$$\cos i = \frac{y' - y\cos H}{\sin H}, \qquad \cos i' = \frac{y'\cos H - y}{\sin H}.$$

De plus, les équations (38) donnent pour $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$, $\mathcal{A}''$ des expressions très simples en x, y, y'.

$$\mathcal{A} = \frac{Gx}{M\mu \sin H}, \qquad \mathcal{A}' = \frac{Gy + \mu(m + M)C' \sin H}{M\mu \sin H},$$

$$\mathcal{A}'' = \frac{M(m+\mu)C\sin H - Gy'}{M\mu \sin H}.$$

En remplaçant $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$, $\mathcal{A}''$ par ces valeurs, $\cos\theta$, $\cos\theta'$, $\sin\theta$, $\sin\theta'$, R, r s'exprimeront en fonction de C, C', H, $e\cos\varpi$, $e\sin\varpi$, $e'\cos\varpi'$, $e'\sin\varpi'$, x, y, y'. Cela posé, les équations (50) donnent aisément

$$\frac{dx}{dt} = -\sin\theta\sin\theta'\left[\frac{\mu R}{C}\left(\frac{r}{\rho^3} - \frac{1}{r^2}\right)y' + \frac{Mr}{C'}\left(\frac{R}{\rho^3} - \frac{1}{R^2}\right)y\right],$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} = &-\sin\theta'(y\cos\theta + x\sin\theta)\left[\cos H\frac{\mu R}{C}\left(\frac{r}{\rho^3} - \frac{1}{r^2}\right) + \frac{Mr}{C'}\left(\frac{R}{\rho^3} - \frac{1}{R^2}\right)\right]\\ &+ \cos\theta\sin\theta'\left[y'\frac{\mu R}{C}\left(\frac{r}{\rho^3} - \frac{1}{r^2}\right) + y\frac{Mr}{C'}\left(\frac{R}{\rho^3} - \frac{1}{R^2}\right)\right],\end{aligned}$$

et l'on aura de même

$$\begin{aligned}\frac{dy'}{dt} = &-\sin\theta(y'\cos\theta' + x\sin\theta')\left[\cos H\frac{Mr}{C'}\left(\frac{R}{\rho^3} - \frac{1}{R^2}\right) + \frac{\mu R}{C}\left(\frac{r}{\rho^3} - \frac{1}{r^2}\right)\right]\\ &+ \cos\theta'\sin\theta\left[y'\frac{\mu R}{C}\left(\frac{r}{\rho^3} - \frac{1}{r^2}\right) + y\frac{Mr}{C'}\left(\frac{R}{\rho^3} - \frac{1}{R^2}\right)\right].\end{aligned}$$

Joignons à ces trois équations les équations (26), (31) et (33). Mettons de côté la troisième et la quatrième des équations (26), que nous joindrons à la deuxième et à la cinquième des équations (44). Le premier système sera un système d'équations différentielles du premier ordre aux inconnues C, C', H, $e\cos\varpi$, $e\sin\varpi$, $e'\cos\varpi'$, $e'\sin\varpi'$, x, y, y'; le système ainsi obtenu ne renferme que des quantités qui varient peu. Le second système fera ensuite connaître θ, θ', ϵ, ϵ'.

Cette méthode me paraît intéressante, et probablement n'est pas plus compliquée que celles actuellement en usage dans la Mécanique céleste.

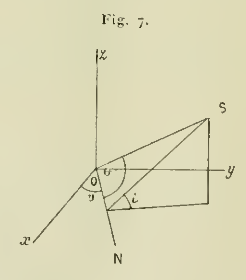
QUATRIÈME PARTIE.

I. Si l'on considère le mouvement d'une planète autour du Soleil, ou le mouvement d'un satellite autour de sa planète, on peut écrire les équations

$$(1)\qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{kx}{r^3} + \mathcal{A}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{ky}{r^3} + \mathcal{B}, \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{kz}{r^3} + \mathcal{C}.$$

x, y, z désignent les coordonnées de la planète relativement à des axes de direction constante passant par le Soleil, ou les coordonnées du satellite par rapport à des axes de direction constante passant par la planète, r la distance des deux astres, k une constante, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ la composante d'une force appelée force perturbatrice.

Fig. 7.



Si on néglige cette force, l'astre secondaire décrit autour de l'axe principal une ellipse suivant les lois de Képler. Soient O l'astre principal, S l'astre secondaire.

Soient ON la trace du plan de l'orbite sur le plan des xy, v l'angle xON, i l'inclinaison de l'orbite, θ la longitude dans l'orbite ou l'angle SON.

Soit

(2) $$x = r\xi, \qquad y = r\eta, \qquad z = r\zeta.$$

On a

(3) $$\begin{cases} \xi = \cos\theta\cos v - \sin\theta\sin v\cos i, \\ \eta = \cos\theta\sin v + \sin\theta\cos v\cos i, \\ \zeta = \sin\theta\sin i. \end{cases}$$

Soit encore

(4) $$r = \frac{C^2}{k}\frac{1}{1 + e\cos(\theta - \varpi)}.$$

Aux variables x, y, z on substitue les variables θ, v, i, C, e, ϖ, avec la condition que les dérivées des quantités ξ, η, ζ, r soient les mêmes que dans le mouvement képlérien, c'est-à-dire qu'on ait

(5) $$\frac{d\xi}{dt} = \frac{d\xi}{d\theta}\frac{C}{r^2}, \qquad \frac{d\eta}{dt} = \frac{d\eta}{d\theta}\frac{C}{r^2}, \qquad \frac{d\zeta}{dt} = \frac{d\zeta}{d\theta}\frac{C}{r^2}, \qquad \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{C}{r^2}.$$

Je vais faire ce changement de variables. Les équations (1) s'écrivent

(6) $$\begin{cases} r\dfrac{d^2\xi}{dt^2} + 2\dfrac{dr}{dt}\dfrac{d\xi}{dt} + \xi\dfrac{d^2 r}{dt^2} = -\dfrac{k}{r^2}\xi, \\ r\dfrac{d^2\eta}{dt^2} + 2\dfrac{dr}{dt}\dfrac{d\eta}{dt} + \eta\dfrac{d^2 r}{dt^2} = -\dfrac{k}{r^2}\eta, \\ r\dfrac{d^2\zeta}{dt^2} + 2\dfrac{dr}{dt}\dfrac{d\zeta}{dt} + \zeta\dfrac{d^2 r}{dt^2} = -\dfrac{k}{r^2}\zeta. \end{cases}$$

Formons d'abord les trois premières des équations (5); ce sont

$$-(\sin\theta\cos v + \cos\theta\sin v\cos i)\left(\frac{d\theta}{dt} - \frac{C}{r^2}\right)$$
$$-(\cos\theta\sin v + \sin\theta\cos v\cos i)\frac{dv}{dt} + \sin\theta\sin v\sin i\frac{di}{dt} = 0,$$

$$-(\sin\theta\sin v + \cos\theta\cos v\cos i)\left(\frac{d\theta}{dt} - \frac{C}{r^2}\right)$$
$$+(\cos\theta\cos v - \sin\theta\sin v\cos i)\frac{dv}{dt} - \sin\theta\cos v\sin i\frac{di}{dt} = 0,$$

$$\cos\theta\sin i\left(\frac{d\theta}{dt} - \frac{C}{r^2}\right) + \sin\theta\cos i\frac{di}{dt} = 0.$$

Multiplions la première par $-\cos\varphi$, la seconde par $-\sin\varphi$, et ajoutons; il vient

$$\sin\theta\left(\frac{d\theta}{dt}-\frac{C}{r^2}\right)+\cos i\frac{d\varphi}{dt}\sin\theta=0$$

ou bien

$$\frac{d\theta}{dt}-\frac{C}{r^2}+\cos i\frac{d\varphi}{dt}=0. \tag{7}$$

Multiplions la première par $-\sin\varphi$, la seconde par $\cos\varphi$, et ajoutons; il vient

$$\cos\theta\cos i\left(\frac{d\theta}{dt}-\frac{C}{r^2}\right)+\cos\theta\frac{d\varphi}{dt}-\sin\theta\sin i\frac{di}{dt}=0.$$

Remplaçons-y $\frac{d\theta}{dt}-\frac{C}{r^2}$ par sa valeur tirée de (7); il vient

$$\cos\theta\sin i\frac{d\varphi}{dt}-\sin\theta\frac{di}{dt}=0. \tag{8}$$

Les équations (7) et (8) ont comme conséquence la dernière des trois équations primitives.

$$\cos\theta\sin i\left(\frac{d\theta}{dt}-\frac{C}{r^2}\right)+\sin\theta\cos i\frac{di}{dt}=0. \tag{9}$$

Multiplions maintenant les équations (6) par ξ, η, ζ, et ajoutons; on aura

$$\frac{d^2r}{dt^2}+r\left(\xi\frac{d^2\xi}{dt^2}+\eta\frac{d^2\eta}{dt^2}+\zeta\frac{d^2\zeta}{dt^2}\right)=-\frac{k}{r^2}+\mathcal{A}\xi+\mathcal{B}\eta+\mathcal{C}\zeta;$$

or, de l'équation

$$\xi\frac{d\xi}{dt}+\eta\frac{d\eta}{dt}+\zeta\frac{d\zeta}{dt}=0$$

on tire

$$\xi\frac{d^2\xi}{dt^2}+\eta\frac{d^2\eta}{dt^2}+\zeta\frac{d^2\zeta}{dt^2}=-\left(\frac{d\xi^2}{dt^2}+\frac{d\eta^2}{dt^2}+\frac{d\zeta^2}{dt^2}\right)=-\frac{C^2}{r^4},$$

d'après les trois premières des équations (5), qu'on peut écrire

$$\left\{\begin{aligned}\frac{d\xi}{dt}&=-(\sin\theta\cos\varphi+\cos\theta\sin\varphi\cos i)\frac{C}{r^2},\\ \frac{d\eta}{dt}&=(-\sin\theta\sin\varphi+\cos\theta\cos\varphi\cos i)\frac{C}{r^2},\\ \frac{d\zeta}{dt}&=\cos\theta\sin i\frac{C}{r^2}.\end{aligned}\right. \tag{10}$$

On aura donc

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{C^2}{r^3} + \frac{k}{r^2} = \mathcal{A}\xi + \mathcal{B}\eta + \mathcal{C}\zeta. \tag{11}$$

On peut écrire les formules (10) de la manière suivante

$$\left\{\begin{aligned} \cos v \frac{d\xi}{dt} + \sin v \frac{d\eta}{dt} &= -\sin\theta \frac{C}{r^2}, \\ -\sin v \frac{d\xi}{dt} + \cos v \frac{d\eta}{dt} &= \cos\theta \cos i \frac{C}{r^2}, \\ \frac{d\zeta}{dt} &= \cos\theta \sin i \frac{C}{r^2}. \end{aligned}\right. \tag{12}$$

On en tire, en dérivant la première,

$$\begin{aligned} \cos v \frac{d^2\xi}{dt^2} + \sin v \frac{d^2\eta}{dt^2} + \left(-\sin v \frac{d\xi}{dt} + \cos v \frac{d\eta}{dt}\right)\frac{dv}{dt} \\ = -\cos\theta \frac{C}{r^2}\frac{d\theta}{dt} - \sin\theta \frac{d}{dt}\left(\frac{C}{r^2}\right). \end{aligned} \tag{13}$$

Multiplions la première des équations (6) par $\cos v$, la deuxième par $\sin v$, et ajoutons; on aura

$$\begin{aligned} r\left(\cos v \frac{d^2\xi}{dt^2} + \sin v \frac{d^2\eta}{dt^2}\right) + 2\frac{dr}{dt}\left(\cos v \frac{d\xi}{dt} + \sin v \frac{d\eta}{dt}\right) + \frac{d^2 r}{dt^2}(\xi \cos v + \eta \sin v) \\ = -\frac{k}{r^2}(\xi \cos v + \eta \sin v) + \mathcal{A}\cos v + \mathcal{B}\sin v, \end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned} r\left(\cos v \frac{d^2\xi}{dt^2} + \sin v \frac{d^2\eta}{dt^2}\right) - 2\frac{dr}{dt}\sin\theta \frac{C}{r^2} + \frac{d^2 r}{dt^2}\cos\theta \\ = -\frac{k}{r^2}\cos\theta + \mathcal{A}\cos v + \mathcal{B}\sin v, \end{aligned}$$

ou bien, en tenant compte de (13),

$$\begin{aligned} \left[-\cos\theta\cos i \frac{C}{r^2}\frac{dv}{dt} - \cos\theta \frac{C}{r^2}\frac{d\theta}{dt} - \sin\theta \frac{d}{dt}\left(\frac{C}{r^2}\right)\right] r - 2\frac{dr}{dt}\sin\theta \frac{C}{r^2} + \frac{d^2 r}{dt^2}\cos\theta \\ = -\frac{k}{r^2}\cos\theta + \mathcal{A}\cos v + \mathcal{B}\sin v, \end{aligned}$$

ou bien, en tenant compte de (7),

$$\left[\cos\theta\frac{C}{r^2}\left(\frac{d\theta}{dt}-\frac{C}{r^2}\right)-\cos\theta\frac{C}{r^2}\frac{d\theta}{dt}\right.$$
$$\left.-\frac{\sin\theta}{r^2}\frac{dC}{dt}+2\frac{\sin\theta}{r^3}C\frac{dr}{dt}\right]r-2\frac{dr}{dt}\sin\theta\frac{C}{r^2}+\frac{d^2r}{dt^2}\cos\theta$$
$$=-\frac{k}{r^2}\cos\theta+\mathcal{A}\cos v+\mathcal{B}\sin v,$$

ou, après simplifications,

$$\left(-\cos\theta\frac{C^2}{r^4}-\frac{\sin\theta}{r^2}\frac{dC}{dt}\right)r+\frac{d^2r}{dt^2}\cos\theta=-\frac{k}{r^2}\cos\theta+\mathcal{A}\cos v+\mathcal{B}\sin v,$$

ou, en tenant compte de (11),

$$\cos\theta(\mathcal{A}\xi+\mathcal{B}\eta+\mathcal{C}\zeta)-\frac{\sin\theta}{r}\frac{dC}{dt}=\mathcal{A}\cos v+\mathcal{B}\sin v,$$

ou bien

$$\frac{\sin\theta}{r}\frac{dC}{dt}=\mathcal{A}(\xi\cos\theta-\cos v)+\mathcal{B}(\eta\cos\theta-\sin v)+\mathcal{C}\zeta\cos\theta,$$

ou, enfin,

$$\text{(14)}\qquad \frac{dC}{dt}=r\left(\mathcal{A}\frac{d\xi}{dt}+\mathcal{B}\frac{d\eta}{dt}+\mathcal{C}\frac{d\zeta}{dt}\right).$$

On arriverait au même résultat en dérivant la deuxième des équations (12). Dérivons maintenant la dernière. On a

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2}=\cos\theta\sin i\frac{d}{dt}\left(\frac{C}{r^2}\right)-\sin\theta\sin i\frac{C}{r^2}\frac{d\theta}{dt}+\cos\theta\cos i\frac{C}{r^2}\frac{di}{dt}.$$

Remplaçons $\frac{d^2\zeta}{dt^2}$ par cette valeur dans la dernière des équations (6). Il vient

$$r\left[\cos\theta\sin i\frac{d}{dt}\left(\frac{C}{r^2}\right)-\sin\theta\sin i\frac{C}{r^2}\frac{d\theta}{dt}+\cos\theta\cos i\frac{C}{r^2}\frac{di}{dt}\right]$$
$$+2\frac{dr}{dt}\cos\theta\sin i\frac{C}{r^2}+\frac{d^2r}{dt^2}\sin\theta\sin i=-\frac{k}{r^2}\sin\theta\sin i+\mathcal{C},$$

ou bien, en tenant compte de (11),

$$\frac{\cos\theta \sin i}{2} \frac{dC}{dt} - \sin\theta \sin i \frac{C}{r} \frac{d\theta}{dt} + \cos\theta \cos i \frac{C}{r} \frac{di}{dt}$$
$$+ \sin\theta \sin i\left(\frac{C^2}{r^3} + \mathcal{A}\xi + \mathcal{B}\eta + \mathcal{C}\zeta\right) = \mathcal{C},$$

ou bien

$$\frac{\cos\theta \sin i}{r} \frac{dC}{dt} - \sin\theta \sin i \frac{C}{r}\left(\frac{d\theta}{dt} - \frac{C}{r^2}\right) + \cos\theta \cos i \frac{C}{r} \frac{di}{dt}$$
$$= \mathcal{C} - \sin\theta \sin i(\mathcal{A}\xi + \mathcal{B}\eta + \mathcal{C}\zeta),$$

ou bien

$$\frac{C}{r}\left[\cos\theta \cos i \frac{dC}{dt} - \sin\theta \sin i\left(\frac{d\theta}{dt} - \frac{C}{r^2}\right)\right]$$
$$= \mathcal{C} - \sin\theta \sin i(\mathcal{A}\xi + \mathcal{B}\eta + \mathcal{C}\zeta)$$
$$- \cos\theta \sin i[- \mathcal{A}(\sin\theta \cos v + \cos\theta \sin v \cos i)$$
$$+ \mathcal{B}(- \sin\theta \sin v + \cos\theta \cos v \cos i) + \mathcal{C} \cos\theta \sin i],$$

ou bien

$$\frac{C}{r}\left[\cos\theta \cos i \frac{di}{dt} - \sin\theta \sin i\left(\frac{d\theta}{dt} - \frac{C}{r^2}\right)\right]$$
$$= \cos i(\mathcal{A} \sin v \sin i - \mathcal{B} \cos v \sin i + \mathcal{C} \cos i).$$

On aura donc les deux équations

(9) $$\sin\theta \cos i \frac{di}{dt} + \cos\theta \sin i\left(\frac{d\theta}{dt} - \frac{C}{r^2}\right) = 0,$$

$$\cos\theta \cos i \frac{di}{dt} - \sin\theta \sin i\left(\frac{d\theta}{dt} - \frac{C}{r^2}\right) - \frac{r}{C} \cos i(\mathcal{A} \sin v \sin i - \mathcal{B} \cos v \sin i + \mathcal{C} \cos i).$$

On en tire

(15) $$\frac{di}{dt} = \frac{r}{C} \cos\theta(\mathcal{A} \sin v \sin i - \mathcal{B} \cos v \sin i + \mathcal{C} \cos \ ),$$

(16) $$\frac{d\theta}{dt} - \frac{C}{r^2} = - \frac{r}{C} \frac{\sin\theta \cos i}{\sin i}(\mathcal{A} \sin v \sin i - \mathcal{B} \cos v \sin i + \mathcal{C} \cos i).$$

L'équation (7) donne

(17) $$\frac{dv}{dt} = \frac{r}{C} \frac{\sin\theta}{\sin i}(\mathcal{A} \sin v \sin i - \mathcal{B} \cos v \sin i + \mathcal{C} \cos i).$$

Il reste à s'occuper de e ; la méthode est la même que celle employée dans la troisième Partie ; on se sert de la dernière des équations (5) et de l'équation (11) : on en tire

$$\frac{de}{dt}\cos(\theta-\varpi)-e\sin(\theta-\varpi)\left(\frac{d\theta}{dt}-\frac{C}{r^2}-\frac{d\varpi}{dt}\right)=2\frac{dC}{dt}\frac{1}{C}[1+e\cos(\theta-\varpi)],$$

$$\frac{de}{dt}\sin(\theta-\varpi)+e\cos(\theta-\varpi)\left(\frac{d\theta}{dt}-\frac{C}{r^2}-\frac{d\varpi}{dt}\right)=\frac{dC}{dt}\frac{1}{C}e\sin(\theta-\varpi)$$
$$+\frac{C}{k}(\mathcal{A}\xi+\mathcal{B}\eta+\mathcal{C}\zeta).$$

On aura donc finalement le système suivant, qui réalise le changement de variables :

$$\frac{dC}{dt}=r\left(\mathcal{A}\frac{d\xi}{dt}+\mathcal{B}\frac{d\eta}{dt}+\mathcal{C}\frac{d\zeta}{dt}\right), \tag{14}$$

$$\frac{di}{dt}=\frac{r}{C}\cos\theta(\mathcal{A}\sin v\sin i-\mathcal{B}\cos v\sin i+\mathcal{C}\cos i), \tag{15}$$

$$\frac{d\theta}{dt}-\frac{C}{r^2}=-\frac{r}{C}\frac{\sin\theta\cos i}{\sin i}(\mathcal{A}\sin v\sin i-\mathcal{B}\cos v\sin i+\mathcal{C}\cos i), \tag{16}$$

$$\frac{dv}{dt}=\frac{r}{C}\frac{\sin\theta}{\sin i}(\mathcal{A}\sin v\sin i-\mathcal{B}\cos v\sin i+\mathcal{C}\cos i), \tag{17}$$

$$\frac{de}{dt}=\frac{r}{C}[\cos(\theta-\varpi)+e]\left(\mathcal{A}\frac{d\xi}{dt}+\mathcal{B}\frac{d\eta}{dt}+\mathcal{C}\frac{d\zeta}{dt}\right) \tag{18}$$
$$+\frac{C}{k}[-\sin\varpi(\mathcal{A}\cos v+\mathcal{B}\sin v)$$
$$+\cos\varpi(\mathcal{A}\sin v\cos i+\mathcal{B}\cos v\cos i+\mathcal{C}\sin i)],$$

$$e\left(\frac{d\theta}{dt}-\frac{C}{r^2}-\frac{d\varpi}{dt}\right)=-\frac{r}{C}\sin(\theta-\varpi)\left(\mathcal{A}\frac{d\xi}{dt}+\mathcal{B}\frac{d\eta}{dt}+\mathcal{C}\frac{d\zeta}{dt}\right) \tag{19}$$
$$+\frac{C}{k}[\cos\varpi(\mathcal{A}\cos v+\mathcal{B}\sin v)$$
$$+\sin\varpi(\mathcal{A}\sin v\cos i+\mathcal{B}\cos v\cos i+\mathcal{C}\sin i)].$$

On peut substituer aux équations (18) et (19) les suivantes :

$$\frac{d}{dt}(e\cos\varpi)+e\sin\varpi\left(\frac{d\theta}{dt}-\frac{C}{r^2}\right) \tag{20}$$
$$=\frac{r}{C}(\cos\theta+e\cos\varpi)\left(\mathcal{A}\frac{d\xi}{dt}+\mathcal{B}\frac{d\eta}{dt}+\mathcal{C}\frac{d\zeta}{dt}\right)$$
$$+\frac{C}{k}(-\mathcal{A}\sin v\cos i+\mathcal{B}\cos v\cos i+\mathcal{C}\sin i)$$

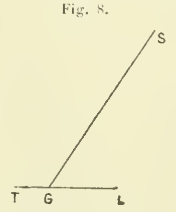
et

$$(21)\quad \frac{d}{dt}(e\sin\varpi) - e\cos\varpi\left(\frac{d\theta}{dt} - \frac{C}{r^2}\right)$$
$$= \frac{r}{C}(\sin\theta + e\sin\varpi)\left(\mathcal{A}\frac{d\xi}{d\theta} + \mathcal{B}\frac{d\eta}{d\theta} + \mathcal{C}\frac{d\zeta}{d\theta}\right) - \frac{C}{k}(\mathcal{A}\cos v + \mathcal{B}\sin v),$$

si l'on veut substituer aux quantités e et ϖ les combinaisons $e\cos\varpi$ et $e\sin\varpi$.

II. Je vais appliquer les formules précédentes à la méthode de Jacobi. On sait que cette façon de traiter le problème des trois corps consiste à déterminer le mouvement relativement au Soleil du centre de gravité de la Terre et de la Lune, et le mouvement de la Lune relativement à la Terre; on prend comme plan des XY le plan du maximum des aires, afin d'utiliser la belle propriété que les plans qui contiennent à chaque instant les orbites képlériennes se coupent sur le plan du maximum des aires.

Fig. 8.



Soient le Soleil en S, la Terre en T, la Lune en L; G le centre de gravité de la Terre et de la Lune. Soient α, β, γ les cosinus directeurs de TL et r la distance TL; ξ, η, ζ les cosinus directeurs de GS, et R la distance GS. On a les équations suivantes, qu'on peut aisément former directement ou tirer du Chapitre IV de la *Mécanique céleste* de Tisserand :

$$(22)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2 R\xi}{dt^2} = -\dfrac{1}{ST^3}\left(R\xi + \dfrac{\mu}{m+\mu} r\alpha\right)\dfrac{m}{m+\mu}(M+m+\mu) \\ \qquad\qquad - \dfrac{1}{SL^3}\left(R\xi - \dfrac{m}{m+\mu} r\alpha\right)\dfrac{\mu}{m+\mu}(M+m+\mu), \\ \dfrac{d^2 r\alpha}{dt^2} = -\dfrac{m+\mu}{r^2}\alpha - \dfrac{M}{ST^3}\left(R\xi + \dfrac{\mu r\alpha}{m+\mu}\right) + \dfrac{M}{SL^3}\left(R\xi - \dfrac{m r\alpha}{m+\mu}\right). \end{cases}$$

On a des équations analogues où α est remplacé par β, ξ par η, puis d'autres où α est remplacé par γ, ξ par ζ.

Je vais écrire également les équations que fournissent les théorèmes des aires et des forces vives dans le mouvement relatif au centre de gravité. On peut encore les former directement ou les tirer du Chapitre indiqué précédemment. Ce sont

$$(23)\quad \begin{cases} \dfrac{m\mu}{m+\mu} r^2\left(\beta \dfrac{d\gamma}{dt} - \gamma \dfrac{d\beta}{dt}\right) + \dfrac{M(m+\mu)}{M+m+\mu} R^2\left(\eta \dfrac{d\zeta}{dt} - \zeta \dfrac{d\eta}{dt}\right) = A, \\ \dfrac{m\mu}{m+\mu} r^2\left(\gamma \dfrac{d\alpha}{dt} - \alpha \dfrac{d\gamma}{dt}\right) + \dfrac{M(m+\mu)}{M+m+\mu} R^2\left(\zeta \dfrac{d\xi}{dt} - \xi \dfrac{d\zeta}{dt}\right) = A', \\ \dfrac{m\mu}{m+\mu} r^2\left(\alpha \dfrac{d\beta}{dt} - \beta \dfrac{d\alpha}{dt}\right) + \dfrac{M(m+\mu)}{M+m+\mu} R^2\left(\xi \dfrac{d\eta}{dt} - \eta \dfrac{d\xi}{dt}\right) = A'', \end{cases}$$

$$(24)\quad \begin{aligned} &\frac{m\mu}{m+\mu}\left[\frac{dr^2}{dt^2} + r^2\left(\frac{d\alpha^2}{dt^2} + \frac{d\beta^2}{dt^2} + \frac{d\gamma^2}{dt^2}\right)\right] \\ &\quad + \frac{M(m+\mu)}{M+m+\mu}\left[\frac{dR^2}{dt^2} + R^2\left(\frac{d\xi^2}{dt^2} + \frac{d\eta^2}{dt^2} + \frac{d\zeta^2}{dt^2}\right)\right] \\ &\quad = 2\left(\frac{m\mu}{r} + \frac{Mm}{ST} + \frac{M\mu}{SL}\right) + h. \end{aligned}$$

Le plan des xy étant le plan du maximum des aires, on aura

$$A = 0, \qquad A' = 0, \qquad A'' = G.$$

Néanmoins je n'introduirai cette supposition qu'un peu plus tard. Je donnerai tout d'abord la démonstration du théorème de Jacobi. Cela simplifiera beaucoup la suite des calculs. Si l'on pose

$$B = \beta \frac{d\gamma}{dt} - \gamma \frac{d\beta}{dt}, \qquad B' = \gamma \frac{d\alpha}{dt} - \alpha \frac{d\gamma}{dt}, \qquad B'' = \alpha \frac{d\beta}{dt} - \beta \frac{d\alpha}{dt},$$

le plan

$$Bx + B'y + B''z = 0$$

est parallèle au plan passant par TL et la vitesse de la Lune relativement à la Terre; de même, si l'on pose

$$D = \eta \frac{d\zeta}{dt} - \zeta \frac{d\eta}{dt}, \qquad D' = \zeta \frac{d\xi}{dt} - \xi \frac{d\zeta}{dt}, \qquad D'' = \xi \frac{d\eta}{dt} - \eta \frac{d\xi}{dt},$$

le plan

$$Dx + D'y + D''z = 0$$

est parallèle au plan passant par GS et la vitesse du Soleil relativement au point G. Les équations (23) peuvent alors s'écrire

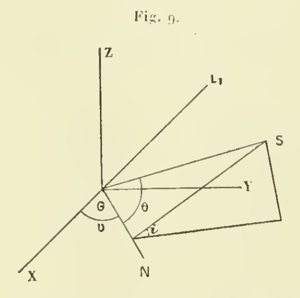
$$\frac{m\mu}{m+\mu}r^2 B + \frac{M(m+\mu)}{M+m+\mu}R^2 D = A,$$
$$\frac{m\mu}{m+\mu}r^2 B' + \frac{M(m+\mu)}{M+m+\mu}R^2 D' = A',$$
$$\frac{m\mu}{m+\mu}r^2 B'' + \frac{M(m+\mu)}{M+m+\mu}R^2 D'' = A''.$$

On en tire

$$\begin{vmatrix} B & D & A \\ B' & D' & A' \\ B'' & D'' & A'' \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation montre bien que les plans des orbites képlériennes se coupent sur le plan du maximum des aires.

Fig. 9.



Soient GX, GY, GZ des axes parallèles aux axes fixes menés par le point G. Le plan des XY est parallèle au plan du maximum des aires. Soit GL_1 égal et parallèle à TL. Soit à l'instant considéré GN la ligne des nœuds des ellipses képlériennes de S et de L_1; soient i l'inclinaison de l'orbite de S, θ la longitude dans l'orbite comptée à partir de la ligne des nœuds; soient de même i' l'inclinaison de l'orbite de L_1, et θ' la longitude dans l'orbite de L_1 comptée à partir de GN. On aura les formules

$$(25)\quad \begin{cases} \xi = \cos\theta\cos v - \sin\theta\sin v\cos i, & \alpha = \cos\theta'\cos v - \sin\theta'\sin v\cos i', \\ \eta = \cos\theta\sin v + \sin\theta\cos v\cos i, & \beta = \cos\theta'\sin v + \sin\theta'\cos v\cos i', \\ \zeta = \sin\theta\sin i, & \gamma = \sin\theta'\sin i', \end{cases}$$

Les dérivées des quantités α, β, γ et ξ, η, ζ étant celles prises dans le mouvement képlérien, on a

$$(26)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= -(\sin\theta\cos v + \cos\theta\sin v\cos i)\frac{C}{R^2},\\ \frac{d\eta}{dt} &= (-\sin\theta\sin v + \cos\theta\cos v\cos i)\frac{C}{R^2},\\ \frac{d\zeta}{dt} &= \cos\theta\sin i\frac{C}{R^2}\end{aligned}\right.$$

et

$$(27)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= -(\sin\theta'\cos v + \cos\theta'\sin v\cos i')\frac{C'}{r^2},\\ \frac{d\beta}{dt} &= (-\sin\theta'\sin v + \cos\theta'\cos v\cos i')\frac{C'}{r^2},\\ \frac{d\gamma}{dt} &= \cos\theta'\sin i'\frac{C'}{r^2},\end{aligned}\right.$$

C et C′ étant les constantes des aires dans les mouvements képlériens de S et de L_1.

Posons

$$(28)\qquad g' = \frac{m\mu}{m+\mu},\qquad g = \frac{M(m+\mu)}{M+m+\mu}.$$

Multiplions les équations des aires (23), où l'on a fait maintenant $A = 0$, $A' = 0$, $A'' = G$, respectivement par ξ, η, ζ, et ajoutons; on aura

$$(29)\qquad g'r^2\begin{vmatrix} \xi & \alpha & \frac{d\alpha}{dt}\\ \eta & \beta & \frac{d\beta}{dt}\\ \zeta & \gamma & \frac{d\gamma}{dt}\end{vmatrix} = G\zeta.$$

Multiplions-les maintenant par α, β, γ, et ajoutons; on aura

$$(30)\qquad gR^2\begin{vmatrix} \alpha & \xi & \frac{d\xi}{dt}\\ \beta & \eta & \frac{d\eta}{dt}\\ \gamma & \zeta & \frac{d\zeta}{dt}\end{vmatrix} = G\gamma.$$

Comme nous avons déjà tenu compte de la combinaison qui traduit le théorème de Jacobi, les équations (29) et (30) fournissent tout ce que l'on peut encore tirer des équations des aires. Ces équations deviennent, en y remplaçant ξ, η, ζ, α, β, γ et leurs dérivées par leurs valeurs fournies par les équations (25), (26), (27),

$$g'r^2\sin\theta(\cos i'\sin i-\sin i'\cos i)\frac{C'}{r^2}=G\sin\theta\sin i,$$

$$gR^2\sin\theta'(\cos i\sin i'-\sin i\cos i')\frac{C}{R^2}=G\sin\theta'\sin i',$$

ou bien, en désignant par H l'angle $i'-i$,

$$(31)\qquad \left\{\begin{aligned}-g'C'\sin H&=G\sin i,\\ gC\sin H&=G\sin i',\\ i'-i&=H;\end{aligned}\right.$$

les équations (31) donnent encore

$$(32)\qquad \left\{\begin{aligned}g'C'+gC\cos H&=G\cos i',\\ gC+g'C'\cos H&=G\cos i,\\ g^2C^2+g'^2C'^2+2gCg'C'\cos H&=G^2.\end{aligned}\right.$$

Ces équations montrent en particulier que i est négatif, i' positif. Le plan du maximum des aires passe entre les plans des orbites képlériennes.

Cela fait, revenons aux équations (22). Elles peuvent s'écrire

$$(33)\qquad \left\{\begin{aligned}\frac{d^2R\xi}{dt^2}&=-\frac{M+m+\mu}{R^2}\xi+\mathcal{A}, & \frac{d^2r\alpha}{dt^2}&=-\frac{m+\mu}{r^2}\alpha+\mathcal{A}',\\ \frac{d^2R\eta}{dt^2}&=-\frac{M+m+\mu}{R^2}\eta+\mathcal{B}, & \frac{d^2r\beta}{dt^2}&=-\frac{m+\mu}{r^2}\beta+\mathcal{B}',\\ \frac{d^2R\zeta}{dt^2}&=-\frac{M+m+\mu}{R^2}\zeta+\mathcal{C}, & \frac{d^2r\gamma}{dt^2}&=-\frac{m+\mu}{r^2}\gamma+\mathcal{C}',\end{aligned}\right.$$

où l'on a

$$(34)\qquad \left\{\begin{aligned}\mathcal{A}&=\mathfrak{P}\xi+\mathfrak{P}'\alpha, & \mathcal{A}'&=\mathfrak{Q}\alpha+\mathfrak{Q}'\xi,\\ \mathcal{B}&=\mathfrak{P}\eta+\mathfrak{P}'\beta, & \mathcal{B}'&=\mathfrak{Q}\beta+\mathfrak{Q}'\eta,\\ \mathcal{C}&=\mathfrak{P}\zeta+\mathfrak{P}'\gamma, & \mathcal{C}'&=\mathfrak{Q}\gamma+\mathfrak{Q}'\zeta,\end{aligned}\right.$$

avec

$$\mathfrak{P} = (M + m + \mu)\left[\frac{1}{R^2} - \frac{R}{m+\mu}\left(\frac{m}{ST^3} + \frac{\mu}{SL^3}\right)\right], \qquad \mathfrak{P}' = \frac{g'}{g} M r \left(\frac{1}{SL^3} - \frac{1}{ST^3}\right),$$

$$\mathfrak{Q} = -\frac{M r}{m+\mu}\left(\frac{m}{SL^3} + \frac{\mu}{ST^3}\right), \qquad \mathfrak{Q}' = MR\left(\frac{1}{SL^3} - \frac{1}{ST^3}\right),$$

$$(35) \qquad ST = \sqrt{R^2 + \left(\frac{\mu}{m+\mu}\right)^2 r^2 + 2Rr\frac{\mu}{m+\mu}\cos V} \qquad \left(V = \widehat{SGL_1}\right),$$

$$SL = \sqrt{R^2 + \left(\frac{m}{m+\mu}\right)^2 r^2 - 2Rr\frac{m}{m+\mu}\cos V},$$

$$\cos V = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos H.$$

Je n'ai plus qu'appliquer les formules du paragraphe I aux équations (33). On aura pour résoudre la question le système

$$R = \frac{C^2}{M+m+\mu}\,\frac{1}{1+e\cos(\theta - \varpi)}, \qquad r = \frac{C'^2}{m+\mu}\,\frac{1}{1+e'\cos(\theta' - \varpi')},$$

$$(36) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dC}{dt} &= (-\sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta'\cos H)\frac{g'}{g} MRr\left(\frac{1}{SL^3} - \frac{1}{ST^3}\right),\\ \frac{di}{dt} &= \cos\theta\sin\theta'\sin H\,\frac{1}{C}\,\frac{g'}{g} MRr\left(\frac{1}{SL^3} - \frac{1}{ST^3}\right),\\ \frac{d\theta}{dt} - \frac{C}{R^2} &= \sin\theta\sin\theta'\,\frac{gC + g'C'\cos H}{gCC'} MRr\left(\frac{1}{SL^3} - \frac{1}{ST^3}\right),\\ \frac{dC'}{dt} &= (-\sin\theta'\cos\theta + \sin\theta\cos\theta'\cos H) MRr\left(\frac{1}{SL^3} - \frac{1}{ST^3}\right),\\ \frac{di'}{dt} &= -\sin\theta\cos\theta'\sin H\,\frac{1}{C'} MRr\left(\frac{1}{SL^3} - \frac{1}{ST^3}\right),\\ \frac{d\theta'}{dt} - \frac{C'}{r^2} &= \sin\theta\sin\theta'\,\frac{g'C' + gC\cos H}{gCC'} MRr\left(\frac{1}{SL^3} - \frac{1}{ST^3}\right),\\ \frac{dv}{dt} &= -\sin\theta\sin\theta'\,\frac{G}{gCC'} MRr\left(\frac{1}{SL^3} - \frac{1}{ST^3}\right), \end{aligned}\right.$$

auquel on joindra le système des équations différentielles en e, ϖ, e', ϖ'.

Dans les équations (36), la dernière, celle qui donne $\frac{dv}{dt}$ ne sert qu'à la fin; celles qui donnent $\frac{di}{dt}$ et $\frac{di'}{dt}$ sont à la rigueur inutiles, i et i' se calculant à l'aide des équations (31) et (32); H pourrait alors être tiré en fonction de C, C' de la dernière des équations (32); mais il paraît

plus simple de le conserver et de joindre la valeur de $\frac{dH}{dt}$, soit

$$\frac{dH}{dt} = \frac{di'}{dt} - \frac{di}{dt} = -(\sin\theta\cos\theta' gC + \cos\theta\sin\theta' g'C')\frac{\sin H}{gCC'}\mathrm{MR}r\left(\frac{1}{\mathrm{SL}^3} - \frac{1}{\mathrm{ST}^3}\right).$$

Alors le système s'écrira, réduit aux équations essentielles :

$$(37)\quad \begin{cases} \dfrac{dC}{dt} = (-\sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta'\cos H)\dfrac{g'}{g}\mathrm{MR}r\left(\dfrac{1}{\mathrm{SL}^3} - \dfrac{1}{\mathrm{ST}^3}\right), \\ \dfrac{dC'}{dt} = (-\sin\theta'\cos\theta + \cos\theta'\sin\theta\cos H)\mathrm{MR}r\left(\dfrac{1}{\mathrm{SL}^3} - \dfrac{1}{\mathrm{ST}^3}\right), \\ \dfrac{d\theta}{dt} - \dfrac{C}{R^2} = \sin\theta\sin\theta'\dfrac{gC + g'C'\cos H}{gCC'}\mathrm{MR}r\left(\dfrac{1}{\mathrm{SL}^3} - \dfrac{1}{\mathrm{ST}^3}\right), \\ \dfrac{d\theta'}{dt} - \dfrac{C'}{r^2} = \sin\theta\sin\theta'\dfrac{g'C' + gC\cos H}{gCC'}\mathrm{MR}r\left(\dfrac{1}{\mathrm{SL}^3} - \dfrac{1}{\mathrm{ST}^3}\right), \\ \dfrac{dH}{dt} = -(\sin\theta\cos\theta' gC + \cos\theta\sin\theta' g'C')\dfrac{\sin H}{gCC'}\mathrm{MR}r\left(\dfrac{1}{\mathrm{SL}^3} - \dfrac{1}{\mathrm{ST}^3}\right). \end{cases}$$

Les équations en e, ϖ, e', ϖ' sont ensuite :

$$(38)\quad \begin{cases} \dfrac{de}{dt} = \dfrac{R}{C}[\cos(\theta - \varpi) + e](-\sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta'\cos H)\mathfrak{P}' \\ \qquad + \dfrac{C}{M + m + \mu}[\mathfrak{P}\sin(\theta - \varpi) + \mathfrak{P}'(-\sin\varpi\cos\theta' + \cos\varpi\sin\theta'\cos H)], \\ e\left(\dfrac{d\theta}{dt} - \dfrac{C}{R^2} - \dfrac{d\varpi}{dt}\right) \\ \qquad = -\dfrac{R}{C}\sin(\theta - \varpi)(-\sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta'\cos H)\mathfrak{P}' \\ \qquad + \dfrac{C}{M + m + \mu}[\mathfrak{P}\cos(\theta - \varpi) + \mathfrak{P}'(\cos\varpi\cos\theta' + \sin\varpi\sin\theta'\cos H)], \\ \dfrac{de'}{dt} = \dfrac{r}{C'}[\cos(\theta' - \varpi') + e'](-\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta'\cos H)\mathfrak{Q}' \\ \qquad + \dfrac{C'}{m + \mu}[\mathfrak{Q}\sin(\theta' - \varpi') + \mathfrak{Q}'(-\sin\varpi'\cos\theta + \cos\varpi'\sin\theta\cos H)], \\ e'\left(\dfrac{d\theta'}{dt} - \dfrac{C'}{r^2} - \dfrac{d\varpi'}{dt}\right) \\ \qquad = -\dfrac{r}{C'}\sin(\theta' - \varpi')(-\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta'\cos H)\mathfrak{Q}' \\ \qquad + \dfrac{C'}{m + \mu}[\mathfrak{Q}\cos(\theta' - \varpi') + \mathfrak{Q}'(\cos\varpi'\cos\theta + \sin\varpi'\sin\theta\cos H)]. \end{cases}$$

On pourrait substituer à ces équations celles qui ont comme inconnues $e\cos\varpi$, $e\sin\varpi$, $e'\cos\varpi'$, $e'\sin\varpi'$. Ce sont

$$(39)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(e\cos\varpi)+e\sin\varpi\left(\frac{d\theta}{dt}-\frac{C}{R^2}\right)\\
&\quad=\frac{R}{C}(\cos\theta+e\cos\varpi)(-\sin\theta\cos\theta'+\cos\theta\sin\theta'\cos H)\mathfrak{P}'\\
&\qquad+\frac{C}{M+m+\mu}(\mathfrak{P}\sin\theta+\mathfrak{P}'\sin\theta'\cos H),\\
&\frac{d}{dt}(e\sin\varpi)-e\cos\varpi\left(\frac{d\theta}{dt}-\frac{C}{R^2}\right)\\
&\quad=\frac{R}{C}(\sin\theta+e\sin\varpi)(-\sin\theta\cos\theta'+\cos\theta\sin\theta'\cos H)\mathfrak{P}'\\
&\qquad+\frac{C}{M+m+\mu}(\mathfrak{P}\cos\theta+\mathfrak{P}'\cos\theta'),\\
&\frac{d}{dt}(e'\cos\varpi')+e'\sin\varpi'\left(\frac{d\theta'}{dt}-\frac{C'}{r^2}\right)\\
&\quad=\frac{r}{C'}(\cos\theta'+e'\cos\varpi')(-\sin\theta'\cos\theta+\cos\theta'\sin\theta\cos H)\mathfrak{Q}'\\
&\qquad+\frac{C'}{m+\mu}(\mathfrak{Q}\sin\theta'+\mathfrak{Q}'\sin\theta\cos H),\\
&\frac{d}{dt}(e'\sin\varpi')-e'\cos\varpi'\left(\frac{d\theta'}{dt}-\frac{C'}{r^2}\right)\\
&\quad=\frac{r}{C'}(\sin\theta'+e'\sin\varpi')(-\sin\theta'\cos\theta+\cos\theta'\sin\theta\cos H)\mathfrak{Q}'\\
&\qquad+\frac{C'}{m+\mu}(\mathfrak{Q}\cos\theta'+\mathfrak{Q}'\cos\theta).
\end{aligned}\right.$$

III. Je terminerai en donnant l'expression de l'intégrale des forces vives avec les nouvelles variables. Il n'y a qu'à reprendre l'équation (24). Elle devient

$$\begin{aligned}
&\frac{m\mu(m+\mu)}{C'^2}(e'^2-1)+\frac{M(m+\mu)(M+m+\mu)}{C^2}(e^2-1)\\
&\quad=2\left[\frac{Mm}{ST}+\frac{M\mu}{SL}-\frac{M(m+\mu)}{R}\right]+h.
\end{aligned}$$

Tels sont les points les plus essentiels et les formules les plus simples de la méthode de Jacobi.

Sur certains mouvements remarquables et leurs applications;

PAR **M. J. HAAG.**

L'objet de ce Mémoire est la définition et l'étude approfondie de certains mouvements remarquables, dont l'importance me semble suffisamment justifiée par leur intérêt propre, d'une part, et par les applications géométriques qu'on en peut tirer, d'autre part. J'en ai dit quelques mots dans ma Thèse de Doctorat (¹) et dans diverses communications à l'Académie des Sciences (*Comptes rendus*, 1908). D'autres géomètres (²) ont rencontré quelques-uns de ces mouvements à propos de questions diverses. Mais aucun ne les a rassemblés en une étude spéciale, établissant leur classification et leurs principales propriétés, et pouvant servir de base dans toutes les recherches où ils s'introduisent. C'est ce que je vais essayer de faire ici.

Dans une *première Partie*, j'ai dû apporter quelques éclaircissements sur une question de Cinématique générale, à savoir la *viration des surfaces réglées*. J'ai simplement développé les résultats que je m'étais borné à énoncer dans une Note à l'Académie des Sciences (24 août 1908).

Dans la *deuxième Partie*, je donne la définition générale des *mouvements* (G). Puis j'établis leur classification et j'étudie en même temps leurs propriétés.

Enfin, dans une *troisième et dernière Partie*, j'indique quelques

---

(¹) J. HAAG, *Familles de Lamé composées de surfaces égales*, etc. (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1910).

(²) Par exemple, M. HAZZIDAKIS, *Journal de Crelle*, 1883.

applications géométriques, autres que celle qui se trouve dans ma Thèse de Doctorat (*points à vitesse invariable par rapport à la figure mobile; surfaces à lignes géodésiques ou asymptotiques égales; surfaces applicables admettant une famille de lignes égales homologues*).

I. — Viration de deux surfaces réglées.

1. Considérons le mouvement relatif de deux corps solides S et S′. Soit G l'axe instantané relatif au temps t. Quand t varie, G décrit une surface réglée Σ, par rapport à S, et une surface réglée Σ′, par rapport à S′. La succession des positions relatives que prennent ces deux surfaces pendant la durée du mouvement constitue ce qu'on appelle *la viration des deux surfaces l'une sur l'autre*. Il est clair que le mouvement est parfaitement déterminé, dès que l'on connaît les deux surfaces Σ et Σ′, ainsi que la manière de réaliser la viration. C'est pourquoi il est intéressant de rechercher, d'une manière précise, *quelles sont les relations qui doivent exister entre deux surfaces réglées pour qu'on puisse les faire virer l'une sur l'autre et comment on peut réaliser la viration, lorsque ces conditions sont remplies.*

On peut y arriver par une méthode purement géométrique, reposant sur la considération de deux positions infiniment voisines de Σ par rapport à Σ′. On pénètre, de cette façon, au cœur de la question; mais, pour obtenir toute la rigueur nécessaire, il y a lieu d'entrer dans des détails qui allongent considérablement la rédaction ([1]). C'est pourquoi nous nous contenterons d'exposer ici une solution analytique beaucoup plus rapide, qui nous a été inspirée par une méthode élégante, fréquemment employée par M. Kœnigs pour l'étude de certaines propriétés de Géométrie cinématique ([2]), et qui repose sur le théorème de la composition des vitesses.

Fixons un sens positif arbitraire sur l'axe instantané G et par suite sur chacune des génératrices de Σ et de Σ′. Menons par un point fixe O

([1]) C'est cette méthode que nous avions suivie pour établir les résultats publiés dans notre Note du 24 août 1908. Elle nous avait précisément conduit, pour n'avoir pas pris assez de précautions dans l'évaluation des infiniment petits, à commettre une erreur que nous avons corrigée depuis dans un erratum.

([2]) *Voir* par exemple Kœnigs, *Leçons de Cinématique*.

un vecteur $O\mu$, de longueur 1, et possédant la direction et le sens de G. Imaginons un corps solide σ, pouvant pivoter autour de O et conservant une orientation invariable par rapport à Σ, et un corps solide σ' défini de la même façon au moyen de Σ'. Le point μ décrit une courbe sphérique γ, par rapport à σ, et une courbe sphérique γ', par rapport à σ'. Choisissons arbitrairement sur γ un système d'abscisses curvilignes et prenons l'abscisse curviligne du point μ pour variable t jouant le rôle du temps [1]. Soit OXYZ le trièdre trirectangle et positif, dont l'axe OZ est dirigé suivant $O\mu$ et dont l'axe OY est parallèle à la demi-tangente positive de γ au point μ. Menons enfin, par le point central M de G sur Σ, le trièdre MXYZ parallèle au précédent.

Lorsque t varie, ce trièdre est animé, par rapport à Σ, d'un certain mouvement, dont nous désignerons les rotations et translations composantes par p, q, r, ξ, η, ζ. Il est facile de calculer ces quantités au moyen des éléments de Σ et de γ. Tout d'abord, la considération du mouvement de OXYZ par rapport à σ permet d'obtenir les rotations. On trouve sans peine

$$(1) \qquad p = -1, \qquad q = 0, \qquad r = -\cot\psi,$$

en appelant $\tan g\psi$ le *rayon de courbure géodésique de la courbe sphérique* γ, mesuré parallèlement à OX.

Choisissons maintenant sur la ligne de striction Γ de Σ un système arbitraire d'abscisses curvilignes et soient s l'abscisse curviligne du point M et α l'angle de MZ avec la demi-tangente positive à Γ, angle

---

[1] Ceci écarte évidemment la *viration des cylindres*. Mais il est manifeste qu'on peut faire virer l'un sur l'autre deux cylindres quelconques, suivant un pas également quelconque. Soit $Oxyz$ un trièdre trirectangle invariablement lié à Σ', Oz étant parallèle aux génératrices. Soit C' la section de Σ' par xOy. Dans la viration de Σ sur Σ', la section droite C de Σ par xOy doit rouler sans glissement sur C'. En outre, si t désigne l'abscisse curviligne du point de contact M de ces deux lignes, abscisse qui est la même sur C et sur C', et si R et R' désignent les rayons de courbure en ce point, la cote z d'un point invariablement lié à Σ est donnée par

$$z = \int k\left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R}\right) dt.$$

La viration se réalise donc entièrement par quadratures.

mesuré dans le plan orienté ZMX, qui est le plan central. On a visiblement

$$(2) \qquad \xi = \frac{ds}{dt}\sin\alpha, \qquad \eta = 0, \qquad \zeta = \frac{ds}{dt}\cos\alpha.$$

Remarquons encore que le paramètre de distribution k de G sur Σ est égal à ξ, car, si ω est l'angle polaire du plan tangent au point de cote z, on constate aisément qu'on a $z = \xi \tang\omega$.

Soient maintenant p', q', r', ξ', η', ζ' les rotations et translations du trièdre MXYZ dans son mouvement par rapport à Σ'. Si l'on considère le mouvement de Σ' par rapport à Σ, ses éléments cinématiques relatifs au point M ont pour projections, sur MXYZ, $p - p'$, $q - q'$, $r - r'$, $\xi - \xi'$, $\eta - \eta'$, $\zeta - \zeta'$, cela en vertu du théorème de la composition des vitesses. Pour que MZ soit l'axe instantané, il faut et suffit qu'on ait

$$p - p' = q - q' = \xi - \xi' = \eta - \eta' = 0;$$

d'où

$$p' = -1, \qquad q' = 0, \qquad \xi' = \xi, \qquad \eta' = 0.$$

Les deux premières équations expriment que γ' *roule sans glisser sur* γ, la quatrième que M *est le point central de* G *sur* Σ', et la troisième que *le paramètre de distribution est le même sur les deux surfaces*, qui se raccordent donc le long de G [1]. De là résulte le théorème suivant :

Théorème. — *Pour que deux surfaces réglées puissent virer l'une sur l'autre, il faut et il suffit qu'on puisse établir entre leurs génératrices une correspondance telle que :*

1° *Deux génératrices homologues aient même paramètre de distribution, en grandeur et en signe;*

2° *Les arcs homologues des indicatrices sphériques des génératrices soient égaux.*

Si l'on connaît un couple de surfaces satisfaisant à ces conditions, il suffit, pour réaliser leur viration, de les raccorder successivement suivant leurs génératrices homologues.

---

[1] Cette propriété est fort connue. M. Kœnigs a aussi démontré la première dans le cas où les surfaces Σ et Σ' sont développables (*loc. cit.*, p. 210).

Il peut arriver que, pour deux surfaces données, il y ait plusieurs façons d'établir une correspondance jouissant des propriétés précédentes. Il en est ainsi, par exemple, si les deux surfaces ont le même paramètre de distribution constant; dans ce cas, il suffit que la correspondance conserve les longueurs des arcs des indicatrices, ce qui laisse visiblement subsister une constante arbitraire. Ceci arrive, en particulier, pour deux développables quelconques, pourvu qu'une seule d'entre elles ne se réduise pas à un cylindre.

2. *Introduisons maintenant le pas h du mouvement.* Nous avons

$$(3)\qquad h = \frac{\zeta - \zeta'}{r - r'},$$

ou, en appelant ψ', s' et α' les quantités analogues à ψ, s et α, relatives à Σ',

$$(4)\qquad h = \frac{\frac{ds}{dt}\cos\alpha - \frac{ds'}{dt}\cos\alpha'}{\cot\psi' - \cot\psi},$$

ou encore

$$(5)\qquad h = k\,\frac{\cot\alpha' - \cot\alpha}{\cot\psi - \cot\psi'}.$$

Dans le cas des surfaces développables, cette dernière formule devient illusoire, car k devient nul et $\cot\alpha$ et $\cot\alpha'$ deviennent infinis. Mais, si l'on fixe sur les deux arêtes de rebroussement des sens positifs tels que MZ soit la demi-tangente positive commune au point M, les angles α et α' sont nuls, les quantités $\frac{ds}{dt}$ et $\frac{ds'}{dt}$ sont les rayons de courbure de Γ et Γ', mesurés sur MY, et la formule (4) devient

$$(6)\qquad h = \frac{R - R'}{\cot\psi' - \cot\psi}.$$

On peut aussi introduire les rayons de torsion T et T', mesurés sur MY. On établit sans peine la formule

$$\cot\psi = \frac{R}{T},$$

moyennant quoi (6) devient [1]

$$h = \frac{R - R'}{\frac{R'}{T'} - \frac{R}{T}}. \tag{7}$$

Nous n'insisterons pas sur les applications qu'on pourrait tirer des formules précédentes et nous nous arrêterons seulement sur le *cas où le pas est nul*, afin d'établir un théorème qui nous servira dans la seconde partie de notre Mémoire.

Rappelons tout d'abord que, pour que le pas soit nul, il faut et suffit que les deux surfaces soient applicables avec correspondance des génératrices [2]. D'autre part, suivant que les surfaces sont développables ou non, les formules (6) ou (5) nous donnent la condition supplémentaire

$$R = R' \qquad \text{ou} \qquad \alpha' = \alpha.$$

D'où résultent les théorèmes suivants :

Théorème I. — *Pour que, sur deux surfaces développables, les génératrices se correspondent dans la déformation, il faut et suffit que le rayon de courbure de l'arête de rebroussement ait la même valeur, pour les deux surfaces, en fonction de l'arc de cette arête.*

Théorème II. — *Pour que deux surfaces réglées non développables soient applicables avec correspondance des génératrices rectilignes, il faut et suffit que :*

1° *Les génératrices homologues aient même paramètre de distribution ;*

2° *Les arcs homologues des indicatrices sphériques des génératrices soient égaux ;*

---

(1) Cette formule se trouve implicitement dans l'Ouvrage déjà cité de M. Kœnigs (p. 209).

(2) Cette propriété, qui est fort connue, peut encore se déduire immédiatement de ce qui précède. L'élément linéaire de la surface Σ est en effet

$$ds^2 = dt^2(\zeta^2 + z^2) + (dz + \zeta\, dt)^2.$$

Pour qu'il soit identique à celui de Σ', il faut et il suffit qu'on ait $\zeta = \zeta'$, d'où $h = 0$, en vertu de (3).

3° *Les lignes de striction coupent les génératrices homologues sous le même angle.*

Remarquons que, pour ce second théorème, l'une quelconque des trois conditions peut se remplacer par la suivante : *les arcs homologues des deux lignes de striction sont égaux.*

3. Revenant au cas général, posons-nous maintenant le problème suivant :

Étant donnée une surface réglée Σ', déterminer toutes les surfaces réglées Σ qu'on peut faire virer sur elle.

Nous supposons toujours que Σ' n'est pas un cylindre. Si nous conservons les rotations employées jusqu'ici, nous connaissons les trois fonctions de t suivantes :

$$\alpha', \quad \psi', \quad k.$$

Je dis maintenant que *l'on peut se donner arbitrairement le pas relatif à chaque génératrice de Σ', ainsi que le cône directeur de Σ.* En effet, cela revient à se donner arbitrairement les fonctions h et ψ de t [1]. L'équation (5) nous permet ensuite de calculer $\cot\alpha$, et nous sommes ramenés au problème suivant :

Déterminer une surface réglée connaissant son cône directeur, le paramètre de distribution relatif à chaque génératrice et l'angle de celle-ci avec la ligne de striction.

A cet effet, remarquons que, en vertu des formules (2), le vecteur vitesse du point M, dans son mouvement par rapport à Σ, a pour projections k, o, $k\cot\alpha$ sur μX, μY, μZ. Par conséquent, si a', b', c' ; a'', b'', c'' ; a, b, c désignent les cosinus directeurs de ces demi-droites par rapport à un certain trièdre fixe $Oxyz$, cosinus faciles à calculer en fonction de t dès qu'on se donne γ, et si x_0, y_0, z_0 sont les coordonnées

---

(1) ψ ne sera d'ailleurs déterminé qu'à une constante près, car on pourra faire correspondre un point choisi arbitrairement sur γ à un point donné de γ'.

du point M par rapport au même trièdre, on a

$$(8)\qquad \begin{cases} x_0 = \int k(a' + a\cot\alpha)\,dt, \\ y_0 = \int k(b' + b\cot\alpha)\,dt, \\ z_0 = \int k(c' + c\cot\alpha)\,dt. \end{cases}$$

Dans le cas où Σ' est une développable, la formule (6) nous donnera R en fonction de t. On pourra encore employer les équations (8), mais il faudra y remplacer k par zéro et $k\cot\alpha$ par R.

Finalement, nous voyons que *le problème que nous nous étions posé se résout par des quadratures*, ce qu'on aurait d'ailleurs pu prévoir autrement [1].

Les formules précédentes permettent de résoudre d'une façon élégante un certain nombre de questions, sur lesquelles nous ne pouvons nous étendre ici. Elles donnent par exemple la solution du problème classique de la déformation des surfaces réglées, avec conservation des génératrices rectilignes, et conduisent sans peine à toutes les propositions bien connues relatives à cette intéressante question [2].

Arrivons maintenant à l'étude de nos mouvements remarquables.

II. — Mouvements (G).

4. Définition des mouvements G. — Soit un trièdre mobile $Oxyz$ ou (T), dépendant d'un paramètre t et admettant les rotations et translations composantes p, q, r, ξ, η, ζ. Supposons que *ces six fonctions de t soient liées par $6 - n$ relations linéaires et homogènes distinctes, à coefficients constants.* Nous dirons alors que le mouvement du trièdre (T) est *un mouvement* (G_n).

---

(1) *Voir* Kœnigs, *loc. cit.*, p. 200.

(2) *Voir* à ce propos Kœnigs, *loc. cit.*, p. 205, et Darboux, *Théorie des surfaces* (Livre VII, Chap. VI). Si l'on prend une courbe (γ) symétrique de (γ') par rapport à un plan diamétral tangent à (γ'), on trouve la *déformation de Beltrami*, avec toutes les remarques faites à ce sujet par M. Darboux.

Si nous considérons tous les systèmes de rotations et translations qui vérifient le même groupe de relations, il leur correspond une infinité de mouvements, qui constituent ce que nous appellerons *un groupe* (g_n). Le plus général de ces mouvements admet évidemment des rotations et translations de la forme suivante :

$$(1)\quad \left\{ \begin{array}{lll} p = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i, & q = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i q_i, & r = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i r_i, \\ \xi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i, & \eta = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \eta_i, & \zeta = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \zeta_i; \end{array} \right.$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ désignent n fonctions arbitraires de t, et les p_i, $q_i, \ldots, \zeta_i$ des constantes telles qu'il ne soit pas possible d'annuler p, $q, \ldots, \zeta$ sans annuler simultanément tous les λ_i.

Parmi les mouvements d'un groupe (g_n) se trouvent une *infinité de mouvements hélicoïdaux uniformes*, obtenus en donnant des valeurs constantes quelconques aux λ_i. En particulier, il y a lieu de considérer ce que nous appellerons les *mouvements de base* du groupe : le mouvement de base (H_i) est celui dont les composantes sont p_i, $q_i, \ldots, \zeta_i$. Si nous convenons d'appeler *mouvements hélicoïdaux linéairement indépendants* n mouvements hélicoïdaux qui ne font pas partie d'un même groupe (g_{n-1}), il est clair qu'étant donné un groupe (g_n), *on peut choisir comme mouvements de base n mouvements hélicoïdaux quelconques du groupe*, à condition qu'ils soient linéairement indépendants.

Les mouvements de base d'un groupe (g_n) donnent lieu aux remarques suivantes : d'abord, si l'on considère un mouvement quelconque du groupe, *à chaque instant t, ce mouvement est tangent à celui qui résulte de la composition des mouvements de base, en supposant que la vitesse uniforme de (H_i) a été au préalable multipliée par la valeur que possède la fonction λ_i à l'époque t considérée.* Mais, si l'on considère le mouvement fini, on ne peut pas l'obtenir en général par la superposition de mouvements hélicoïdaux continus ayant mêmes axes et mêmes pas que les mouvements de base et des vitesses variables. Il nous semble donc inexact de dire, comme l'ont fait certains auteurs,

qu'un mouvement (G) quelconque résulte de la composition de plusieurs mouvements hélicoïdaux.

Voici maintenant une propriété qui nous sera utile dans la suite :

Théorème. — *Étant donné un groupe* (g_n) *quelconque, si, sans changer les axes des mouvements de base, on augmente leurs pas d'une même constante* k, *on obtient* n *nouveaux mouvements hélicoïdaux linéairement indépendants, d'où dérive un nouveau groupe* (g'_n). *Les mouvements hélicoïdaux du groupe* (g'_n) *peuvent tous se déduire des mouvements hélicoïdaux du groupe* (g_n), *en conservant les axes de ceux-ci et augmentant leurs pas de la constante* k.

Pour démontrer cette proposition, voyons d'abord en quoi diffèrent les composantes de deux mouvements hélicoïdaux qui ont même axe et des pas inégaux. En premier lieu, les rotations doivent être proportionnelles ; on peut même les supposer égales, si l'on ne veut pas tenir compte des grandeurs des vitesses. Soient d'autre part h et h' les deux pas. Les équations

$$\xi + qz - ry = hp, \qquad \xi' + qz - ry = h'p$$

doivent représenter la même droite dans yOz, à savoir la projection, sur ce plan, de l'axe commun aux deux mouvements. D'où l'on conclut que, *pour que les deux mouvements aient même axe, il faut et suffit qu'on ait*

(2) $$\xi' = \xi + kp, \qquad \eta' = \eta + kq, \qquad \zeta' = \zeta + kr;$$

auquel cas les pas sont liés par

(3) $$h' = h + k.$$

Ceci étant, les rotations de (H'_i) peuvent être prises égales aux rotations de (H_i), les translations étant données par

$$\xi'_i = \xi_i + kp_i, \qquad \eta'_i = \eta_i + kq_i, \qquad \zeta'_i = \zeta_i + kr_i.$$

Il est élémentaire de démontrer que les n mouvements (H'_i) sont linéairement indépendants en même temps que les n mouvements (H_i) et peuvent donc donner naissance à un groupe (g'_n). Si l'on considère

maintenant les mouvements (H) et (H′) des deux groupes qui correspondent à de mêmes valeurs attribuées aux λ, nous aurons évidemment

$$p' = p, \qquad q' = q, \qquad r' = r,$$
$$\xi' = \xi + kp, \qquad \eta' = \eta + kq, \qquad \zeta' = \zeta + kr;$$

ce qui démontre le théorème.

5. Dans les questions de Géométrie où interviennent les mouvements (G), il arrive souvent que la variable t ne joue aucun rôle particulier. Dans ce cas, on peut, sans restreindre la généralité, supposer que l'une quelconque des fonctions arbitraires λ_i possède une valeur donnée à l'avance, par exemple la valeur 1. Cela résulte de ce que si l'on change t en $f(t)$, les nouvelles rotations et translations se déduisent des anciennes en les divisant par $f'(t)$. On voit donc que, si l'on se place au point de vue purement géométrique, les mouvements d'un groupe (g_n) dépendent de $n-1$ fonctions arbitraires d'une variable.

6. L'importance des mouvements (G) résulte de ce qu'on les rencontre nécessairement dans toute question où, ayant fait usage d'un trièdre mobile, dépendant d'un paramètre t, on est conduit, pour exprimer certaines conditions, à une ou plusieurs relations linéaires entre les rotations et translations de ce trièdre, les coefficients de ces relations étant soit des constantes, soit des fonctions d'un ou plusieurs arguments autres que t. Si l'on donne, en effet, à ces arguments toutes les valeurs numériques possibles, on obtient des relations linéaires à coefficients constants.

Il peut arriver que ces relations linéaires ne soient pas toutes homogènes. Dans ce cas, si le nombre des relations distinctes est $6-n$, on a par exemple

$$p = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \ldots + \lambda_n p_n + p_{n+1},$$

les λ_i étant des fonctions arbitraires de t et les p_i des constantes déterminées. Il est clair qu'*on a alors affaire à un groupe* (g_{n+1}); mais *le temps joue un rôle particulier*, puisque la fonction λ_{n+1} est égale à l'unité.

7. Les généralités qui précèdent étant exposées, nous allons étudier

d'une manière approfondie les propriétés des groupes (g_n) et établir une classification de ceux-ci pour chaque valeur du nombre n.

Nous ne dirons rien des groupes (g_1), puisqu'un tel groupe ne comprend évidemment qu'un seul mouvement, qui est un mouvement hélicoïdal (en comprenant aussi sous cette dénomination la rotation et la translation).

Groupes (g_2). — La classification des différents groupes (g_2), ainsi d'ailleurs que celle des groupes d'ordre supérieur, résulte très simplement de l'étude méthodique de la distribution des axes des mouvements hélicoïdaux de chacun d'eux.

Nous ferons d'abord remarquer que, suivant la valeur des p_i, q_i, r_i, ces axes prennent toutes les directions d'un plan fixe, ou bien sont tous parallèles entre eux, ou bien sont tous rejetés à l'infini. D'où trois cas principaux à distinguer :

8. Premier cas : *Les axes prennent toutes les directions d'un plan fixe.* — Nous pouvons supposer ce plan parallèle au plan des xy, auquel cas r_1 et r_2 sont nuls. Nous pouvons, en outre, prendre pour λ_1 et λ_2 les fonctions p et q, de sorte que les trois translations sont alors de la forme $p\xi_1 + q\xi_2$, $p\eta_1 + q\eta_2$, $p\zeta_1 + q\zeta_2$. L'équation du pas

$$\frac{p\xi + q\eta}{p^2 + q^2} = h$$

nous montre qu'à chaque valeur de h correspondent deux directions d'axes, symétriques par rapport à deux directions fixes, que nous pouvons adopter pour Ox et Oy, et que nous appellerons *directions principales du groupe*. Prenons même pour Ox l'axe du mouvement de base (H_1); si A désigne le pas de ce mouvement, nous avons

$$\xi_1 = A, \qquad \eta_1 = 0, \qquad \zeta_1 = 0.$$

Si nous annulons alors le terme en pq dans $p\xi + q\eta$, nous trouvons que ξ_2 doit être nul ; d'où il résulte que l'axe de (H_2) est dans xOy. Si nous prenons cet axe pour Oy, nous avons $\zeta_2 = 0$, et $\eta_2 = B$, en appelant B le pas de (H_2). Finalement, le mouvement le plus général du groupe est défini par les formules

$$(4) \qquad \xi = Ap, \qquad \eta = Bq, \qquad \zeta = 0, \qquad r = 0,$$

Les axes Ox et Oy seront appelés les *droites principales* du groupe et les nombres A et B ses *nombres caractéristiques.*

Il nous est maintenant facile d'avoir l'axe qui a pour angle polaire θ dans le plan xOy et le pas h correspondant. Un calcul élémentaire montre que cet axe est perpendiculaire à Oz, au point de cote

$$z = (B - A)\sin\theta\cos\theta, \tag{5}$$

et que le pas correspondant est

$$h = A\cos^2\theta + B\sin^2\theta. \tag{6}$$

La formule (5) nous conduit à distinguer deux cas, suivant que $B - A$ est nul ou différent de zéro.

9. I. *Les nombres caractéristiques sont différents.* — Dans ce cas, les axes engendrent un *conoïde de Plücker*, qui est représenté par l'équation (5) en coordonnées semi-polaires. Si l'on néglige les mouvements hélicoïdaux, *le mouvement le plus général du groupe sera engendré par la viration de ce conoïde*, suivant un pas déterminé, pour chaque génératrice, par la formule (6). Il suffira d'appliquer les résultats des n°s 2 et 3 pour avoir ce mouvement par des quadratures. Si l'on prend, par exemple, le conoïde pour surface Σ', la courbe γ' est le cercle du plan xOy qui a pour centre O et pour rayon 1, et l'on peut choisir l'angle θ pour variable t. Quant à la ligne de striction Γ', ce n'est autre que Oz. Si nous y prenons comme sens positif celui de Oz, il n'y a aucune difficulté à calculer les quantités α', ψ', k; on trouve

$$\alpha' = -\frac{\pi}{2}, \qquad \psi' = \frac{\pi}{2}, \qquad k = \frac{ds'}{dt}\sin\alpha' = (A - B)\cos 2t. \tag{7}$$

Comme, d'autre part, le pas est donné par (6), nous avons tous les éléments nécessaires pour réaliser la viration. La comparaison des valeurs de h et de k nous donne le théorème suivant :

Pour que la viration d'un conoïde de Plücker donne naissance à un mouvement (G_2), il faut et il suffit que le pas relatif à chaque génératrice diffère par une constante du demi-paramètre de distribution de cette génératrice.

Ceci concorde bien avec avec le théorème général du n° 4.

10. Directrices du mouvement. — Nous allons arriver à une autre génération très élégante du mouvement, par la considération des *génératrices de pas nul*. Ces génératrices sont données par

$$\operatorname{tang}^2\theta = -\frac{A}{B}$$

et constituent ce que nous appellerons *deux génératrices symétriques du conoïde*. Elles ne sont réelles qui si les nombres caractéristiques sont de signe contraire. C'est ce que nous supposerons.

Admettons d'abord qu'aucun des deux nombres A et B n'est nul, ainsi que la somme A + B. Nos deux génératrices Δ et Δ' sont alors *distinctes et non rectangulaires*. D'après la théorie des systèmes de complexes linéaires (¹), ces deux droites sont constamment conjuguées dans le mouvement. Par suite, la vitesse d'un point quelconque M de Δ est perpendiculaire au plan (M, Δ') ce qu'il ne serait d'ailleurs pas difficile de vérifier par un calcul direct.

Ceci étant, considérons les deux hyperboloïdes de révolution H et H' ayant pour axe et pour génératrice : le premier Δ et Δ', le second Δ' et Δ. Soient d'autre part S et S' les surfaces réglées engendrées par Δ' et Δ. La vitesse du point M étant perpendiculaire au plan (M, Δ'), la trajectoire de ce point est tangente au parallèle de H' qui y passe. On conclut de cette simple remarque, d'abord que H' se raccorde à S' le long de Δ, en second lieu que la ligne de striction de S' est tangente au cercle de gorge, c'est-à-dire à la ligne de striction de H'. On est donc en droit d'appliquer le théorème de la page 348; autrement dit S' provient de H' par *flexion*. Il est évident que S résulte de H de la même manière.

Réciproquement, supposons que S' soit une surface réglée provenant de H' par flexion suivant les génératrices de même système que Δ. Imaginons maintenant qu'on fasse *glisser* H' sur S' en l'amenant à se raccorder avec S' suivant Δ d'une part et suivant les génératrices successives de S' d'autre part, ce qui est évidemment possible. Tout point M de Δ décrit, dans ce mouvement, un parallèle déformé, lequel est tangent au parallèle véritable de H'. Il en résulte que la vitesse de M est

---

(¹) *Voir* par exemple Koenigs, *Géométrie réglée*.

perpendiculaire au plan (M, Δ′). Or, si l'on exprime analytiquement cette condition, on retombe sur les équations (4), et par conséquent notre glissement donne naissance à un mouvement du groupe.

En résumé, tout mouvement du groupe (g_2) défini par les équations (4) peut être engendré de la manière suivante :

On cherche les deux droites Δ et Δ′, auxquelles nous donnons le nom de DIRECTRICES. *On construit les deux hyperboloïdes* H *et* H′. *On déforme* H′ *par flexion suivant les génératrices de même système que* Δ *et l'on fait ensuite* GLISSER H′, *suivant* Δ, *sur la surface réglée obtenue. Le mouvement que prend ainsi* H′ *est le mouvement cherché.*

Dans ce mouvement, l'hyperboloïde H *glisse de même, suivant* Δ′, *sur une de ses déformées* [1].

11. Les mouvements actuels se rattachent aussi, d'une façon très étroite, aux *courbes de Bertrand*. Considérons, en effet, les pieds P et P′ de Oz sur Δ et Δ′. D'après un théorème de Laguerre, ces points décrivent deux courbes de Bertrand associées. Cela résulte d'ailleurs immédiatement de ce que ces courbes sont respectivement des géodésiques de S′ et de S, puisque les cercles de gorge sont des géodésiques sur les hyperboloïdes. On peut aussi le vérifier analytiquement en étudiant les éléments des deux courbes décrites, dans le mouvement du trièdre Oxyz, par les points de Oz qui ont pour cote $\pm(\mathrm{B}-\mathrm{A})\sin\theta\cos\theta$, sachant que $\tang^2\theta = -\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$. On trouve en particulier que la courbure et la torsion de la trajectoire de P au temps t, mesurées sur Oz, sont

$$(8)\qquad \frac{1}{\rho} = \frac{\cos(t+\theta)}{(\mathrm{B}-\mathrm{A})\sin(t-\theta)}, \qquad \frac{1}{\tau} = -\frac{\sin(t+\theta)}{(\mathrm{B}-\mathrm{A})\sin(t-\theta)}.$$

Ce sont des fonctions homographiques de $\tang t$. Si l'on élimine cette

---

(1) Il nous semble que ce théorème permettait de réaliser pratiquement le mouvement, car il suffirait pour cela de construire les surfaces H′ et S′. C'est pour rappeler cette réalisation par un *glissement* que nous avions d'abord désigné les mouvements actuels sous le nom de *mouvements* (G); par extension, nous avons ensuite adopté cette dénomination pour les mouvements plus généraux qui font l'objet de notre Mémoire.

quantité entre les deux équations précédentes, on obtient la relation linéaire classique

$$(9) \qquad \frac{\sin 2\theta}{\rho} + \frac{\cos 2\theta}{\tau} + \frac{1}{B - A} = 0.$$

Enfin, il est très facile d'avoir les équations finies de la courbe par rapport à un trièdre fixe $O_1 x_1 y_1 z_1$. Il suffit pour cela de se reporter à la génération du mouvement par la viration d'un conoïde de Plücker. Si x_0, y_0, z_0 désignent les quantités définies par les formules (8) du n° 3, on trouve sans peine pour coordonnées de P :

$$(10) \qquad \begin{cases} x_1 = x_0 + (B - A)(\sin t \cos t - \sin\theta \cos\theta) a', \\ y_1 = y_0 + (B - A)(\sin t \cos t - \sin\theta \cos\theta) b', \\ z_1 = z_0 + (B - A)(\sin t \cos t - \sin\theta \cos\theta) c'. \end{cases}$$

Tout ce qui est relatif à la trajectoire de P′ se déduit de ce qui précède par le changement de θ en $-\theta$.

Les deux lignes que nous venons de considérer constituent *le couple le plus général de courbes de Bertrand associées*. En effet, étant donné un tel couple, si l'on mène par P la perpendiculaire Δ au plan osculateur en P′ et par P′ la perpendiculaire Δ' au plan osculateur en P, on sait que la figure ΔPP′Δ' est invariable. D'autre part, la réciproque du théorème de Laguerre, due à M. Bioche, nous apprend que Δ et Δ' engendrent deux surfaces réglées provenant, par flexion, des hyperboloïdes H et H′ construits, comme plus haut, avec Δ et Δ'. Nous retombons sur le glissement des hyperboloïdes, et le mouvement de la figure ΔPP′Δ' est bien un mouvement (G_2), de directrices Δ et Δ'. On peut aussi le prouver directement, sans faire appel à la proposition de M. Bioche, en démontrant que les droites Δ et Δ' sont constamment conjuguées dans le mouvement, ce qui peut se faire, soit par un raisonnement géométrique, soit analytiquement par la considération du mouvement du trièdre principal d'une courbe de Bertrand. Nous laisserons au lecteur le soin de faire ces vérifications qui ne présentent aucune difficulté.

12. Cas où les directrices sont rectangulaires. — Ce cas se présente lorsque les nombres caractéristiques ont une somme nulle. Dans ces

conditions, l'hyperboloïde H, par exemple, se réduit à la portion du plan du cercle de gorge correspondant, extérieure à ce cercle. On pourrait, sans aucune difficulté, étudier à part ce cas particulier. On peut aussi le considérer comme un cas limite du cas général, en imaginant que l'angle des deux directrices se rapproche de plus en plus d'un angle droit. Dans ces conditions, les deux hyperboloïdes H et H' s'aplatissent indéfiniment pour se réduire à la limite aux portions de plans balayées par les tangentes de leurs cercles de gorge respectifs. Les surfaces S et S' deviennent par suite des développables, dont les arêtes de rebroussement, lieux de P' et de P, admettent respectivement pour cercles de courbure le cercle d'axe Δ et tangent à Δ' et le cercle d'axe Δ' et tangent à Δ (1). On retombe sur le cas particulier des courbes de Bertrand étudié par Monge, et l'on retrouve bien toutes ses propriétés.

Comme vérification, faisons $\theta = \frac{\pi}{4}$ dans la première équation (8) ou dans (9). Nous obtenons $\rho = A - B$; d'où il résulte visiblement que le centre de courbure en P est le point P'.

13. Cas où les directrices sont confondues. — Cela arrive lorsque l'un ou l'autre des nombres caractéristiques est nul. Si par exemple $A = 0$, la directrice double est Ox. Tous les points de cette droite ont des vitesses perpendiculaires à Ox et de directions invariables par rapport à $Oxyz$, comme cela résulte de la théorie des systèmes de complexes linéaires. On peut aussi le vérifier analytiquement en calculant les vitesses du point $(x, 0, 0)$; on trouve 0, Bq, $-qx$. D'où il résulte que la surface S engendrée par Ox admet O pour point central, xOy pour plan central et $-B$ pour paramètre de distribution. Comme le lieu de O est une trajectoire orthogonale des génératrices de S, on en conclut que cette dernière surface provient, par flexion, d'une allysséide; d'où l'on déduit un mode de génération par glissement analogue à celui qui a été donné plus haut :

On construit une allysséide (A) *passant par* Ox *et admettant* Oy *pour axe et* B *pour pas. On la déforme par flexion, ce qui donne*

(1) Cela résulte du théorème I du n° 2.

une surface (S). *Puis on fait glisser* (A) *sur* (S) *suivant* Ox. *Le mouvement que prend* (A) *est le mouvement cherché.*

La réciproque n'offre aucune difficulté.

Les deux courbes de Bertrand du n° 11 sont maintenant confondues suivant une courbe à torsion constante $-\frac{1}{B}$, qui est décrite par le point O, de sorte que *le mouvement actuel peut être considéré aussi comme celui du trièdre principal d'une courbe à torsion constante.*

14. II. *Les nombres caractéristiques sont égaux.* — Dans ce cas, *les axes des mouvements hélicoïdaux du groupe engendrent le faisceau plan* (O, xy) *et les pas de ces mouvements sont tous égaux.* Tout mouvement du groupe peut être obtenu par la viration du faisceau plan (O, xy) suivant le pas A. Si ce faisceau plan est choisi comme surface Σ' (n° 2), on doit remplacer, dans la formule (6), R' par zéro et ψ' par $\frac{\pi}{2}$; d'où

$$A = \frac{R}{-\cot\psi} = -T.$$

Par conséquent, la développable Σ, sur laquelle doit virer notre faisceau plan, doit admettre pour arête de rebroussement une courbe à torsion constante. On peut alors donner du mouvement la génération suivante :

Soit une courbe quelconque (Γ), *à torsion constante* $-\frac{1}{A}$. *Orientons-la, ainsi que son indicatrice des tangentes* (γ), *ce qui permet de définir un trièdre principal en chaque point, soit* M$x'y'z$. *Faisons tourner ce trièdre autour de* Oz *d'un angle égal et de signe contraire à l'abscisse curviligne du point de* (γ) *qui correspond à* M. *Le trièdre* Mxyz *ainsi obtenu prend le mouvement cherché quand* M *décrit* (Γ).

On peut aussi considérer le cas actuel comme un cas limite du précédent et voir ce que devient la génération par les courbes de Bertrand. Un calcul simple montre que les directrices Δ et Δ' tendent respectivement vers les deux droites isotropes d'équations

$$\begin{cases} y = ix \\ z = +Ai \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y = -ix, \\ z = -Ai. \end{cases}$$

Les vitesses respectives de P et P′ sont parallèles à Δ′ et à Δ. En développant ces conclusions, on arrive à l'énoncé suivant, qu'il est d'ailleurs aisé d'établir directement :

Soit une ligne de longueur nulle C. *Associons-lui une autre ligne de longueur nulle* C′, *telle qu'entre les deux on puisse établir une correspondance* (P, P′), *dans laquelle le segment* PP′ *demeure constant et normal aux deux courbes. Le milieu* O *de* PP′ *décrit une courbe dont la binormale est* PP′ *le rayon de torsion mesuré sur* PP′ *étant, en grandeur et en signe, égale au vecteur* i (OP). *On obtient de cette façon la courbe à torsion constante la plus générale.*

On peut utiliser ce théorème pour le calcul des équations des courbes à torsion constante. Malheureusement on se heurte, comme dans la méthode classique, à des quadratures. En cherchant à s'en débarrasser, on est conduit immédiatement à l'équation de M. Fouché (*voir* Darboux, *Théorie des surfaces*, t. IV, p. 431).

Dans le *cas particulier où les deux nombres caractéristiques sont nuls,* tous les mouvements hélicoïdaux du groupe sont des rotations, et le mouvement général s'obtient par le roulement sans glissement du plan xOy sur un cône arbitraire de sommet O.

15. Deuxième cas : *Les axes sont tous parallèles.* — Nous pouvons supposer que la direction commune de tous les axes est celle de Oz, ce qui se traduit par $p = q = 0$. Comme r est supposé ne pas être identiquement nul, nous pouvons le prendre comme fonction λ_2. Les composantes du mouvement sont alors de la forme

$$\lambda\xi_1 + r\xi_2,\quad \lambda\eta_1 + r\eta_2,\quad \lambda\zeta_1 + r\zeta_2,\quad 0,\quad 0,\quad r.$$

L'axe instantané a pour équations

$$\xi - ry = 0,\qquad \eta + rx = 0.$$

Par conséquent, ou bien il est fixe, ou bien il décrit un plan parallèle à Oz. Dans les deux hypothèses, on peut le supposer dans le plan des zx, ce qui exige que ξ_1 et ξ_2 soient nuls.

I. *L'axe n'est pas fixe.* — Dans ce cas, $\eta_1 \neq 0$, et par suite on peut

remplacer λ par η. Les composantes du mouvement sont alors o, o, r, o, η, $\eta\zeta_1 + r\zeta_2$. Le pas est

$$\frac{\eta\zeta_1 + r\zeta_2}{r} = \zeta_2 - \zeta_1 x,$$

en appelant x l'abscisse de l'axe. Ceci nous conduit encore à distinguer deux cas, suivant que ζ_1 est nul ou ne l'est pas.

a. Le pas est variable. — Il y a alors un seul axe de pas nul. Prenons-le pour Oz; nous avons $\zeta_2 = 0$. *Le mouvement est alors engendré par la viration du plan des zx sur un cylindre quelconque* (Σ) *parallèle à* Oz, *le pas relatif à la droite d'abscisse* x *étant égal à* $-\zeta_1 x$.

En appliquant ce qui a été dit dans la note de la page 345, le lecteur vérifiera aisément qu'on peut avoir, sans aucune quadrature, les équations finies du mouvement, si l'on se donne la section droite du cylindre (Σ) par l'équation de sa tangente mise sous la forme

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha = f''(\alpha),$$

$f''(\alpha)$ désignant une fonction arbitraire de α.

On peut encore se demander ce que devient la génération par glissement. Les directrices Δ et Δ' sont ici Oz et la droite de l'infini du plan $y + \zeta_1 z = 0$, perpendiculaire à la direction de la translation rectiligne $(0, 1, \zeta_1)$, qui fait partie du groupe. On en conclut et il est facile de vérifier directement que les points de Oz ont tous des vitesses ayant la même direction invariable, de paramètres directeurs $(0, 1, \zeta_1)$; d'où il résulte que chaque point de Oz décrit une hélice sur le cylindre engendré par Oz. On arrive ainsi au second mode de génération suivant :

Prenons un cylindre quelconque (S) *parallèle à* Oz; *traçons-y une hélice* (H) *qui coupe les génératrices sous l'angle* φ *donné par* $\zeta_1 = \cot\varphi$. *Puis faisons glisser le plan* zOy *sur ce cylindre, suivant* Oz, *et de façon que* O *décrive* (H). *Le trièdre* $Oxyz$ *prendra le mouvement cherché.*

Il est facile de déduire l'un de l'autre les deux modes de génération

que nous venons d'indiquer. Il suffit de remarquer que la section droite de (Σ) est la développée de la section droite de (S).

b. Le pas est constant. — Nous avons alors $\zeta_1 = 0$. *Le mouvement est obtenu par la viration à pas constant du plan zOx sur un cylindre quelconque (Σ) parallèle à Oz.*

Il n'y a aucune difficulté à obtenir les équations finies d'un tel mouvement. On évitera toute quadrature en se donnant la tangente à la section droite de (Σ) sous la forme

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha = f'(\alpha).$$

Dans ce cas, les deux directrices sont confondues avec la droite de l'infini du plan des zx. Aucun point n'a une vitesse de direction constante.

Dans le cas particulier où le pas constant est nul, on obtient le roulement sans glissement du plan zOx sur un cylindre quelconque parallèle à Oz. Tous les mouvements hélicoïdaux du groupe sont des rotations.

II. *L'axe est fixe.* — Prenons-le pour Oz. Les composantes du mouvement sont $0, 0, r, 0, 0, \zeta$. Les mouvements hélicoïdaux du groupe sont tous ceux qui ont pour axe Oz. *Le mouvement général est un mouvement de verrou quelconque autour de Oz.* On a deux directrices : Oz et la droite de l'infini du plan des xy.

16. Troisième cas : *Les axes sont tous à l'infini.* — On a dans ce cas $p = q = r = 0$. Les mouvements hélicoïdaux du groupe sont des translations rectilignes parallèles à un plan fixe, par exemple au plan des xy. *Le mouvement général est une translation dans laquelle le plan des xy glisse sur lui-même, l'origine décrivant d'ailleurs une courbe quelconque de ce plan.*

Maintenant que nous avons étudié toutes les espèces de mouvements (G_2), nous allons résumer notre discussion en un Tableau qui condensera les résultats obtenus. Nous ne nous occuperons dans ce Tableau que du mouvement général de chaque groupe.

PREMIER CAS : *L'axe instantané a une direction variable.*

I. *Viration d'un conoïde de Plücker.* — Deux droites principales; deux nombres caractéristiques A et B différents.

- *a.* *Deux directrices* distinctes et non rectangulaires; *glissement de deux hyperboloïdes;* courbes de Bertrand.
- *b.* Deux directrices rectangulaires; *courbes à courbure constante.*
- *c.* Deux directrices confondues; *courbe à torsion constante.*

II. *Viration d'un faisceau plan à pas constant* Λ. Les nombres caractéristiques sont égaux; infinité de droites principales.

- *a.* $\Lambda \neq 0$. — *Viration sur une développable dont l'arête de rebroussement est à torsion constante;* deux directrices isotropes.
- *b.* $\Lambda = 0$. — *Roulement sans glissement sur un cône.* Un faisceau plan de directrices.

DEUXIÈME CAS : *L'axe instantané a une direction invariable.*

I. *L'axe n'est pas fixe.* — *Viration d'un plan sur un cylindre quelconque.*

- *a.* *Pas variable. Glissement hélicoïdal d'un plan* sur un cylindre quelconque; une directrice à distance finie, une autre à l'infini dans un plan non perpendiculaire à la première.
- *b.* *Pas constant.* Une directrice double à l'infini si le pas est $\neq 0$; un faisceau plan de directrices parallèles si le pas est nul.

II. *L'axe est fixe.* — *Mouvement de verrou* autour de Oz; deux directrices : Oz et la droite de l'infini du plan perpendiculaire.

TROISIÈME CAS : *L'axe instantané est constamment à l'infini. Translation plane quelconque.*

Un faisceau plan de directrices situées à l'infini et concourant au point à l'infini dans la direction perpendiculaire au plan de la translation.

Dans ce Tableau, nous désignons sous le nom général de *directrices* toutes les droites de pas nul. Comme on le voit, leur nombre et leurs positions relatives sont caractéristiques des différents groupes (g_2) et peuvent servir à reconnaître ceux-ci.

17. GROUPES (g_3). — Comme pour les groupes (g_2), nous allons étudier la distribution des axes. Suivant la valeur des p_i, q_i, r_i, ceux-ci prennent toutes les directions de l'espace, celles d'un plan fixe, celle

d'une droite fixe, ou bien sont à l'infini. D'où quatre cas principaux à distinguer.

PREMIER CAS : *Les axes prennent toutes les directions de l'espace.* — Nous pouvons prendre p, q, r comme fonctions λ_1, λ_2, λ_3 ; ce qui donne des translations de la forme $p\xi_1 + q\xi_2 + r\xi_3$, $p\eta_1 + q\eta_2 + r\eta_3$, $p\zeta_1 + q\zeta_2 + r\zeta_3$. Les directions des axes de pas h sont données par l'équation

$$p\xi + q\eta + r\zeta - h(p^2 + q^2 + r^2) = 0.$$

Ces directions, menées par l'origine, forment donc un cône du second degré dont les axes de symétrie sont indépendants de h. Prenons trois de ces axes parallèles aux axes de coordonnées, ce qui est, comme on sait, toujours possible et nous donne les conditions

(11) $$\eta_3 + \zeta_2 = 0, \qquad \zeta_1 + \xi_3 = 0, \qquad \xi_2 + \eta_1 = 0.$$

Prenons maintenant pour Ox l'axe parallèle à cette droite, c'est-à-dire qui correspond à $p = 1$, $q = 0$, $r = 0$. Ceci nous donne les conditions : $\eta_1 = \zeta_1 = 0$; d'où, en tenant compte de (11), $\xi_2 = \xi_3 = 0$. Moyennant quoi l'axe parallèle à Oy rencontre Ox et peut être pris par conséquent pour Oy lui-même, ce qui exige que ζ_2 soit nul, et par suite η_3, en vertu de (11). Moyennant quoi l'axe parallèle à Oz est Oz lui-même.

Nous venons ainsi de mettre en évidence *trois axes du groupe qui forment un trièdre trirectangle*. Ces trois axes seront appelés *droites principales du groupe* et les pas correspondants A, B, C, *nombres caractéristiques*.

Les axes de coordonnées étant choisis comme il vient d'être indiqué, les composantes du mouvement général sont

$$p, \quad q, \quad r, \quad Ap, \quad Bq, \quad Cr.$$

Il va nous être maintenant très facile d'étudier la distribution des axes (Δ) du groupe, ainsi que la loi suivant laquelle les pas sont affectés à ces axes. Les équations d'un axe (Δ_h) de pas h sont de la forme

(12) $$\left\{\begin{aligned} &p(A - h) + qz - ry = 0,\\ &q(B - h) + rx - pz = 0,\\ &r(C - h) + py - qx = 0.\end{aligned}\right.$$

p, q, r étant liés par la relation

$$(A-h)p^2+(B-h)q^2+(C-h)r^2=0, \tag{13}$$

qui est une conséquence des précédentes. En éliminant p, q, r entre (12), il vient

$$\frac{x^2}{(B-h)(C-h)}+\frac{y^2}{(C-h)(A-h)}+\frac{z^2}{(A-h)(B-h)}+1=0. \tag{14}$$

Si nous remarquons en outre qu'il y a une seule droite (A) de direction donnée, nous voyons que *les droites* (A_h) *forment une demi-quadrique* (Q_h), composée des génératrices d'un certain système de la quadrique (14). Pour distinguer quel est ce système, on peut remarquer que, d'après les équations (12), les deux droites (A_h) perpendiculaires à Oy par exemple doivent se trouver à la fois sur les deux paraboloïdes

$$xy+z(C-h)=0, \qquad yz-x(A-h)=0. \tag{15}$$

Réalité des droites (A_h). — Pour que les droites (A_h) soient réelles, il faut et il suffit que la quadrique (14) soit un hyperboloïde à une nappe, et par conséquent *que h soit compris entre le plus grand et le plus petit des trois nombres caractéristiques*. Ceci nous conduit à distinguer plusieurs cas, suivant que ces nombres sont différents ou non.

I. $A>B>C$. — Le pas h doit rester compris entre A et C. Pour $h=A$, il n'y a que la droite Ox qui soit réelle; de même, pour $h=C$, il n'y a que Oz. Si h est compris entre A et C, il y en a une infinité, formant un demi-hyperboloïde à une nappe. Pour $h=B$, ce demi-hyperboloïde se réduit à deux faisceaux plans, qu'on peut définir par la droite commune Oy, d'une part, et par les deux droites d'intersection de l'un ou l'autre des deux paraboloïdes (15) avec les deux plans

$$x^2(A-B)=z^2(B-C), \tag{16}$$

d'autre part.

Le mouvement réel le plus général du groupe peut alors être obtenu comme il suit :

Prenons une surface réglée (Σ) *formée de droites* (A) *réelles*

choisies arbitrairement. A chaque génératrice de cette surface est attaché un pas déterminé h. Faisons virer (Σ), *suivant le pas* h, *sur la surface* (Σ') *la plus générale qui puisse convenir à cette viration et nous aurons le mouvement cherché.*

Il est clair que les deux surfaces (Σ) et (Σ') introduisent chacune une fonction arbitraire d'une variable. On peut par exemple choisir arbitrairement leurs deux cônes directeurs.

Comme mouvements particuliers, signalons ceux produits par la viration à pas constant des demi-quadriques (Q_h), et aussi les mouvements (G_2), qui sont obtenus en prenant pour (Σ) un conoïde, nécessairement de Plücker [1].

II. $A = B \neq C$. — Il y a, dans ce cas, *une infinité de droites principales*, qui forment le faisceau plan (O, xy). Les demi-quadriques (Q_h) sont de révolution autour de Oz. Pour $h = A$, (Q_h) se réduit au faisceau plan (O, xy). Pour $h = C$, elle se réduit à Oz.

Le mouvement général s'obtiendra comme précédemment.

---

[1] Nous laissons de côté l'étude de la congruence (C) formée par les droites (Δ), parce que cela nous est inutile pour nos mouvements. Cette étude est cependant très intéressante en elle-même. Contentons-nous de citer quelques-unes des propriétés auxquelles elle donne lieu.

Tout d'abord, on peut remarquer que *les quadriques* (Q_h) *forment une famille de Lamé*, à savoir celle qui a été imaginée par M. G. Humbert et pour laquelle les lignes ombilicales sont des droites.

La courbe de contact de (Q_h) avec son enveloppe se trouve sur une sphère de centre O et dont le carré du rayon est $-3h^2 + 2h(A + B + C) - (AB + BC + CA)$. Ceci montre que *les foyers de toute droite de la congruence sont équidistants de l'origine.* Il est facile d'avoir les équations ponctuelle et tangentielle de la surface focale, qui est du sixième ordre et de la quatrième classe.

La considération des mouvements (G_2) du groupe conduit à des propriétés curieuses. Par exemple, *le lieu des droites de la congruence qui sont parallèles à un plan donné quelconque* (P) (non cyclique des Q_h) *est un conoïde de Plücker*, qui coupe chaque demi-quadrique Q_h suivant deux génératrices symétriques du conoïde. Si (P) est cyclique pour les Q_h, le lieu est un faisceau plan. *Les perpendiculaires communes à tous les couples de droites de la congruence forment une autre congruence*, et non pas toutes les droites de l'espace.

III. $A = B = C$. — Si $h \neq A$, (Q_h) est une demi-sphère. Pour $h = A$, on a *toutes les droites issues de* O, *qui sont toutes des droites principales.*

Le mouvement réel le plus général est obtenu par la viration d'un cône quelconque de sommet O *sur la développable la plus générale qui puisse convenir à cet effet.*

18. Deuxième cas : *Les axes prennent toutes les directions d'un plan.* — Prenons ce plan parallèle au plan des xy. Les composantes du mouvement général sont alors

$$p, \quad q, \quad 0, \quad \lambda\xi_1 + p\xi_2 + q\xi_3, \quad \lambda\eta_1 + p\eta_2 + q\eta_3, \quad \lambda\zeta_1 + p\zeta_2 + q\zeta_3.$$

Les équations de l'axe (A) correspondant sont

$$(17) \quad \begin{cases} \lambda(q\xi_1 - p\eta_1) + q^2\xi_3 - p^2\eta_2 + pq(\xi_2 - \eta_3) + z(p^2 + q^2) = 0, \\ \lambda\zeta_1 \qquad\qquad + p\zeta_2 + q\zeta_3 + py - qx = 0. \end{cases}$$

En éliminant λ entre ces deux équations, nous avons le lieu des axes de direction $(p, q, 0)$

$$(18) \quad \begin{aligned} &(q\xi_1 - p\eta_1)(p\zeta_2 + q\zeta_3 + py - qx) \\ &\quad - \zeta_1[q^2\xi_3 - p^2\eta_2 + pq(\xi_2 - \eta_3) + z(p^2 + q^2)] = 0. \end{aligned}$$

Ce lieu est un plan II, qui enveloppe visiblement un cône du second degré. Prenons le sommet de ce cône pour origine; nous avons les trois conditions

$$(19) \quad \eta_1\zeta_2 - \zeta_1\eta_2 = 0, \qquad \xi_1\zeta_3 - \zeta_1\xi_3 = 0, \qquad \xi_1\zeta_2 - \eta_1\zeta_3 + \zeta_1(\eta_3 - \xi_2) = 0.$$

L'équation du cône enveloppe est alors

$$(20) \quad (x\eta_1 + y\xi_1)^2 - 4(x\xi_1 + z\zeta_1)(y\eta_1 + z\zeta_1) = 0.$$

Ce cône est tangent au plan des xy suivant la droite

$$x\eta_1 - y\xi_1 = 0.$$

Prenons cette droite pour axe des y, nous avons la condition $\xi_1 = 0$. Remarquons maintenant que, si nous ne voulons pas que notre groupe (g_3) se réduise à un groupe (g_2), il faut que l'un au moins des deux nombres η_1 et ζ_1 soit différent de zéro.

I. $\eta_1 \zeta_1 \neq 0$. — Nous pouvons prendre η par exemple pour fonction λ, ce qui nous donne

$$\eta_1 = 1, \qquad \eta_2 = \eta_3 = 0.$$

Les équations (19) donnent ensuite

$$\zeta_2 = 0, \qquad \xi_3 = 0, \qquad \zeta_3 = -\zeta_1 \xi_2.$$

Les composantes du mouvement général sont alors

$$p, \quad q, \quad 0, \quad ap, \quad \eta, \quad b(\eta - qa),$$

où a et b désignent deux constantes, dont la seconde est supposée différente de zéro.

Les équations d'un axe (A_h) de pas h sont alors

$$(21) \qquad \begin{cases} ap + qz = hp, \\ \eta - pz = hq, \\ b(\eta - qa) + py - qx = 0. \end{cases}$$

Leur lieu a pour équation

$$(22) \qquad z(y + bz) + (x + b\lambda)\lambda = 0,$$

en posant

$$(23) \qquad \lambda = a - h.$$

C'est un paraboloïde hyperbolique d'axe Ox. Nous laisserons au lecteur le soin de vérifier que l'origine est le pôle du plan de Monge de ce paraboloïde. De plus, on voit que, lorsque h et par suite λ varient, ce paraboloïde se transforme en un paraboloïde homothétique par rapport à l'origine.

Bien entendu, *les axes* (A_h) *sont les génératrices du demi-paraboloïde* (P_h) *de plan directeur* xOy. Pour avoir le mouvement général du groupe, on appliquera l'énoncé de la page 366 [1].

---

[1] La considération des mouvements (G_2) du groupe conduit au théorème suivant : *Étant donné un demi-paraboloïde hyperbolique de plan directeur* xOy, *prenons les demi-paraboloïdes* (P) *homothétiques du proposé par rapport au pôle de son plan de Monge. Le lieu des génératrices des* (P) *qui rencontrent une droite donnée perpendiculaire à* xOy *est un conoïde de Plücker qui coupe chaque* (P) *suivant deux génératrices qui sont symétriques sur le conoïde.*

II. $\zeta_1 = 0$. — Alors, η_1 est nécessairement différent de zéro, et nous pouvons supposer, comme tout à l'heure,

$$\eta_2 = 1, \qquad \eta_2 = \eta_3 = 0.$$

Les équations (19) donnent ensuite

$$\zeta_2 = 0, \qquad \zeta_3 = 0.$$

Les composantes du mouvement sont

$$p, \quad q, \quad 0, \quad ap + bq, \quad \eta, \quad 0,$$

a et b désignant encore deux constantes.

Les équations d'un axe (A_h) sont

$$ap + bq + qz = hp, \qquad \eta - pz = hq, \qquad py - qx = 0.$$

Le lieu de ces droites est le demi-paraboloïde hyperbolique équilatère d'équation

$$yz + (a - h)x + by = 0,$$

et de plan directeur xOy.

En portant l'origine au point $(0, 0, -b)$, on voit qu'on peut supposer $b = 0$. *La congruence des droites* (A) *est alors la congruence linéaire dont les directrices sont* Oz *et la droite de l'infini du plan des* xy, *le pas relatif à chacune de ces droites* (A) *étant* $a - \frac{yz}{x}$.

III. $\eta_1 = 0$. — Alors ζ_1 est nécessairement différent de zéro, et l'on peut supposer $\zeta_1 = 1$, $\zeta_2 = \zeta_3 = 0$. Les équations (19) donnent ensuite

$$\eta_2 = 0, \qquad \xi_3 = 0, \qquad \xi_2 = \eta_3 = a.$$

Les composantes du mouvement sont

$$p, \quad q, \quad 0, \quad ap, \quad aq, \quad \zeta.$$

L'axe est une droite quelconque de xOy et le pas est égal à a. Donc, *le mouvement général s'obtiendra par la viration, à pas constant* a, *du plan* xOy *sur une développable quelconque.* Dans le cas particulier où a est nul, on a le roulement sans glissement le plus général d'un plan.

19. TROISIÈME CAS : *Les axes sont tous parallèles.* — Prenons leur direction commune pour axe des z. Les composantes du mouvement sont de la forme

$$o, \quad o, \quad r, \quad \lambda_1\xi_1+\lambda_2\xi_2+r\xi_3, \quad \lambda_1\eta_1+\lambda_2\eta_2+r\eta_3, \quad \lambda_1\zeta_1+\lambda_2\zeta_2+r\zeta_3.$$

Les équations de l'axe (A) sont

$$\xi - ry = o, \qquad \eta + rx = o.$$

Suivant que le déterminant $\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1$ est différent de zéro ou nul, cet axe peut coïncider avec une droite quelconque parallèle à Oz, ou bien demeure dans un plan fixe. [Il ne peut être fixe, si l'on veut éviter de retomber sur un groupe (g_2).]

I. *Tous les axes ne sont pas dans un même plan.* — Nous pouvons alors prendre comme composantes du mouvement

$$o, \quad o, \quad r, \quad \xi, \quad \eta, \quad a\xi + b\eta + cr,$$

a, b, c désignant des constantes. L'axe (A) qui a pour trace sur xOy le point (x, y, o) est affecté du pas

$$h = ay - bx + c.$$

Par un choix convenable du plan des zx, nous pouvons supposer $h = ay$ et par suite $b = c = o$. *Le mouvement général est alors obtenu par la viration générale d'un cylindre parallèle à Oz, le pas relatif à chaque génératrice étant proportionnel à la distance de cette droite au plan des zx.*

II. *Tous les axes sont dans un même plan.* — En prenant ce plan pour zOy, nous avons les composantes

$$o, \quad o, \quad r, \quad \xi, \quad o, \quad \zeta.$$

Le mouvement général est obtenu par la viration de zOy sur un cylindre quelconque parallèle à Oz, suivant un pas également quelconque.

20. QUATRIÈME CAS : *Les axes sont tous à l'infini.* — Le groupe correspondant est évidemment formé par l'ensemble de *tous les mouvements de translation.*

Tous les résultats que nous venons d'obtenir relativement aux mouvements (G_3) sont condensés dans le Tableau ci-dessous :

Premier cas : *Axes de directions quelconques.*

I. Trois droites principales; trois nombres caractéristiques différents. Les droites (A_h) forment un demi-hyperboloïde (Q_h).

II. Une droite principale isolée et un faisceau plan perpendiculaire : deux nombres caractéristiques sont égaux. (Q_h) est de révolution.

III. Une gerbe de droites principales; les trois nombres caractéristiques sont égaux. Viration à pas constant d'un cône quelconque.

Deuxième cas : *Axes parallèles à un plan fixe.*

I. Le plan Π des axes de même direction enveloppe un véritable cône. Les droites (A_h) forment un demi-paraboloïde (P_h).

II. Le plan Π tourne autour d'une droite fixe Oz. Viration d'un conoïde droit d'axe Oz. (P_h) équilatère.

III. Le plan Π est fixe. Viration de ce plan sur une développable quelconque, suivant un pas constant.

Troisième cas : *Axes parallèles à une droite fixe* Oz.

I. Viration d'un cylindre quelconque parallèle à Oz, suivant un pas déterminé. Les droites (A_h) sont un plan (R_h) parallèle à zOx.

II. Viration d'un plan zOy sur un cylindre parallèle à Oz, suivant un pas quelconque.

Quatrième cas : *Groupe des translations.*

21. Groupes d'ordre supérieur a 3. — On pourrait les étudier directement, en suivant la méthode de réduction utilisée jusqu'à présent. Mais nous allons voir qu'il est possible de déduire leurs propriétés et leur classification de celles des autres mouvements déjà étudiés.

Mouvements hélicoïdaux en involution. — Nous dirons que deux mouvements hélicoïdaux sont *en involution* ou *orthogonaux*, s'il en est ainsi des deux complexes linéaires qui leur sont attachés (*voir* par exemple Kœnigs, *Géométrie réglée*). Cette condition s'exprime

analytiquement par l'égalité

$$p\xi' + q\eta' + r\zeta' + p'\xi + q'\eta + r'\zeta = 0. \tag{24}$$

THÉORÈME. — *Soient* (H) *et* (H') *deux mouvements hélicoïdaux en involution. Soit* (H_1) *un autre mouvement coaxial à* (H) *et dont le pas surpasse de k celui de* (H). *Si les axes de* (H) *et de* (H') *ne sont pas rectangulaires, il existe un mouvement hélicoïdal* (H'_1), *et un seul, qui soit orthogonal à* (H_1) *et coaxial à* (H'); *son pas surpasse de* $-k$ *celui de* (H'). *Si les axes de* (H) *et* (H') *sont rectangulaires, deux mouvements hélicoïdaux quelconques admettant respectivement ces deux axes sont orthogonaux.*

En effet, appliquons les formules (2) de la page 352. Nous avons

$$\xi_1 = \xi + kp, \quad \eta_1 = \eta + kq, \quad \zeta_1 = \zeta + kr, \quad p_1 = p, \quad q_1 = q, \quad r_1 = r;$$

et de même

$$\xi'_1 = \xi' + k'p', \quad \eta'_1 = \eta' + k'q', \quad \ldots, \quad r'_1 = r'.$$

Écrivons la condition d'orthogonalité de (H_1) et (H'_1), en tenant compte de l'orthogonalité de (H) et (H'); il vient

$$(k + k')(pp' + qq' + rr') = 0.$$

De cette équation résulte évidemment notre théorème.

GROUPES COMPLÉMENTAIRES. — Soit un groupe (g_n) quelconque. Considérons les mouvements hélicoïdaux orthogonaux à la fois à tous les mouvements hélicoïdaux de ce groupe. D'après la théorie des systèmes de complexes linéaires (*voir* KŒNIGS, *loc. cit.*), ces mouvements hélicoïdaux sont ceux d'un groupe (g_{6-n}), qui sera dit *le groupe complémentaire* du proposé.

THÉORÈME. — *Les droites de pas h relativement à un groupe* (g) *quelconque sont celles qui s'appuient sur les droites de pas* $-h$ *du groupe complémentaire* (g').

En effet, introduisons le groupe (γ) déduit de (g) par l'application du théorème de la page 352, les pas relatifs à (γ) surpassant de $-h$ ceux qui sont relatifs à (g). Soit de même (γ') le groupe déduit

de (g') en augmentant tous les pas de h. D'après le théorème démontré précédemment, les deux groupes (γ) et (γ') sont complémentaires. Or, les droites δ de pas h relativement à (g) sont celles de pas nul relativement à (γ) et les droites δ' de pas $-h$ relativement à (g') sont celles de pas nul relativement à (γ'). D'autre part, d'après la théorie de M. Kœnigs (*loc. cit.*), les droites de pas nul du groupe (γ) sont les droites de moment nul par rapport à tous les mouvements du groupe (γ'), lesquelles peuvent toujours être définies par la condition de s'appuyer sur les droites de pas nul de ce groupe, ce qui démontre le théorème.

Il faut toutefois prendre quelques précautions, dans l'application de ce théorème, pour les cas où certaines des droites δ' viennent se confondre, ou bien pour les cas où les rotations de (γ') appartiennent à un même groupe d'ordre inférieur à celui de (γ'). Lorsqu'on est embarrassé, il est bon de se rappeler que *les droites δ sont les droites de moment nul par rapport à tous les mouvements de* (γ').

22. Le groupe complémentaire d'un groupe (g_3) est évidemment un groupe (g_3). Si l'on applique le théorème précédent, on dresse facilement le Tableau suivant :

(g_3).	(g'_3).	
1, I ou II........	1, I ou II	(Q'_h) complémentaire de (Q_{-h}). Nombres caractéristiques changés de signe.
1, III...........	1, III	Mêmes axes; pas changé de signe.
2, I ou II........	2, I ou II	(P'_h) complémentaire de (P_{-h}).
2, III............	2, III	Mêmes axes; pas changé de signe.
3, I..............	3, I	$(R'_h)=(R_{-h})$; Oz remplacé par Oz' $\begin{cases} y = 0 \\ x = -az \end{cases}$.
3, II.............	3, II	Oy et Oz échangés.
4................	4	

23. Groupes (g_4). — Les groupes complémentaires sont les groupes (g_2); de sorte que la classification de ceux-ci nous donne du même coup la classification des premiers. Reportons-nous donc au Tableau du n° 16.

(1, I). Les droites qui rencontrent le conoïde de Plücker en deux points appartenant à deux génératrices symétriques forment un com-

plexe (C) du second ordre. Affectons chaque droite de ce complexe d'un pas h égal et de signe contraire à celui des génératrices correspondantes du conoïde. Prenons une surface (Σ) quelconque formée de droites du complexe et faisons-la virer suivant le pas h. Nous obtiendrons le mouvement général du groupe (g_1) complémentaire d'un groupe (g_2) (1, I).

(1, II). Les droites de pas $-h$ du groupe (g_2) sont les deux isotropes

$$y = ix \qquad\qquad y = -ix,$$
$$z = +(h + A)i \quad \text{et} \quad z = -(A + h)i,$$

en vertu de la page 360 et du théorème de la page 352. Or, le lecteur vérifiera sans peine que les droites réelles qui s'appuient sur ces deux isotropes ont pour équations générales

$$(25) \qquad \begin{cases} \alpha x + \beta y + z = 0, \\ -\beta x + \alpha y = A + h. \end{cases}$$

Telles sont les équations des droites de pas h du groupe (g_4). Pour $h = -A$, elles donnent les droites issues de O et les droites de xOy. Lorsque h varie, elles engendrent le complexe du second ordre formé par les lignes de plus grande pente des plans qui passent par O. A chacune de ces droites correspond un pas bien déterminé, qu'il ne serait pas difficile de définir géométriquement. De là résulte la génération du mouvement général du groupe (g_4), par une viration définie comme plus haut.

(2, I, a). Pour réaliser le mouvement général du groupe (g_4) correspondant, on fait virer une surface (Σ) formée de droites quelconques parallèles au plan $y + \zeta_1 z = 0$, le pas relatif à chacune de ces droites étant $h = \zeta_1 x$, en appelant x l'abscisse du point où la droite en question perce le plan des zx.

(2, I, b). On prend une surface (Σ) quelconque de plan directeur zOx et l'on affecte chaque génératrice d'un pas $h = -\zeta_2 + my$, en appelant y l'ordonnée de cette droite et m le rapport de ses cosinus directeurs relatifs à Ox et à Oz.

(2, II). Viration, suivant un pas arbitraire, d'un conoïde droit quelconque d'axe Oz.

(3). Viration, suivant un pas arbitraire, d'un cylindre quelconque parallèle à Oz.

24. Groupes (g_5) et (g_6). — Tout groupe (g_5) est complémentaire d'un mouvement hélicoïdal (H). Si l'axe de ce mouvement est à distance finie et si A est son pas, tout mouvement du groupe (g_5) sera engendré par la viration d'une surface réglée quelconque, le pas h relatif à chaque génératrice étant déterminé par la condition que cette droite doit avoir un moment nul relativement au mouvement, coaxial à (H), qui a pour pas $A + h$.

Si (H) est une translation, le mouvement général du groupe sera obtenu par la viration, suivant un pas arbitraire, d'une surface réglée quelconque admettant un plan directeur perpendiculaire à la direction de la translation.

Quant aux mouvements (G_6), ce sont évidemment tous les mouvements possibles.

III. — Applications.

25. Nous nous proposons maintenant d'indiquer quelques applications des mouvements que nous venons d'étudier. Nous ne dirons rien sur la question des familles de Lamé composées de surfaces égales, pour laquelle nous renverrons le lecteur à notre Thèse de Doctorat, déjà citée. Nous nous contenterons d'exposer rapidement les résultats que nous avons résumés dans plusieurs Communications à l'Académie des Sciences, faites en 1908.

Points à vitesse invariable par rapport au solide mobile. — Une première application, à laquelle se ramène une question étudiée par M. Darboux, dans une Note aux *Comptes rendus* du 27 avril 1908, et par l'auteur de ce Mémoire, dans les *Comptes rendus* du 10 août 1908, peut s'énoncer de la manière suivante : *Trouver tous les mouvements que peut prendre un corps solide, par exemple un trièdre $Oxyz$, de*

façon que un ou plusieurs points invariablement liés à ce corps solide aient des vitesses de direction fixes par rapport à lui.

Ce problème est lui-même un cas particulier du suivant : *Trouver tous les mouvements que doit prendre* $Oxyz$ *pour qu'une ou plusieurs droites invariablement liées à ce trièdre soient constamment normales aux trajectoires de leurs différents points.* Il suffit, en effet, pour résoudre le premier problème, de chercher, parmi les solutions du second, celles pour lesquelles il existe des faisceaux plans de droites répondant à la question.

Occupons-nous donc d'abord du second problème. Soit une droite D définie par le point $M(x, y, z)$ et par ses cosinus directeurs (a, b, c). Écrivons qu'elle est perpendiculaire à la vitesse du point M ; nous avons

$$\mathop{\mathrm{S}} a(\xi + qz - ry) = 0.$$

c'est-à-dire une relation linéaire et homogène, à coefficients constants, entre p, q, r, ξ, η, ζ. Si nous avons un certain nombre de droites D répondant à la question, nous sommes donc certains que *le mouvement du trièdre est nécessairement un mouvement* (G). Dès lors, il nous suffit de passer en revue ces différents mouvements et de rechercher, pour chacun d'eux, quelles sont les droites D qui sont constamment normales aux trajectoires de leurs points. Or, cette recherche est toute faite, car les droites D relatives à un mouvement (G_n) sont les droites (A) de pas nul relativement au groupe (g_{6-n}), complémentaire du groupe (g_n) dont fait partie le mouvement considéré [1]. Or, nous savons trouver, pour un groupe quelconque, toutes les droites (A_h) de pas h, donc en particulier les droites de pas nul. Il suffit, pour cela, de se reporter à la discussion qui a été faite précédemment. Bornons-nous à indiquer ici quels sont les mouvements admettant des points à vitesse invariable, points que nous appellerons, pour abréger, les points I.

1° *Mouvement hélicoïdal.* — Tous les points sont des points I.

---

[1] Bien entendu, on suppose que ce mouvement (G_n) n'appartient pas à un groupe d'ordre inférieur à n.

2° *Mouvements* (G_2), (1, I). — Les points I sont des points des deux directrices Δ et Δ'. Les vitesses sont obliques à ces droites, quand elles sont distinctes, et perpendiculaires quand elles sont confondues.

3° *Mouvements* (G_2), (2, I, a) *et mouvement de verrou autour de* Oz. — Les points I sont les points de Oz; leurs vitesses sont toutes parallèles.

4° *Mouvements* (G_3), (1, I); *cas de* $B = 0$. — Il y a deux points I, situés sur Oy et symétriques par rapport à O. Leurs vitesses sont perpendiculaires à Oy.

5° *Roulement sans glissement du plan* xOy *sur une développable quelconque.* — Les points I sont les points de xOy; leurs vitesses sont normales à ce plan.

6° *Mouvements* (G_4), (1, II); *cas de* $A = 0$. — Le seul point I est l'origine, dont la vitesse est normale à xOy.

Remarque. — On peut comparer ces résultats avec ceux de notre Note du 10 août 1908. On déduit, en particulier, de cette comparaison que, dans le mouvement (4°), la droite Oy engendre la surface réglée la plus générale dont les génératrices peuvent, par flexion de la surface, venir coïncider avec les normales principales d'une courbe de Bertrand.

26. Voici maintenant un autre problème, dont se sont occupés déjà divers géomètres, dans des cas particuliers :

Déterminer les surfaces sur lesquelles se trouve une famille de courbes égales, les développables circonscrites le long de ces courbes étant aussi égales.

Imaginons un trièdre mobile $Oxyz$, dépendant d'un paramètre t. Supposons qu'à ce trièdre soient invariablement liées une courbe (C) et une développable (D) circonscrite à (C). Il s'agit de savoir quels doivent être le mouvement du trièdre, la courbe et la développable pour que la surface (S) engendrée par (C) soit constamment inscrite, le long de cette courbe, à la développable (D).

Soient x, y, z les coordonnées relatives d'un point quelconque M de (C), exprimées en fonction d'un certain paramètre u, et α, β, γ les cosinus directeurs de la normale en ce point à (D), qui sont également des fonctions de u. La condition demandée s'exprime ainsi

$$(1) \qquad \mathrm{S}\,\alpha(\xi + qz - ry) = 0.$$

Cette relation est linéaire et homogène en $p, q, \ldots, \zeta$ et à coefficients fonctions de u. Donc *le mouvement doit être un mouvement* (G). De plus, *si une courbe* (C) *convient pour un certain mouvement* (G_n), *elle convient pour tous les mouvements du groupe* (g_n) *auquel appartient le premier.*

Pour la détermination de la courbe (C), voici comment on peut procéder. *Soit* R *une surface réglée dont les génératrices sont choisies arbitrairement parmi les droites appelées droites* (D) *dans le numéro précédent. On prendra comme courbe* (C) *une quelconque des trajectoires orthogonales de ces génératrices.*

Le problème se résout donc toujours par des quadratures.

Applications. — On obtient un cas particulier du problème précédent en se posant la question suivante :

Trouver les surfaces qui admettent une famille de cercles géodésiques égaux et de même courbure géodésique.

On aura la solution générale de ce problème en cherchant à déterminer (C), de façon que cette courbe, considérée comme tracée sur R, ait une courbure normale constante, c'est-à-dire la même en tous les points.

En particulier, *on aura toutes les surfaces admettant une famille d'asymptotiques ou de géodésiques égales en déterminant* (C), *de façon que cette courbe soit une géodésique ou une asymptotique de* R; ce qui revient à déterminer une courbe (C) dont les binormales ou les normales principales appartiennent à un certain nombre de complexes linéaires indépendants.

Il nous serait facile d'examiner successivement les différents cas qui peuvent se présenter, suivant la nature du mouvement (G) qu'on doit imprimer à la courbe (C), puisque nous connaissons, d'une façon

précise, la distribution des droites D pour tous les mouvements (G). Nous pourrions montrer très aisément que le problème des géodésiques égales, en particulier, se ramène à des quadratures. Mais nous ne le ferons pas, parce que ces deux questions ont été étudiées en détail par M. Hazzidakis (*Journal de Crelle*, 1883), qui a résolu complètement, par quadratures, le problème des géodésiques ([1]). Le problème des asymptotiques n'a pas encore été intégré jusqu'au bout, du moins à notre connaissance, malgré les efforts de divers géomètres, entre autres MM. Goursat et Rouquet.

27. Voici maintenant une question, entièrement différente des précédentes, et qui conduit encore aux mouvements (G) :

Peut-on trouver deux surfaces applicables admettant chacune une famille de lignes égales, se correspondant dans la déformation, et telles que les lignes des deux familles soient égales entre elles ([2]) ?

([1]) La méthode suivie par ce géomètre, pour ramener le problème aux quadratures, nous a paru longue et peu intuitive. De plus, le lieu qui existe entre les deux questions (géodésiques et asymptotiques) ne nous semble pas avoir été mis suffisamment en lumière. Notre méthode permet au contraire d'établir très rapidement tous les résultats obtenus par M. Hazzidakis.

([2]) Ce problème, ainsi que le problème plus général dont nous avons dit quelques mots dans une Note aux *Comptes rendus* du 23 novembre 1908, semblent, au premier abord, ne pas admettre de solution, si l'on se rappelle les deux théorèmes suivants (Darboux, *Théorie des surfaces*, t. III, p. 280 et 287): *Étant donnée une courbe* C *par une surface* S, *on ne peut déformer* S *sans déformer* C *que si* C *est une asymptotique*. D'autre part, *si les lignes asymptotiques d'une famille se correspondent sur deux surfaces applicables, celles-ci sont égales ou symétriques.*

En réalité, si la courbe C n'est pas une asymptotique, on peut quand même faire passer par elle une seconde surface S′, applicable sur S de façon que la courbe C soit à elle-même son homologue. Il suffit en effet de prendre la surface S″ symétrique de S par rapport à un plan et de la déformer de façon que la courbe C″, symétrique de C, vienne coïncider avec C, ce qui est, comme on sait, toujours possible. La surface S′ obtenue répondra à la question et cependant ne pourra coïncider avec S. Les plans tangents à S et à S′ en un même point de C sont symétriques par rapport au plan osculateur en ce point à C. Les deux surfaces S et S′ sont applicables en ce sens que les arcs homologues

Soit une courbe C, invariablement liée à un trièdre mobile $Oxyz$. Dans un premier mouvement de ce trièdre, elle engendre une certaine surface S, dont l'élément linéaire est

$$ds^2 = \left(\mathrm{S}\, x'^2\right) du^2 + 2\left[\mathrm{S}\, x'(\xi + qz - ry)\right] du\, dt + \left[\mathrm{S}(\xi + qz - ry)^2\right] dt^2,$$

en appelant x, y, z les coordonnées d'un point quelconque de C, exprimées en fonction d'un certain paramètre u, et x', y', z' les dérivées de ces fonctions.

Supposons que, dans un second mouvement du trièdre, la courbe C engendre une surface S_1 applicable sur S. Nous avons les deux conditions nécessaires et suffisantes :

$$(2) \qquad \mathrm{S}\, x'(X + Qz - Ry) = 0,$$

$$(3) \qquad \mathrm{S}(X + Qz - Ry)(X_1 + Q_1 z - R_1 y) = 0,$$

en posant

$$X = \xi - \xi_1, \quad Y = \eta - \eta_1, \quad \ldots, \quad R = r - r_1,$$
$$X_1 = \xi + \xi_1, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots. \quad R_1 = r + r_1$$

et désignant par $p_1, q_1, \ldots \zeta_1$ les composantes du second mouvement.

Si l'on donne à t une valeur numérique, l'équation (2) exprime que les tangentes à la courbe C appartiennent à un complexe linéaire. Si ce complexe change avec la valeur attribuée à t, la courbe C ne peut être qu'une droite ou bien une courbe plane. Écartons le cas où ce

---

ont même longueur. Mais *on ne peut passer de l'une à l'autre par déformation continue*. Si l'on considère quatre points de S formant un petit tétraèdre, les points homologues de S' forment un tétraèdre symétrique du premier, mais non superposable.

S'il existe sur S une famille de courbes C égales aux courbes homologues de S', il est aisé de voir que les tangentes à chacune d'elles doivent appartenir à un même complexe linéaire. En effet, soit C_1 la courbe voisine de C et C'_1 son homologue. On peut passer de C_1 à C'_1 par un mouvement hélicoïdal (H). Or, si M est un point quelconque de C, M_1 un point voisin de C_1, M'_1 le point homologue de C'_1, le plan perpendiculaire au milieu de $M_1M'_1$ est le plan osculateur en M à C. D'où il résulte que ce plan est plan polaire de M par rapport au complexe linéaire attaché au mouvement (H).

serait une droite, qui nous conduirait simplement à la flexion des surfaces réglées. Supposons maintenant que C est une courbe plane, que nous pouvons supposer dans xOy. Si nous exigeons qu'elle ne soit pas rectiligne, l'équation (2) donne d'abord

$$X = Y = R = 0;$$

puis l'équation (3) donne

$$P_1 = Q_1 = Z_1 = 0.$$

Il est alors facile de constater que les deux surfaces S et S_1 sont symétriques l'une de l'autre par rapport à un plan, ce qui est une solution évidente et sans intérêt. Il nous faut donc supposer que X, Y, ... sont proportionnels à des constantes. En écartant le cas d'une courbe plane, choisissant l'axe central du complexe pour axe des z, et ramenant, par une homothétie, son pas à l'unité, nous avons

$$X = Y = P = Q = 0, \qquad Z = R.$$

Les équations (2) et (3) deviennent alors

$$(4) \qquad xy' - yx' + z' = 0,$$

$$(5) \qquad -z(P_1 x + Q_1 y) + R_1(x^2 + y^2) + \alpha_1 x + \beta_1 y + Z_1 = 0,$$

en posant

$$(6) \qquad \alpha_1 = Y_1 - Q_1, \qquad \beta_1 = -X_1 + P_1.$$

Si l'on donne à t diverses valeurs numériques, on voit que la courbe C doit appartenir à un certain nombre de quadratiques Q, que l'on peut caractériser par la propriété d'admettre xOy comme plan cyclique et Oz comme direction asymptotique, le plan asymptote relatif à cette direction passant par Oz.

Suivant le nombre de ces quadratiques Q qui passent par C, nous avons plusieurs cas à considérer :

Premier cas : *La courbe C se trouve sur une seule quadrique Q.* — Ici, nous ferons encore deux hypothèses, suivant que P_1 et Q_1 ne sont pas tous deux nuls ou le sont.

I. Q *n'est pas un cylindre parallèle à* Oz. — Nous pouvons alors supposer que Q_1 est nul, en choisissant le plan asymptote pour zOy.

Dans ces conditions, P_1 est nécessairement différent de zéro et, par un choix convenable de l'origine sur Oz, on peut supposer que α_1 est nul. L'équation (5) est alors de la forme

$$-zx + a(x^2 - y^2) + by + c = 0 \tag{7}$$

et représente un hyperboloïde (à une ou deux nappes) d'axe Oy, si $a \neq 0$; et un paraboloïde hyperbolique équilatère, si $a = 0$. La projection de la courbe C sur xOy doit satisfaire à l'équation différentielle

$$dv[v(y - a) + ay^2 + by + c] = 2\,dy(v + 2ay + b)v. \tag{8}$$

où l'on a posé

$$v = x^2.$$

Cette équation rentre, de deux manières différentes, dans un type général, qu'on ne sait intégrer que dans des cas particuliers (*voir* Darboux, *Théorie des surfaces*, t. IV, p. 445).

Pour $a = 0$, elle est linéaire en y et admet pour intégrale générale

$$y = mx - \frac{c}{b}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{b}} \operatorname{arc\,tang} \frac{x}{\sqrt{b}}\right) \qquad (m = \text{const.}), \tag{9}$$

si $b \neq 0$, et

$$y = mx - \frac{c}{3x^2} \qquad (m = \text{const.}), \tag{10}$$

si $b = 0$.

Quant à z, il est donné par l'équation (7).

Occupons-nous maintenant des deux mouvements que doit prendre la courbe C pour engendrer S et S_1. Si λ_1 et λ_2 désignent deux fonctions arbitraires de t, nous avons

$$\xi = \lambda_2(1 - b), \quad \eta = 0, \quad \zeta = \lambda_2 c + \lambda_1, \quad p = \lambda_2, \quad q = 0, \quad r = \lambda_2 a + \lambda_1,$$
$$\xi_1 = \lambda_2(1 - b), \quad \eta_1 = 0, \quad \zeta_1 = \lambda_2 c - \lambda_1, \quad p_1 = \lambda_2, \quad q_1 = 0, \quad r_1 = \lambda_2 a - \lambda_1.$$

D'où il résulte que *les deux mouvements sont des mouvements* (G_2) admettant pour mouvements de base le mouvement d'axe Oz et de

pas 1 et le mouvement dont l'axe a pour équations [1]

$$(11) \qquad z = ax, \qquad y = \frac{a - ab - c}{1 + a^2},$$

et dont le pas est égal à $\frac{1 - b + ac}{1 + a^2}$.

On peut choisir arbitrairement le premier mouvement parmi ceux du groupe (g_2) déterminé par les deux mouvements de base précédents. Mais alors il est clair que le second mouvement est entièrement défini, ainsi que la correspondance entre les positions homologues de la courbe C. Si t et t_1 désignent les angles polaires dans zOx (à partir de Oz) des axes instantanés homologues, on a la relation

$$(12) \qquad \cot t + \cot t_1 = 2a.$$

De plus, si l'on se reporte à ce qui a été dit dans la première Partie de ce travail, et si l'on désigne encore par $\tang\psi$ la courbure géodésique de l'indicatrice (γ) de la surface Σ sur laquelle doit virer le conoïde de Plücker Σ' (ou le faisceau plan) pour engendrer le premier mouvement, on a

$$\lambda_2 = -\cot\psi \sin t.$$

De même, pour le second mouvement

$$\lambda_2 = -\cot\psi_1 \sin t_1 \frac{dt_1}{dt} = \cot\psi_1 \frac{\sin^3 t_1}{\sin^2 t}.$$

D'où il résulte que *les courbes* (γ) *et* (γ_1) *doivent être telles que, si l'on établit entre leurs arcs* t *et* t_1 *la relation* (11), *les courbures géodésiques aux points homologues doivent être liées par la relation*

$$(13) \qquad \cot\psi \sin^3 t + \cot\psi_1 \sin^3 t_1 = 0.$$

Si l'on se donne (γ), on connaîtra (γ_1) par son équation intrinsèque sur la sphère; malheureusement on ne pourra l'obtenir en termes finis que par l'intégration d'une équation de Riccati. Peut-être pourrait-on profiter de l'indétermination de la courbe (γ) pour ramener cette intégration à des quadratures.

---

[1] On se trouve visiblement dans le premier cas du Tableau de la page 364.

Dans le cas particulier déjà rencontré où a est nul, on a

$$t_1 = -t, \quad \psi_1 = \psi.$$

La courbe (γ_1) est alors symétrique de (γ). *Dans ce cas, le problème se résout entièrement par quadratures.*

II. Q *est un cylindre parallèle à* Oz. — Prenons l'axe de ce cylindre dans le plan zOx; soit a l'abscisse de cet axe et soit R le rayon du cylindre. Les équations de la courbe C sont

$$x = a + R\cos u, \quad y = R\sin u, \quad z = -R(Ru + a\sin u).$$

Il ne serait pas difficile d'en donner une définition géométrique simple.

Quant aux deux mouvements, leurs composantes sont

$$p = q = 0, \quad r = \lambda_1 + \lambda_2, \quad \xi = 0, \quad \eta = -2a\lambda_2, \quad \zeta = \lambda_1 + \lambda_2(a^2 - R^2),$$
$$p_1 = q_1 = 0, \quad r_1 = -\lambda_1 + \lambda_2, \quad \xi_1 = 0, \quad \eta_1 = -2a\lambda_2, \quad \zeta_1 = -\lambda_1 + \lambda_2(a^2 - R^2).$$

Ce sont des mouvements (G_2) (deuxième cas du Tableau de la page 364) admettant pour mouvements de base le mouvement d'axe Oz et de pas 1 et le mouvement dont l'axe a pour équations

$$y = 0, \quad x = 2a,$$

et dont le pas est égal à $a^2 - R^2$.

Les axes instantanés homologues sont conjugués harmoniques par rapport aux axes des mouvements de base, de sorte que leurs abscisses t et t_1 sont liées par la relation

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{t_1} = \frac{1}{a}.$$

De plus, si ρ et ρ_1 désignent les rayons de courbure homologues des sections droites des cylindres sur lesquels doit se produire la viration du plan zOx, on doit avoir

$$\frac{t}{\rho} = \frac{t_1}{\rho_1}\cdot\frac{dt_1}{dt} = -\frac{t_1}{\rho_1}\cdot\frac{t_1^2}{t^2}$$

ou

$$\frac{t^3}{\rho} + \frac{t_1^3}{\rho_1} = 0.$$

D'où il résulte que *le problème se résoudra entièrement par quadratures.*

Ceci suppose $a \neq 0$. Dans le cas contraire, la courbe C est une hélice circulaire d'axe O z et les mouvements sont des mouvements de verrou. Mais ce cas est peu intéressant, car les surfaces S et S_1 correspondantes ne sont autres que le cylindre d'axe O z et de rayon R.

Deuxième cas : *La courbe* C *se trouve sur deux quadriques* Q. — Tout d'abord, si elle se trouve à la fois sur deux quadriques Q, elle se trouve aussi sur toutes les quadriques du faisceau ponctuel correspondant. Or, parmi celles-ci, il s'en trouve au moins une qui ne renferme pas de terme en x^2+y^2. En choisissant les axes comme à la page 383, on peut ramener son équation à la forme

$$-zx+by+c=0.$$

Mais alors on se trouve précisément dans le cas où l'on sait intégrer (8). Pour qu'il existe une intégrale algébrique, il faut que b soit nul, auquel cas la courbe C a pour équations

$$(14) \qquad y=mx-\frac{c}{3x^2}, \qquad z=\frac{c}{x}.$$

Il est alors facile de former l'équation aux x des points d'intersection de cette courbe avec la quadrique (5) et d'écrire qu'elle est vérifiée identiquement. On trouve, en annulant successivement les coefficients de $\frac{1}{x^4}, \frac{1}{x^3}, \frac{1}{x^2}$, x et terme constant,

$$R_1=0, \qquad Q_1=0, \qquad \beta_1=0, \qquad \alpha_1=0, \qquad Z_1=cP_1.$$

Par conséquent, il ne passe qu'une seule quadrique Q par la courbe C en question. *Notre deuxième cas ne peut donc pas se présenter* et le problème que nous nous étions posé est maintenant entièrement résolu.

Nous terminerons là, en même temps que notre Mémoire, l'étude des applications des mouvements (G), espérant avoir montré, d'une façon suffisante, tout l'intérêt qui s'attache à ces mouvements, ainsi que la manière dont on peut utiliser les résultats contenus dans ce travail pour traiter certaines questions particulières.

Sur la représentation linéaire homogène des groupes symétrique et alterné;

Par M. de SÉGUIER.

La théorie générale de la représentation des groupes de substitutions linéaires et homogènes est due à M. Schur [1]. Mais, pour l'application que j'ai en vue, je suis obligé de la reprendre d'abord brièvement sous une forme différente.

On sait qu'un groupe G de substitutions linéaires, à variables homogènes ou non, est dit *représenter* un groupe abstrait Γ quand G est simplement ou multiplement homomorphe à Γ [2]. Chaque substitution de G qui correspond à une substitution σ de Γ est dite *représenter* σ. Je dirai que la représentation est *propre* ou *impropre* selon que G est simplement ou multiplement homomorphe à Γ. Deux représentations G, G′ de Γ sont *équivalentes* ou *indistinctes* s'il existe un changement de variables transformant G en G′ de telle manière qu'une substitution quelconque s de G et sa transformée s' de G′ représentent toujours la même substitution de Γ.

1. Soit $\Gamma = \{\beta_1, \ldots, \beta_\nu\}$ un g_x fini, défini par $B_j(\beta) = 1$ ($j = 1, \ldots, m$), en désignant d'une manière générale par $\Lambda(\beta)$ un produit d'éléments β_i. De toute représentation homogène G′ (propre ou impropre)

---

[1] *Cr.*, t. 127, 1904, et t. 132, 1907.

[2] Je me servirai de la même terminologie que dans mes *Éléments de la théorie des groupes abstraits*, auxquels je renverrai par la lettre E, et mes *Éléments de la théorie des groupes de substitutions*, auxquels je renverrai par la lettre S.

de Γ on déduit, en y regardant les variables comme non homogènes et en adjoignant des similitudes [1] arbitraires, un groupe fini ou infini $G = \{b_1, \ldots, b_\nu, a_1, \ldots, a_\lambda, a_1^{-1}, \ldots, a_\lambda^{-1}\}$ $(\lambda \geqq m)$ où les $a_k^{\pm 1}$ sont des similitudes, vérifiant les équations (cf. *E.*, 18)

$$(1) \qquad B_j(b) = a_j, \qquad b_l^{-1} a_k b_l = a_k, \qquad A_i(a) = 1.$$

les $A_i(a) = 1$ se composant : 1° des conséquences $A_{i_1}(a) = 1$ $(i_1 = 1, 2, \ldots)$ des $B_j = a_j$ et des $b_l^{-1} a_k b_l = a_k$ entre $a_1^{\pm 1}, \ldots, a_m^{\pm 1}$, parmi lesquelles figurent les équations exprimant que $a_1^{\pm 1}, \ldots, a_m^{\pm 1}$ sont permutables entre eux [a_k, permutable à chaque b en vertu de $b_l^{-1} a_k b_l = a_k$, l'est à chaque $B_j(b)$] ; 2° des équations $A_{i_2}(a) = 1$ exprimant que $a_{m+1}^{\pm 1}, \ldots, a_\lambda^{\pm 1}$ sont permutables entre eux et à $a_1^{\pm 1}, \ldots, a_m^{\pm 1}$ (il est clair qu'aucune des équations $A_{i_2} = 1$ ne résulte de $A_{i_1} = 1$). Inversement, tout groupe linéaire vérifiant (1) et où les a sont des similitudes, fournit, en y regardant les variables comme homogènes, une représentation homogène de Γ.

Je dirai que G est une *hyperreprésentation de* Γ (*propre* ou *impropre* selon que G′ est propre ou impropre) *répondant* au *système* $(\check{a}_1, \ldots, \check{a}_m)$, en désignant d'une manière générale par $\check{s}$ le multiplicateur commun des variables dans une similitude s, et en appelant *système* $(x_1, \ldots, x_m)$ tout ensemble de m nombres vérifiant $A_i(x) = 1$ (x_i étant mis à la place de a_i). Les hyperreprésentations *d'un même nombre n de variables*, qui se déduisent de l'une d'elles G en multipliant chaque substitution de G par une similitude arbitraire (ce qui laisse les commutateurs inaltérés) et en adjoignant aux générateurs d'autres similitudes arbitraires seront dites *associées* entre elles et former une *catégorie*. Cette définition est évidemment indépendante du choix fait parmi elles de G et les changements de variables. Il est clair aussi qu'on obtient toutes les hyperreprésentations de la catégorie de G en y remplaçant b_l par $\tau_l b_l$, τ_l étant une similitude arbitraire, et le groupe $\{a_{m+1}^{\pm 1}, \ldots, a_\lambda^{\pm 1}\}$ par un groupe quelconque de similitudes de degré n : quand on remplace les b_l par les $\tau_l b_l$, $a_1, \ldots,$

---

[1] J'entends par *similitude* une substitution qui multiplie toutes les variables (supposées non homogènes) par un même nombre.

a_m sont remplacés par $\sigma_1 a_1, \ldots, \sigma_m a_m$, les similitudes σ vérifiant $B_j(\tau) = \sigma_j$ et par suite $A_i(\sigma) = 1$.

Désignons par $Q_h(a) = 1$ $(h = 1, 2, \ldots)$ les conséquences entre $a_1^{\pm 1}, \ldots, a_m^{\pm 1}$ des équations $B_j(b) = a_j$, $b_k b_l = b_l b_k$ $(k, l = 1, \ldots, \nu)$: les $Q_h = 1$ comprennent évidemment les $A_{i_1} = 1$, et pour qu'il existe des similitudes $\tau_1, \ldots, \tau_\nu$ telles que $B_j(\tau) = \sigma_j$, il faut et suffit que $Q_h(\sigma) = 1$. Les systèmes $(\check{\sigma}_1 \check{a}_1, \ldots, \check{\sigma}_m \check{a}_m)$ tels que $Q_h(\check{\sigma}) = 1$ seront dits *associés* et former une *catégorie*. Pour que deux hyperreprésentations de même degré répondant respectivement aux systèmes $(\check{a}_1, \ldots, \check{a}_m)$ et $(\check{\sigma}_1 \check{a}_1, \ldots, \check{\sigma}_m \check{a}_m)$ soient associées, il faut évidemment que les deux systèmes le soient.

2. Considérons le groupe $\mathcal{G}_0$, fini ou non, *défini* par les équations (1). Les équations $A_{i_1} = 1$ équivalent [en prenant la notation additive elles reviennent à un système linéaire (cf. *E.*, 205, 207)] à des équations de la forme $a_1'^{e_1} = 1, \ldots, a_r'^{e_r} = 1$, $a_\iota' a_\varkappa' = a_\varkappa' a_\iota'$ $(\iota, \varkappa = 1, \ldots, m)$, r étant $\leqq m$, et $a_{r+1}'^{\pm 1}, \ldots, a_m'^{\pm 1}$ étant d'ordre infini : les a_ι' sont ici des produits des a_i, soit $a_\iota' = A_\iota(a)$; et, si $A_{i_1} = \Pi a_k^{\alpha_{i_1 k}}$, les e_i sont les diviseurs élémentaires $\geqq 1$ de la matrice des entiers $\alpha_{i_1 k}$. En adjoignant donc les générateurs $a_k'^{\pm 1} = a_k^{\pm 1}$ $(k = m+1, \ldots, \lambda)$ et les équations $A_{i_2}(a') = 1$, on voit que le groupe $\mathcal{A}_0$ défini par les $A_i = 1$ est le produit direct de $\mathcal{A} = \{a_1', \ldots, a_r'\}$ par $\mathcal{A}_1 = \{a_{r+1}', \ldots, a_\lambda', a_{r+1}'^{-1}, \ldots, a_\lambda'^{-1}\}$; tout groupe X dont le produit direct par $\mathcal{A}$ est $\mathcal{A}_0$ est d'ailleurs engendré par des éléments de la forme $x_i = \alpha_i a_i'$, $x_i^{-1} = \alpha_i^{-1} a_i'^{-1}$ $(i = r+1, \ldots, \lambda)$, α_i étant quelconque dans $\mathcal{A}$, puisque X est dans $\mathcal{A}\mathcal{A}_1$ et ne contient aucun élément de $\mathcal{A}$. Si α_{11}, par exemple, est égal à 1, on peut évidemment remplacer partout a_1 par $\Pi_2^m a_k^{-\alpha_{1k}}$ et prendre A_1 pour a_1'. Alors $a_1' = 1$, $e_1 = 1$, et $\mathcal{A} = \{a_2', \ldots, a_r'\}$, $a_2', \ldots, a_r'$ étant des fonctions de $a_2, \ldots, a_m$. Si $A_1, \ldots, A_h$ sont résolus par rapport à $a_1, \ldots, a_h$, on pourra évidemment éliminer de même $a_1, \ldots, a_h$.

Si un groupe quotient $\mathcal{A}_0 | \mathcal{D}$ est fini, $\mathcal{D}$ contient nécessairement une puissance de tout élément c de $\mathcal{A}_1$, sans quoi $\mathcal{A}_0 | \mathcal{D}$ contiendrait des complexes $\mathcal{D} c^\rho$ en nombre infini. $\mathcal{G}_0 | \mathcal{A}_0$ est isomorphe à Γ, et toute représentation entière de $\mathcal{G}_0$ où les a sont des similitudes est une hyperreprésentation de Γ répondant à $(\check{a}_1, \ldots, \check{a}_m)$ ou, comme je

dirai encore, à $(\check{a}'_1, \ldots, \check{a}'_m)$. On remarquera que, dans les divers systèmes $(\check{a}'_1, \ldots, \check{a}'_m)$ qui répondent biunivoquement aux systèmes $(\check{a}_1, \ldots, \check{a}_m)$, $a'_{r+1}, \ldots, a'_m$ prennent des valeurs absolument arbitraires, puisque, d'après ce qu'on vient de voir, les équations $A_i(\check{a}) = 1$ laissent $\check{a}'_{r+1}, \ldots, \check{a}'_\lambda$ indéterminés. Quant à $\check{a}'_1, \ldots, \check{a}'_s$, *ils constituent un caractère de* $\mathcal{A}$, et à la représentation correspondante de $\mathcal{A}$ répond au moins une représentation irréductible de $\mathcal{G}_0 | \mathcal{A}$ (¹). En lui adjoignant des similitudes de même degré et de multiplicateurs $\check{a}'^{\pm 1}_{r+1}, \ldots, \check{a}'^{\pm 1}_\lambda$ on en déduit une représentation irréductible de $\mathcal{G}_0$. Ainsi *à chaque système* $(\check{a}_1, \ldots, \check{a}_m)$ *répond au moins une hyperreprésentation irréductible de* Γ.

3. Supposons G irréductible. Parmi les hyperreprésentations $\{\tau_1 b_1, \ldots, \sigma_1 a_1, \ldots\}$ associées à $G = \{b_1, \ldots, a_1, \ldots\}$, déterminons-en une, que j'appellerai *unitaire*, par la condition que $a_{m+1} = \ldots = a_\lambda = 1$ et que $|\tau_l| = |b_l|^{-1}$. Alors tous les $|\sigma_k a_k|$ seront égaux à 1. Or n divise N (²). On peut donc représenter chaque catégorie par un système $(\check{a}_1, \ldots, \check{a}_m)$ où $\check{a}_1^N = \ldots = \check{a}_m^N = 1$. *Le nombre des catégories de systèmes* $(\check{a}_1, \ldots, \check{a}_m)$ *est donc fini.*

Désignons ces catégories par $C_1, \ldots, C_\mu$, C_1 étant celle où $\check{a}_1 = \ldots = \check{a}_m = 1$. Si $(\check{a}_{\alpha 1}, \ldots, \check{a}_{\alpha m})$ et $(\check{a}_{\beta 1}, \ldots, \check{a}_{\beta m})$ sont deux systèmes représentant respectivement les catégories C_α et C_β, la catégorie C_γ du système $(\check{a}_{\alpha 1} \check{a}_{\beta 1}, \ldots, \check{a}_{\alpha m} \check{a}_{\beta m})$ (évidemment existant), entièrement déterminée par C_α et C_β, sera dite *composée* de C_α, C_β. *Les* C_α *forment donc un* g_μ *abélien* $\mathfrak{M}$ dit *multiplicateur de* Γ [on verra (**4**, **6**) que $\mathfrak{M}$ est indépendant des équations choisies pour Γ]. Comme $\check{a}_k^N = 1$, tout invariant (*E.*, 118) de $\mathfrak{M}$ et par suite tout facteur premier de μ divise N. *Si* $\mu = 1$, Γ *est dit fermé.*

4. On obtient donc tous les systèmes $(\check{a}_1, \ldots, \check{a}_m)$ en prenant $\check{a}_j = \sigma_j u_j$, les u_j étant des racines N^ièmes de 1 convenablement choisies

(¹) Frobenius, *S. A. B.*, 1898, p. 501-509, 512-515.

(²) Schur, *Crelle*, t. 127, p. 44-46.

qui caractérisent les diverses catégories, et les σ vérifiant $B_j(\tau) = \sigma_j$ où les τ sont arbitraires. Or, si l'on porte $\sigma_j = B_j(\tau)$ dans $A_{i_1}(\sigma) = 1$, on obtient, entre $\tau_1, \ldots, \tau_\nu$, des identités qui équivalent à $A'_\theta(\sigma)^{e_\theta} = 1$ ($\theta = 1, \ldots, r$), c'est-à-dire à $A'_\theta(\sigma) = 1$ (sans quoi les τ ne seraient pas indépendants). Donc $a'_\theta = A'_\theta(\sigma u) = A'_\theta(u)$. *Ainsi, quand le système* $(\check{a}_1, \ldots, \check{a}_m)$ *parcourt une catégorie, les* $\check{a}'_j$ *correspondants sont assujettis à la condition que* $\check{a}'_1, \ldots, \check{a}'_r$ *restent fixes,* $\check{a}_{r+1}, \ldots, \check{a}_m$ (*et de même* $\check{a}'_{m+1}, \ldots, \check{a}'_\lambda$) *variant arbitrairement.*

Considérons le *groupe fini* $\mathcal{G} \equiv \mathcal{G}_0 \mid \mathcal{A}_1$ *défini par les équations de* $\mathcal{G}_0$ *auxquelles on adjoint* $a'_{r+1} = \ldots = a'_\lambda = 1$ (même après la fixation de $\mathcal{G}_0$, qui dépend du choix des équations de Γ. $\mathcal{G}$ dépend encore du choix de $\mathcal{A}_1$ dans $\mathcal{A}_0$). $\mathcal{G}$ contient $\mathcal{A}$ (*E.*, 18), $\mathcal{G} \mid A \equiv \Gamma$, et, dans toute représentation irréductible de $\mathcal{G}$, les a sont [1] des similitudes [2]. Or, d'après ce qu'on vient de voir, les diverses représentations irréductibles de $\mathcal{A}$ fournies par les représentations entières irréductibles de $\mathcal{G}$ et par suite aussi les caractères de $\mathcal{A}$ [3] répondent biunivoquement aux catégories des systèmes $(\check{a}_1, \ldots, \check{a}_m)$. *Donc le nombre* μ *de ces catégories est* $e_1 \ldots e_r$, *plus grand commun diviseur des déterminants d'ordre* r *de la matrice des* $\alpha_{i_1 k}$. De plus les formules $a_\iota = A_\iota(a)$ montrent que ces catégories se composent comme les caractères de $\mathcal{A}$ [4]. *Donc* $\mathcal{A} \equiv \mathfrak{M}$.

On remarquera que toute conséquence de $A_{i_1} = 1$ peut ici se ramener

---

(1) Pour abréger le langage, j'identifierai souvent dans ce qui suit les groupes abstraits avec leurs représentations.

(2) Voir, par exemple, Schur, *S. A. B.*, 1905, p. 409, et 1906, p. 166.

(3) Frobenius, *S. A. B.*, 1898, p. 501-509, 512-515.

(4) *Cf.* Frobenius, *S. A. B.*, 1899, p. 330-334; Burnside, *P. L. M. S.*, 2e série, t. I, 1903, p. 120-122. $g_1, \ldots, g_n$ étant une base d'un groupe abélien H, γ_i l'ordre de g_i et θ_i une racine primitive $\gamma_i^{\text{ième}}$ de 1, les θ_i seront dits *racines fondamentales* de H et les quantités $\theta_i^{\rho_i}$ où ρ_i parcourt un système de restes de γ_i *caractères fondamentaux* de H (ils dépendent donc du choix de la base et de celui des θ_i). La valeur pour l'élément $h = \Pi g_i^{r_i}$ du caractère χ_r déterminé par $\theta_1^{\rho_1}, \ldots, \theta_n^{\rho_n}$ $(r = \Pi \theta_i^{\rho_i})$ est $\Pi \theta_i^{\rho_i r_i} = \chi_r(h)$. χ_r sera dit *associé* à r. Le caractère composé $\chi_r \chi_s$ est évidemment χ_{rs}. d parcourt un diviseur D de H, les éléments e tels que $\chi_d(e) = 1$ forment un groupe E. Comme $\chi_e(d) = \chi_d(e)$, les groupes D et E sont dits *réciproques*.

à la forme $\Pi_{i_1} A_{i_1}^{\nu_{i_1}} = 1$ (cf. *E.*, 17) ou $\Pi_k a_k^{\xi_k} = 1$ $(\xi_k = \Sigma_{i_1} \alpha_{i_1 k} \nu_{i_1})$. *Donc, dans tout système* $\Pi_k a_k^{\xi_{jk}} = 1$ *de semblables conséquences, les diviseurs élémentaires de la matrice* ξ *des* ξ_{jk} *sont des multiples des* e_i, *et le plus grand commun diviseur des mineurs d'ordre* r *de* ξ *est un multiple de* μ (*E.*, 197).

5. Partons d'un autre système $\overline{B}_j(\overline{\beta}) = 1$ $(j = 1, \ldots, \overline{m})$ d'équations de Γ, les $\overline{\beta}$ étant de nouveaux générateurs, et opérons de même en désignant les éléments, groupes, nombres correspondant à ceux introduits précédemment par les mêmes lettres surmontées d'un trait. *On va voir que* $\overline{\mathcal{A}} \equiv \mathcal{A}$ $(\equiv \mathfrak{M})$, *et que les déterminations de* $\overline{\mathcal{G}}$ *sont les mêmes que celles de* $\mathcal{G}$.

Supposons d'abord que $\overline{\beta}_l = \beta_l$, et que $\overline{\nu} = \nu$ ($\overline{m}$ pouvant être différent de m). $B_j(\beta)$ peut se mettre identiquement sous la forme $\Pi V^{-1}(\beta)(\overline{B}_h^{\pm 1}(\beta)) V(\beta)$ (*E.*, 17). Donc, en mettant $\overline{b}$ pour β, et en observant que $\overline{b}_l^{-1} \overline{a}_k \overline{b}_l = \overline{a}_k$, $B_j(\overline{b}) = \alpha_j$, α_j étant une fonction des $\overline{a}_h$. Inversement l'expression des $\overline{B}$ par les B fournit les $\overline{a}$ en fonction des α. Donc les α engendrent le même groupe que les $\overline{a}$. Or les équations $B_j(\overline{b}) = \alpha_j$, $\overline{b}_l^{-1} \alpha_k b_l = \alpha_k$ définissent évidemment le même groupe abstrait $\mathcal{G}_0$ que $B_j(b) = a_j$, $b_l^{-1} a_k b_l = a_k$, $\overline{b}_l$ jouant le rôle de b_l, et α_k celui de a_k. Donc $\overline{\mathcal{A}} \equiv \mathcal{A}$, et $\overline{\mathcal{G}}$ a les mêmes déterminations que $\mathcal{G}$.

Supposons maintenant $\overline{\nu} > \nu$, $\overline{\beta}_l = \beta_l$ pour $l = 1, \ldots, \nu$, $\overline{B}_j = B_j$ pour $j = 1, \ldots, m$, et que les autres $\overline{B}_j$ soient de la forme $\overline{\beta}_h^{-1} \varphi_h(\beta) = 1$ $(h = \nu + 1, \ldots, \overline{\nu})$, φ_h ne contenant que $\beta_1, \ldots, \beta_\nu$ (cf. *E.*, 19). La somme des exposants de $\overline{b}_h$ dans les conséquences des $\overline{B}_j(\overline{b}) = \overline{a}_j$ entre les $\overline{a}_j$ mises sous forme typique doit être nulle. Donc $\overline{a}_h$ disparaît en vertu de $\overline{b}_l^{-1} \overline{a}_k \overline{b}_l = \overline{a}_k$, $\overline{A}_i(\overline{a}) = 1$, et il ne reste entre les $\overline{a}$ que les mêmes conséquences $A_{i_1}(\overline{a}) = 1$ qu'entre les a. Donc $\overline{\mathcal{A}} \equiv \mathcal{A}$, et les déterminations de $\overline{\mathcal{G}}$ coïncident avec celles de $\mathcal{G}$.

Passons au cas général. On pourra, sans changer $\mathcal{A}$ ni les déterminations de $\mathcal{G}$, adjoindre aux équations $B_j(\beta) = 1$ les expressions $\overline{\beta}_h = \varphi_h(\beta)$ des $\overline{\beta}$ par les β [$\overline{B}_j(\overline{\beta}) = 1$ résulte du système ainsi formé (cf. *E.*, 19)]. On pourra de même, sans changer $\overline{\mathcal{A}}$ ni les déterminations de $\overline{\mathcal{G}}$, adjoindre aux équations $\overline{B}_j(\overline{\beta}) = 1$ les expressions

$\beta_h = \bar{\varphi}_h(\bar{\beta})$ des β par les $\bar{\beta}$. On se trouve alors dans le premier cas particulier considéré.

6. $\mathcal{C}$ désignant le commutant de $\mathcal{G}_0$, on obtient les équations de $\mathcal{G}_0 | \mathcal{C}$ en adjoignant à celles de $\mathcal{G}_0$ les relations $b_l b_k = b_k b_l$ (*E.*, 66). Comme, d'ailleurs, l'élimination des σ_j entre les $B_j(\tau) = \sigma_j$ entraîne les identités $A'_\theta(B(\tau)) = 1$, on voit qu'*en regardant les b comme permutables, on aura identiquement $a'_\theta = A'_\theta(a) = 1$, $(\theta = 1, \ldots, r)$, $a'_{r+1}, \ldots, a'_\lambda$ restant indéterminés.* Donc $\mathcal{C}$ contient $\mathcal{A}$ et est premier à $\mathcal{A}_1$ (*E.*, 66). Donc $\mathcal{C}\mathcal{A}_1$ est un produit direct qui se réduit à $\mathcal{C}$ quand on fait $a'_{r+1} = \ldots = a'_\lambda = 1$. *Donc $\mathcal{C}$ est le commutant de $\mathcal{G}$* (*E.*, 63). *Donc $\mathcal{C}$ est fini, et $\mathcal{C} | \mathcal{A}$ est isomorphe au commutant* K *de* Γ, *tandis que* $\mathcal{G}_0 | \mathcal{C}\mathcal{A}_1 \equiv \mathcal{G} | \mathcal{C} \equiv \Gamma | K$.

Soit G une hyperreprésentation *propre*, finie ou non, de Γ, vérifiant (1) et G^0 l'hyperreprésentation associée où $a'_{r+1} = \ldots = a'_\lambda = 1$. G^0 est évidemment homomorphe à $\mathcal{G}$, l'unité de G^0 répondant à un diviseur $\mathcal{D}^0$ de $\mathcal{A}$. Soit $A^0 = \mathcal{A} | \mathcal{D}^0$ le diviseur de G^0 répondant à $\mathcal{A}$. On aura $G^0 | A^0 \equiv \mathcal{G} | \mathcal{A} = \Gamma$, et le commutant C^0 de G^0, répondant à $\mathcal{C} | \mathcal{D}^0$ (*E.*, 63), contient A^0.

7. En considérant les b comme permutables (ce qui fournit les équations de $\mathcal{G}^0 | \mathcal{C}$) et en les éliminant (ou en les considérant comme des paramètres variables), on obtient, d'après ce qui précède, les équations de $\mathcal{A}_1$. Or, prenons la notation additive, et supposons que le déterminant Δ des coefficients des b dans $B_1, \ldots, B_\nu$ est $\neq 0$ (on peut toujours supposer, par exemple, que, pour $l \leq \nu$, B_l est de la forme $b_l^{q_l}$). On voit alors de suite que l'élimination des b fournit $a_{\nu+1}, \ldots, a_\lambda$ en fonction de $a_1, \ldots, a_\nu$ qui restent indéterminés. *Donc* $\mathcal{A}_1 = \{a_1, \ldots, a_\nu\}$, et $\nu = \lambda - r$. Pour un même groupe Γ on peut faire varier à volonté ν et λ à partir d'un certain minimum (on peut, par exemple, répéter plusieurs fois une équation $B_j(\beta) = 1$, ou introduire des générateurs fictifs β_h avec les équations $\beta_h = 1$). Mais, $\mathfrak{M}$ ne variant pas (8), les $e_i \neq 1$ ne varient pas. En particulier *on peut toujours faire $\lambda = m$, et alors $\nu = m - r$.*

Si Γ est fermé, on peut supposer $\nu = m = 1$. Donc *tout groupe cyclique est fermé.*

8. Considérons un groupe *fini* G_0 défini par $B_j(b) = a_j$, $b_l^{-1} a_k b_l = a_k$, $A_{0i}(a) = 1$, le système des $A_{0i} = 1$ comprenant entre autres toutes les équations $A_i = 1$. Soit A_0 le diviseur ($E.$, 18) abélien de G_0 défini par les $A_{0i} = 1$ (je dirai que G_0 est une *extension* de Γ par A_0 où A_0 est l'*extenseur* de Γ), C_0 le commutant de G_0, et D_0 le plus grand commun diviseur de A_0, C_0. Le commutant de $G_0 | A_0 \equiv \Gamma$ est $A_0 C_0 | A_0$, et $(G_0 | A_0) | (A_0 C_0 | A_0)$ est isomorphe à $G_0 | A_0 C_0$, $A_0 C_0 | A_0$ à $C_0 | D_0$, $A_0 C_0 | C_0$ à $A_0 | D_0$. Chaque représentation entière irréductible de G_0 est une hyperreprésentation de Γ correspondant à un système $(\check{a}_1, \ldots, \check{a}_m)$, puisque les a_i y sont des similitudes (*cf.* 4). Une fois choisis les caractères fondamentaux de A_0, il y a un caractère de A_0 et un seul χ'_α (α étant ici l'élément de A_0 associé à ce caractère) tel que $\chi'_\alpha(a_k) = \check{a}_k$ pour $k = 1, \ldots, \lambda$. Je dirai que le système $(\check{a}_1, \ldots, \check{a}_m)$ et sa catégorie *répondent* à χ'_α ou à α, et de même que l'hyperreprésentation considérée *répond* à χ'_α ou à α, et l'on sait obtenir toutes les hyperreprésentations irréductibles de Γ répondant à α [1].

Soient $(\check{a}_1, \ldots, \check{a}_m)$ répondant à α et $(\sigma_1 \check{a}_1, \ldots, \sigma_m \check{a}_m)$ répondant à α' deux systèmes associés; $\tau_1, \ldots, \tau_\nu$, $\sigma_1, \ldots, \sigma_\lambda$ des similitudes de degré n telles que $B_j(\tau) = \sigma_j$, d'où $A_i(\sigma) = 1$; T le plus petit commun multiple des σ, τ, et S celui des σ. T est une représentation de $G_0 | C_0$ dans laquelle S est une représentation de $A_0 | D_0 \equiv A_0 C_0 | C_0$ (d'où $T | S \equiv G_0 | A_0 C_0$). Le multiplicateur d'une variable dans T est donc un caractère linéaire χ de G_0 ayant la propriété de se réduire dans A_0 à un caractère χ'_f de $A_0 | D_0$, et l'on a $\chi'_{\alpha'} = \chi'_\alpha \chi'_f$ ou $\alpha' = \alpha f$. Soit inversement f un élément de A_0 tel qu'à χ'_f réponde un caractère linéaire χ de G_0, et $\chi(b_l) = \check{\tau}_l$, $\chi(a_k) = \check{\sigma}_k$. La représentation correspondant à χ donnera $B_j(\tau) = \sigma_j$, en sorte que $(\check{\sigma}_1 \check{a}_1, \ldots, \check{\sigma}_m \check{a}_m)$ est associé à $(\check{a}_1, \ldots, \check{a}_m)$. Il est clair que, si à χ'_f et à χ'_g répondent respectivement les caractères linéaires χ et ψ de G_0, le caractère linéaire $\chi\psi$ répondra à χ'_{fg}, c'est-à-dire que *les éléments de l'espèce de f forment un groupe* F_0. F_0 *est le réciproque de* D_0 : en effet, à tout caractère linéaire χ de G_0 répond un caractère χ'_f de $A_0 = \Sigma\alpha$, et D_0, plus grand

---

[1] Frobenius, *S. A. B.*, 1898, p. 501-509, 512-515.

commun diviseur de A_0, C_0 est formé des α tels que $\chi(\alpha) = 1$, c'est-à-dire tels que $\chi_f(\alpha) = 1$. On peut exprimer le résultat obtenu en disant qu'*à deux éléments* α *et* α' *de* A_0 (*autrement dit aux caractères* χ_α et $\chi_{\alpha'}$) *répondent deux systèmes* $(\check{a}_1, \ldots, \check{a}_m)$ *associés ou non selon que* $\alpha \equiv \alpha'$ *ou* $\alpha \not\equiv \alpha'$ mod F_0.

Si d'ailleurs $A_0 | F_0 = \Sigma F_0 \alpha_i$, et si C_{α_1}, C_{α_2} sont les catégories répondant à α_1, α_2, la catégorie répondant à $\alpha_1 \alpha_2$ sera évidemment $C_{\alpha_1 \alpha_2}$. *Donc* $A_0 | F_0 \equiv D_0$ *est isomorphe à un diviseur de* $\mathfrak{M}$. Je dirai que l'extension G_0 de Γ par A_0 est *normale* si $F_0 = 1$, et *antinormale* si $D_0 = 1$. Si $D_0 \equiv \mathfrak{M}$, les représentations de G_0 fournissent, en y regardant les variables comme homogènes, toutes les représentations homogènes de Γ, et G_0 sera dit *représentatif de* Γ. Ainsi $\mathcal{G}$ est un représentatif de Γ. Un représentatif de Γ peut se définir, *indépendamment des équations choisies pour* Γ, comme *un groupe dont les représentations fournissent, en y regardant les variables comme homogènes, toutes les représentations homogènes de* Γ. Si $A_0 = D_0 \equiv \mathfrak{M}$, je dirai que G_0 est *figuratif de* Γ : ainsi $\mathcal{G}$ est un figuratif de Γ, et *les diverses déterminations de* $\mathcal{G}$ *fournissent évidemment tous les figuratifs de* Γ. Un groupe G_0 figuratif de Γ peut donc se définir à nouveau, indépendamment des équations de Γ, comme un *représentatif d'ordre minimum de* Γ, ou comme *une extension normale d'ordre maximum, c'est-à-dire comme un groupe d'ordre maximum dont le central et le commutant ont un diviseur commun* A_0 *tel que* $G_0 | A_0 \equiv \Gamma$. *Ce diviseur commun* A_0, *étant isomorphe à* $\mathfrak{M}$, *est le même dans tous les figuratifs, et le multiplicateur se trouve ainsi défini à nouveau indépendamment des équations de* Γ. *Aucun diviseur de* A_0 *ne se sépare de* G_0, *car ce diviseur devrait être premier à* C_0 (*E.*, 53, 63).

Supposons G_0 *figuratif de* Γ. G_0 *étant, d'après ses équations, partiellement homomorphe à* $\mathcal{G}_0$, *son commutant* C_0, *qui répond à* $\mathfrak{S}$ *et a le même ordre, est isomorphe à* $\mathfrak{S}$. *Si donc* Γ *est parfait* (*E.*, 55), G_0, *qui coïncide alors avec* C_0, *est unique*.

9. Considérons les diverses extensions de Γ par un groupe donné $A = \Sigma\alpha = \Sigma\beta$. Soient $a_i^{\alpha_i} = 1$, $a_i a_k = a_k a_i$ $(i, k = 1, \ldots, \rho)$ les équations de A. Celles d'une extension G de Γ par A seront de la forme

$B_j(b) = c_j$, $b_l^{-1} a_k b_l = a_k$, $a_i^{\alpha_i} = 1$, $a_i a_k = a_k a_i$, les c_j étant des fonctions des a_i (vérifiant, en vertu des équations de A, toutes les conséquences des $B_j = c_j$ entre les c (*E.*, 19). *Ainsi,* Γ *et* A *étant donnés,* G *est défini par les* c_j qui seront dits *éléments définissants de* G. En prenant les générateurs $b'_l = \xi_l b_l$ (les ξ_l étant quelconques dans A) et les a_k, G se trouve défini par les éléments $B_j(\xi) c_j = c'_j$ qui (relativement à A) seront dits former un système d'éléments *associé* à celui des c_j et appartenir à une même *catégorie* [les *systèmes* de nombres correspondants $(\chi_\alpha(c_1), \ldots, \chi_\alpha(c_m))$ et $(\chi_\alpha(c'_1), \ldots, \chi_\alpha(c'_m))$, (*cf.* **1**, **8**), χ_α étant un caractère quelconque de A, sont évidemment associés]. *Deux systèmes d'éléments associés définissent donc le même groupe abstrait. De même si un automorphisme* (*E.*, 117) *de* A *fait correspondre à l'élément général* α *l'élément* α'', *l'extension* G'' *définie par* $c''_1, \ldots, c''_m$ *est isomorphe à* G, $b_i \alpha''$ *de* G'' *répondant à* $b_i \alpha$ *de* G, car les c''_j sont les mêmes fonctions des a''_i que les c_j des a_i, et A est défini par les mêmes équations entre les a''_i qu'entre les a_i.

Supposons que G *soit une extension normale de* Γ. Soit C_α la catégorie du système $(\chi_\alpha(c_1), \ldots)$. Quand α parcourt A, C_α parcourt (A, 1) catégories distinctes (**8**). Soit G^0 un *figuratif* de Γ défini par les éléments $d_1^0, \ldots, d_m^0$ de $\mathfrak{M}$, et C_x^0 la catégorie du système $(\psi_x(d_1^0), \ldots, \psi_x(d_m^0))$, ψ_x étant un caractère de $\mathfrak{M} = \Sigma x$. Soit $C_{x_\alpha}^0 = C_\alpha$. On aura $C_{x_\alpha x_\beta}^0 = C_{\alpha\beta}$, donc $x_\alpha x_\beta = x_{\alpha\beta}$, et les x_α forment un groupe $\mathfrak{M}' \equiv A$. Soit $\mathfrak{N}$ son réciproque dans $\mathfrak{M}$ (pour un choix déterminé de la base et des racines fondamentales). ψ_{x_α}, égal à 1 dans $\mathfrak{N}$, est un caractère de $\mathfrak{M} | \mathfrak{N}$, et à chaque élément β de A on peut faire correspondre un élément $\mathfrak{N}\beta^0$ de $\mathfrak{M} | \mathfrak{N}$ tel que $\psi_{x_\alpha}(\beta^0) = \chi_{\alpha'}(\beta)$, α' dépendant de α [la correspondance (α, α') est un automorphisme de A]. *Identifions* $\mathfrak{N}\beta^0$ *avec* β, et soit $d_j = \mathfrak{N} d_j^0$. L'extension $G \equiv G^0 | \mathfrak{N}$ de Γ par A définie par $d_1, \ldots, d_m$ est normale, puisque $(\psi_{x_\alpha}(d_1^0), \ldots)$ ou $(\chi_{\alpha'}(d_1), \ldots)$ parcourt (A, 1) catégories quand x_α parcourt $\mathfrak{M}'$, et $(\chi_\alpha(c_1), \ldots)$ est associé à $(\chi_{\alpha'}(d_1), \ldots)$. A l'automorphisme (α, α') de A en correspond un autre (β, β'') défini par la condition que $\chi_\alpha(\beta) = \chi_{\alpha'}(\beta'')$ quel que soit α dans A. En effet, cette relation, qui équivaut à $\chi_\beta(\alpha) = \chi_{\beta''}(\alpha')$, fait correspondre à chaque β un β'' complètement déterminé, et au produit de deux β le produit des β'' corres-

pondants. Si donc (β, β'') fait correspondre c''_j à c_j, $(\chi_{\alpha'}(d_1), \ldots)$ sera associé à $(\chi_{\alpha'}(c''_1), \ldots)$, et $(\chi_{\alpha'}(c''_1 d_1^{-1}), \ldots)$ *représente* C_1 *quel que soit* α'. Posons $c''_j d_j^{-1} = e_j$, et considérons l'extension G' de Γ par A définie par les e_j (qui vérifient évidemment les conditions requises). Comme toute hyperreprésentation de Γ fournie par G' appartient à la catégorie C_1, *l'extension* G' *est antinormale. Si inversement les* e_j *définissent une extension antinormale* G' *de* Γ *par* A, *l'extension* H *définie par les* $d_j e_j$ *est une extension normale de* Γ *par* A, puisque les systèmes $(\chi_\alpha(d_1 e_1), \ldots)$ appartiennent à des catégories distinctes.

Si donc on a déterminé s systèmes non associés $e_{k1}, \ldots, e_{km}$ $(k = 1, \ldots, s)$ *définissant respectivement des extensions antinormales* G_k *de* Γ *par* A, *s étant maximum, toute extension normale de* Γ *par* A *sera définie par un des systèmes* $d_1 e_{k1}, \ldots, d_m e_{km}$. Je désignerai par H_k l'extension définie par $d_1 e_{k1}, \ldots, d_m e_{km}$.

Ces s extensions ne sont pas toujours toutes distinctes (*cf.* **10, 11**). *Mais elles le sont toujours si* Γ *est complet* [1]. Il suffit de montrer que, si H_1, H_2, par exemple, sont isomorphes, l'automorphisme de Γ fourni par cet isomorphisme (qui fait correspondre A et $H_2 | A$ de H_2 à A et $H_1 | A$ de H_1, puisque le central de Γ est 1) est contragrédient. Or, s'il était cogrédient, on pourrait le ramener à l'unité en transformant H_2 par un de ses éléments, et il y aurait un isomorphisme de H_1 à H_2 faisant correspondre à $d_j e_{2j}$ un élément de la forme $B_j(\xi) d_j e_{1j}$, $\xi_1, \ldots, \xi_\nu$ étant dans A. En désignant alors généralement par α' l'élément que l'automorphisme ainsi obtenu pour A fait correspondre à α, $B_j(\xi) d_j e_{1j}$ est égal à $d'_j e'_{2j}$, et l'extension définie par $e'_{21}, \ldots, e'_{2m}$, *isomorphe à* G_2, est antinormale. Donc $(\chi_\alpha(e'_{21}), \ldots)$, comme $(\chi_\alpha(e_{11}), \ldots)$, appartient, quel que soit α, à C_1. Donc, $(\chi_\alpha(d_1 e_{11}), \ldots)$ et $(\chi_\alpha(d'_1 e'_{21}), \ldots)$ étant associés, $(\chi_\alpha(d_1), \ldots)$ et $(\chi_\alpha(d'_1), \ldots)$ ou [en

(1) Un groupe $G = \Sigma x = \Sigma x'$ est dit *complet* quand il n'a pas d'élément normal $\neq 1$ et qu'il n'admet que des automorphismes *cogrédients :* on appelle *cogrédient* tout automorphisme (x, x'), où x' est, quel que soit x, de la forme $a^{-1} x a$, a étant dans G ; les autres automorphismes sont dits *contregrédients*. L'automorphisme (x, x) est dit *automorphisme unité*. Voir Hölder, *M. A.*, t. XLVI, 1895, p. 324-325.

déterminant α'' par la condition que $\chi_\alpha(\beta') = \chi_{\alpha''}(\beta)$ quel que soit β dans A] $(\chi_{\alpha''}(d_1), \ldots)$ le sont. Or l'extension définie par $d_1, \ldots$ est normale. Donc $\alpha'' = \alpha$, et $\chi_\alpha(d'_j) = \chi_\alpha(d_j)$ quel que soit α, d'où $d'_j = d_j$. Donc l'automorphisme considéré de A fait correspondre e_{2j} à $B_j(\xi) e_{1j}$. Donc G_2 serait isomorphe à G_1 contre l'hypothèse.

10. Cherchons maintenant à construire les G_k, ce qui donnera en même temps s. Un quelconque d'entre eux G′ a un commutant C′ isomorphe au commutant K de Γ et des équations de la forme $g_i^{\gamma_i} = \eta_i \zeta_i$, $g_i g_j = g_j g_i \eta_{ij} \zeta_{ij}$ $(i, j = 1, \ldots, \sigma)$, $g_i^{-1} f_k g_i = f_{ki}$ (f_k parcourant les générateurs de C′, η_i, η_{ij} étant dans A et ζ_i, ζ_{ij}, f_{ki} dans C′) jointes à celles de A et de C′ et à celles exprimant que $a_1, \ldots, a_\rho$ sont normaux dans G′. En réduisant C′ à 1, les g deviennent permutables; donc $\eta_{ij} = 1$. En réduisant A à 1, on a les équations d'un groupe de commutant C′, isomorphe à Γ; donc les ζ_i et les ζ_{ij} sont complètement déterminés quand les g_i le sont. On voit d'ailleurs de suite, d'après la forme typique des conséquences des équations de G′(*E.*, 17) ou en adjoignant successivement les g_i à AC′, que, quels que soient les η_i dans A, G′ sera une extension antinormale de Γ par A (*E.*, 19). Or, en remplaçant g_i par un élément de Ag_i, η_i est remplacé par $\eta_i \theta_i^{\gamma_i}$, $\theta_i = \Pi_1^\rho a_k^{t_{ik}}$ étant quelconque dans A. Donc s est le nombre des manières de choisir les t_{ik} $(0 \leqq t_{ik} < \alpha_k)$, deux systèmes de t_{ik} tels que $t'_{11}, t'_{12}, \ldots$ et $t''_{11}, t''_{12}, \ldots$ étant regardés comme indistincts si chaque différence $t'_{ik} - t''_{ik}$ est de la forme $x\alpha_k + y\gamma_i$, c'est-à-dire si elle est un multiple du plus grand commun diviseur δ_{ik} de α_k et de γ_i. *Donc* $s = \Pi_{ik} \delta_{ik}$. En particulier, *si* (Γ, K) *est premier à* (A, 1), $s = 1$, *et il n'y a qu'une extension normale de* Γ *par* A.

Si $H_1, H_2, \ldots$ *sont les divers figuratifs de* Γ, *les extensions normales de* Γ *par* A *figurent toutes parmi les groupes* $H_i \mid \mathfrak{N}, \ldots, \mathfrak{N}$ *étant le même diviseur de* $\mathfrak{M}$ *qu'au* n° **9**. Soit en effet H′ une extension normale quelconque de Γ par A. On peut la construire comme au n° **8** en partant de l'extension antinormale G′ ayant pour équation $g_i^{\gamma_i} = \eta_i \zeta_i, \ldots$: H′ est défini par $d_1 e_1, \ldots, e_i$ étant égal à η_i pour $i \leqq \sigma$ et à 1 pour $i > \sigma$ (il suffit pour cela de ranger convenablement les équations). Or si, dans cette construction, A est remplacé par $\mathfrak{M}$, et chaque e_i par un élément de $\mathfrak{N} e_i^0$, $\mathfrak{N} e_i^0$ correspondant à e_i

dans un isomorphisme de A à $\mathfrak{M} \mid \mathfrak{N}$, H′ est remplacé par un figuratif H, et $H \mid \mathfrak{N} = H'$.

11. Je supposerai désormais $\lambda = m$, ce qui ne restreint pas la généralité.

Prenons par exemple pour Γ le $g_{2n} (n \geqq 2)$ diédral. $\mathcal{G}_0$ est défini par $a^n = \alpha$, $b^2 = \beta$, $b^{-1}ab = a^{-1}\gamma$ et les équations exprimant que α, β, γ sont normaux; $r = m - \nu$ est ici égal à 1. Toute conséquence de ces équations où ne figurent que α, β, γ se réduit, d'après sa forme typique (*E.*, 17) (la somme des exposants de a ou de b devant s'annuler), à $\alpha^{2x}\gamma^{-nx} = 1$. On a d'ailleurs, en élevant $b^{-1}ab = a^{-1}\gamma$ à la puissance n, $\alpha^2\gamma^{-n} = 1$. Donc $\mathcal{A}_0$ est ici défini par $\alpha^2 = \gamma^n$, $\alpha\beta = \beta\alpha$, $\alpha\gamma = \gamma\alpha$, $\beta\gamma = \gamma\beta$. *Donc $\mu = 2$ si n est pair, et Γ est fermé si n est impair.*

Soit n pair $= 2n'$, et prenons pour générateurs $\alpha' = \alpha\gamma^{-n'}$, β, γ. $\mathcal{A} = \{\alpha'\}$ est défini par $\alpha'^2 = 1$, et $\mathcal{A}_1$ a les déterminations

$$\{\beta, \beta^{-1}, \gamma, \gamma^{-1}\}, \quad \{\alpha\beta, (\alpha\beta)^{-1}, \gamma, \gamma^{-1}\},$$
$$\{\beta, \beta^{-1}, \alpha\gamma, (\alpha\gamma)^{-1}\}, \quad \{\alpha\beta, (\alpha\beta)^{-1}, \alpha\gamma, (\alpha\gamma)^{-1}\}.$$

Les déterminations correspondantes de $\mathcal{G}$ sont $a^{2n} = b^2 = 1$, $b^{-1}ab = a^{-1}$; $a^{2n} = 1$, $b^2 = a^n$, $b^{-1}ab = a^{-1}$; $a^{2n} = b^2 = 1$, $b^{-1}ab = a^{n-1}$ si n' est pair, ou $a^n = b^2 = 1$, $b^{-1}ab = a^{-1}\gamma$, $\gamma^2 = 1$, $a\gamma = \gamma a$, $b\gamma = \gamma b$ si n' est impair; $a^{2n} = 1$, $b^2 = a^n$, $b^{-1}ab = a^{n-1}$ si n' est pair, ou $a^n = 1$, $b^2 = \gamma$, $b^{-1}ab = a^{-1}\gamma$, $\gamma^2 = 1$, $a\gamma = \gamma a$ si n' est impair. La dernière détermination se ramène, quel que soit n, à la précédente en remplaçant b par ba. On voit que *le maximum du nombre des figuratifs indiqué au n° **10** n'est pas toujours atteint.*

12. Le symétrique Γ de degré $t \geqq 4$ (le symétrique et l'alterné de degré < 4 rentrent dans les cas précédemment traités) est défini par les équations (*S.*, 69)

$$(2)\quad \begin{cases} b^t = 1, \quad a^2 = 1, \quad (ba)^{t-1} = 1, \quad (ab^{-1}ab)^3 = 1, \quad (ab^{-j}ab^j)^2 = 1, \\ j = 2, \ldots, \tau, \quad \tau \text{ étant le plus grand entier } \leqq \frac{t}{2}. \end{cases}$$

On a à considérer le groupe $\mathcal{G}_0$ défini par les équations

$$(3)\quad \begin{cases} b^t = \beta, \quad a^2 = \alpha, \quad (ba)^{t-1} = \gamma, \quad (ab^{-1}ab)^3 = \delta, \quad (ab^{-j}ab^j) = \varepsilon_j, \\ j = 2, \ldots, \tau; \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon_j \text{ sont permutables à } a, b \text{ (donc entre eux).} \end{cases}$$

Ici $m = \tau + 3$, $\nu = 2$, $\mathcal{A}_0 = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\tau\}$.

Comme dans tout produit $a^x b^y a^{x'} b^{y'} \ldots$ *appartenant à* $\mathcal{A}_0$ on peut toujours faire passer à gauche le dernier élément à droite, je considérerai, dans un tel produit (que l'on peut évidemment écrire en commençant par un quelconque de ses éléments), le premier élément à gauche comme suivant le dernier à droite.

Je poserai $(a b^{-h} a b^h)^{\rho_h} = \varepsilon_h$ (h étant pris mod t; $\varepsilon_1 = \delta$; $\rho_h = 3$, si $h \equiv \pm 1 \bmod t$; $\rho_h = 2$, si $h \not\equiv \pm 1 \bmod t$: il est clair que $\varepsilon_h = \varepsilon_{-h}$). Pour abréger je dirai « transformer $ab^h a$ » au lieu « de remplacer $ab^h a$ par l'expression égale $b^h a b^{-h} a b^h a b^{-h} a b^h \delta \alpha^{-1}$, si $h \equiv \pm 1 \bmod t$, ou $b^h a b^{-h} a b^h \varepsilon_h \alpha^{-2}$, si $h \not\equiv \pm 1 \bmod t$ ».

Il s'agit maintenant de former les conséquences des équations (3) entre $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\tau$.

15. *Supposons d'abord un instant a permutable à b.* Soit (3 *bis*) le système obtenu en adjoignant à (3) $ba = ab$. Ce système (3 *bis*) équivaut évidemment à

$$b^t = \beta, \qquad a^2 = \alpha, \qquad b^{t-1} a^{t-1} = \gamma, \qquad \delta = \alpha^3, \qquad \varepsilon_j = \alpha^2, \qquad ba = ab,$$

et l'équation $b^{t-1} a^{t-1} = \gamma$ s'écrit, en vertu de $b^t = \beta$, $a^2 = \alpha$,

$$\alpha^{t-1} = b\gamma\beta^{-1}, \qquad \text{d'où} \qquad a^{t(t-1)} = \beta^{1-t}\gamma^t \qquad \text{ou} \qquad \alpha^{\frac{t(t-1)}{2}} = \beta^{1-t}\gamma^t.$$

Toute conséquence de (3 *bis*) entre $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\tau$ se ramène, en tenant compte de $\delta = \alpha^3$, $\varepsilon_j = \alpha^2$, à une relation entre α, β, γ seuls. D'ailleurs toute conséquence de (3 *bis*) peut se mettre, en vertu des équations exprimant que les générateurs sont permutables, sous la forme $\Phi = 1$, Φ étant un produit de puissances de $b^t\beta^{-1}$, $a^2\alpha^{-1}$, $b^{t-1}a^{t-1}\gamma^{-1}$, $\delta\alpha^{-3}$, $\varepsilon_j\alpha^{-2}$ (*E.*, 17). Une conséquence entre α, β, γ seuls est donc de la forme

$$(a^2\alpha^{-1})^x (b^t\beta^{-1})^y (b^{t-1}a^{t-1}\gamma^{-1})^z = 1.$$

Pour que b disparaisse, il faut que $ty + (t-1)z = 0$, d'où $y = (t-1)\xi$, $z = -t\xi$. Pour que a disparaisse, il faut que $2x + (t-1)z = 0$, d'où $x = \frac{t(t-1)}{2}\xi$. Donc la relation cherchée sera de la forme

$$\left(\alpha^{-\frac{t(t-1)}{2}} \beta^{1-t}\gamma^t\right)^\xi = 1.$$

Donc les conséquences de (3 *bis*) entre α, β, γ, δ, ε_2, ..., ε_τ *coïncident* avec les conséquences de

(4) $$\left\{ \begin{array}{l} \beta^{1-t}\gamma^t = \alpha^{\frac{t(t-1)}{2}}, \quad \delta = \alpha^3, \quad \varepsilon_j = \alpha^2. \\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon_j \text{ étant permutables.} \end{array} \right.$$

14. *Ne supposons plus a permutable à b. A priori* toutes les conséquences de (3) entre α, β, γ, δ, ε_2, ..., ε_τ résultent aussi de (3 *bis*).

On a d'ailleurs

(5) $$\delta^2 = \delta\, a^{-1}\delta\, a = (ab^{-1}ab)^3 a^{-1}(ab^{-1}ab)^3 a = \alpha^6,$$

(6) $$\varepsilon_j^2 = \varepsilon_j a^{-1}\varepsilon_j a = (ab^{-j}ab^j)^2 a^{-1}(ab^{-j}ab^j)^2 a = \alpha^4.$$

A la relation

$$(i+1, i+3, i+2)^{-1}.(12)(i+1, i+2).(i+1, i+3, i+2)$$
$$= (12)(i+2, i+3) \qquad [i \not\equiv \pm 1 \pmod t]$$

du g^t symétrique de champ 1, ..., t, isomorphe à Γ, répond dans $\mathcal{G}_0$ la relation

(7) $$b^{-i}(ab^{-1}ab)^{-2}b^i.ab^{-i}ab^i.b^{-i}(ab^{-1}ab)^2 b^i = ab^{-i-1}ab^{i+1}\xi,$$

ξ étant dans $\mathcal{A}_0$, ou, en remplaçant $(ab^{-1}ab)^{-2}$ par $\delta^{-1}ab^{-1}ab$, et en développant $(ab^{-1}ab)^2$,

$$\delta^{-1}\alpha b^{-i}ab^{-1}.ab^{i+1}a.b^{-i-1}ab\,ab^{-1}ab^{i+1} = ab^{-i-1}ab^{i+1}\xi,$$

ou, en transformant $ab^{i+1}a$,

$$\delta^{-1}\varepsilon_{i+1}.b^{-i}ab^i ab^{-i}a.b^{-1}ab^{i+1} = ab^{-i-1}ab^{i+1}\xi,$$

ou, en remplaçant $b^{-i}ab^iab^{-i}a$ par $a^{-1}b^{-i}\varepsilon_i = \alpha^{-1}\varepsilon_i ab^{-i}$

$$\alpha^{-1}\delta^{-1}\varepsilon_i\varepsilon_{i+1} = \xi, \qquad \text{d'où} \qquad \xi^2 = 1.$$

Or, en élevant (7) au carré, on a $\varepsilon_i = \varepsilon_{i+1}\xi^2$. Donc

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \ldots = \varepsilon_\tau \qquad \text{soit} \qquad = \varepsilon.$$

On a ensuite

$$\gamma = (ba)^{t-1} = bab^{-1}.b^2ab^{-2}\ldots b^{t-2}ab^{2-t}.b^{t-1}a,$$

ou, en remplaçant bab^{-1} par $abab^{-1}abab^{-1}a\,\alpha^{-5}\delta$ et b^jab^{-j} $(j \geqq 2)$

par $ab^j ab^{-j} a \alpha^{-3} \varepsilon$,

$$\begin{aligned}\gamma &= ab\,ab^{-1}ab\,ab^{-1}a.ab^2ab^{-2}a.ab^3ab^{-3}a\ldots ab^{t-2}ab^{2-t}a.b^{t-1}a\,\alpha^{4-3t}\delta\varepsilon^{t-3}\\ &= ab\,ab^{-1}a(ba)^{t-2}b^{2-t}ab^{t-1}a\,\alpha^{1-2t}\delta\varepsilon^{t-3}.\end{aligned}$$

ou, puisque $b^t = \beta$,

$$\gamma = ab\,ab^{-2}\gamma b^2 ab^{-1}a\,\alpha^{1-2t}\delta\varepsilon^{t-3}$$

ou

(8) $$\delta\varepsilon^{t-3} = \alpha^{2t-3}.$$

Si t est impair, $\varepsilon^{t-3} = \alpha^{2t-6}$. Donc

(9) $$\delta = \alpha^3 \quad \text{ou} \quad \delta = \alpha^{-1}\varepsilon.$$

Si t est pair, $\varepsilon^{t-3} = \alpha^{2t-8}\varepsilon$. Donc

(10) $$\delta\varepsilon = \alpha^5 \quad \text{ou} \quad \delta = \alpha\varepsilon.$$

On peut donc supprimer les générateurs δ, ε_3, …, ε_τ de A_0, et supposer que, dans (3), ε_3, …, ε_τ désignent $\varepsilon_2 = \varepsilon$, et que δ désigne α^3 si t est impair, $\alpha\varepsilon$ si t est pair. Toutes les conséquences de (3) entre α, β, γ, ε résultent alors de $\beta^{4-t}\gamma^t = \alpha^{\frac{t(t-1)}{2}}$, $\varepsilon = \alpha^2$.

13. Prenons maintenant la formule $\beta = b^t = (aba)^t \bmod \{\alpha\}$, et sous-entendons désormais le module $\{\alpha\}$. En transformant aba on a

$$\beta \equiv (b\,ab^{-1}ab\,ab^{-1}ab)^t,$$

ou, en faisant commencer le second membre à la quatrième lettre

$$\beta \equiv (ab\,ab^{-1}ab^2ab^{-1})^t,$$

d'où, en transformant ab^2a,

$$\beta\varepsilon^{-t} \equiv (ab\,ab\,ab^{-2}ab)^t \equiv [ab^{-2}(ab)^3]^t$$

ou, puisque $(ab)^3 = (ab)^{t-4}(ab)^{4-t} = \gamma(ab)^{4-t}$,

(11) $$\begin{aligned}\beta(\gamma\varepsilon)^{-t} \equiv [ab^{-2}(ab)^{4-t}]^t &\equiv [ab^{-2}(b^{-1}a)^{t-4}]^t\\ &\equiv [ab^{-3}a(b^{-1}a)^{t-6}b^{-1}a]^t\\ &\equiv [b^{-4}a(b^{-1}a)^{t-6}]^t\\ &\equiv [ab^{-4}(ab^{-1})^{t-6}]^t.\end{aligned}$$

Si $t=4$, on obtient de suite, en transformant un des $ab^{-2}a$ de la première expression de $\beta(\gamma\varepsilon)^{-t}$, $\beta^{t-1}\gamma^{-t}=1$. Si $t=5$, on obtient de même, en transformant un des $ab^{-3}a$ de la seconde expression de $\beta(\gamma\varepsilon)^{-t}$, $\beta^{t-1}\gamma^{-t}=\varepsilon$. Ces formules rentrent dans les formules générales que nous obtiendrons tout à l'heure.

16. Considérons l'élément $e_x=[ab^{-2x}(ab^{-1})^{t-2x-2}]^t$ $(1\leqq x\leqq\tau-1)$, et admettons qu'il est dans $\mathcal{A}_0$ [on vient de voir que $e_2\equiv\beta(\gamma\varepsilon)^{-t}$]. En transformant $ab^{-2x}a$ on obtient

$$(12)\qquad e_x\equiv[ab^{2x}ab^{-2x-1}(ab^{-1})^{t-2x-4}ab^{-2x-1}]^t\varepsilon^t.$$

d'où, en transformant partout $ab^{-2x-1}a$,

$$e_x\equiv[ab^{-2x-2}ab^{2x+1}ab^{-2x-2}(ab^{-1})^{t-2x-6}ab^{-2x-2}ab^{2x+1}]^t\varepsilon^t,$$

d'où, en transformant le deuxième et le troisième ab^{-2x-2} du crochet,

$$e_x\equiv[ab^{-2x-2}ab^{-1}ab^{2x+2}ab^{-2x-3}(ab^{-1})^{t-2x-8}ab^{-2x-3}ab^{2x+2}ab^{-1}]^t\varepsilon^t,$$

et généralement

$$(13)\qquad e_x\equiv[ab^{-2x-2}(ab^{-1})^n ab^{2x+n+1}ab^{-2x-n-2}\times(ab^{-1})^{t-2(x+n+3)}ab^{-2x-n-2}ab^{2x+n+1}(ab^{-1})^n]^t\varepsilon^t.$$

17. *Soit d'abord t impair $=2\tau+1$, et supposons d'abord $x\leqq\tau-3$.* On aura, en faisant $n=\tau-x-3$,

$$(14)\qquad e_x\equiv[ab^{-2x-2}(ab^{-1})^{\tau-x-3}ab^{x+\tau-2}ab^{-x-\tau+1}\times ab^{-1}ab^{-x-\tau+1}ab^{x+\tau-2}(ab^{-1})^{\tau-x-3}]^t\varepsilon,$$

d'où, en transformant partout $ab^{-x-\tau+1}a$,

$$(15)\quad e_x\equiv[ab^{-2x-2}(ab^{-1})^{\tau-x-2}ab^{x+\tau-1}ab^{-t-2x+2}ab^{x+\tau-1}(ab^{-1})^{\tau-x-2}]^t\varepsilon.$$

Si $x=1$, cette formule donne $e_1\equiv e_2\varepsilon$, et, comme e_2 est dans $\mathcal{A}_0$ (**15**), e_1 y est aussi. Soit désormais $x\geqq2$. *Supposons établie, pour i impair, la généralisation suivante de* (15)

$$(16)\quad e_x\equiv[ab^{-2x-2}(ab^{-1})^{\tau-x-2}ab^{x+\tau-i}ab^{-t-2x+2i}ab^{x+\tau-i}(ab^{-1})^{\tau-x-2}]\varepsilon^i,$$

qui donne, pour $x=i$, d'après la définition de e_x, $e_i\equiv e_{i+1}\varepsilon^i$. On en

tire, en transformant $ab^{-t-2x+2i}$,

$$e_x \equiv [ab^{-2x-2}(ab^{-1})^{\tau-x-2}ab^{-x-\tau+i-1}ab^{t+2x-2i}ab^{-x-\tau+i-1}(ab^{-1})^{\tau-x-2}]^t\varepsilon^{i+1},$$

et généralement

$$\begin{aligned} e_x \equiv [& ab^{-2x-2}(ab^{-1})^n ab^{n+2+i}ab^{-n-3-i} \\ & \times (ab^{-1})^{t-2(x+n+3)}ab^{-n-3-i}ab^{n+2+i}(ab^{-1})^n]^t\varepsilon^{i+1}, \end{aligned}$$

d'où, en faisant $n = 0$, et en transformant les ab^{2+i},

$$e_x \equiv [ab^{-2x+2(i+1)}ab^{-i-2}(ab^{-1})^{t-2x-4}ab^{-i-2}]^t\varepsilon^{i+1}. \tag{17}$$

Si $x = i+1$, cette formule donne, d'après la définition de e_x, $e_{i+1} \equiv e_{i+2}\varepsilon^{i+1}$. De là, en transformant $ab^{-2x+2(i+1)}$,

$$e_x \equiv [ab^{2x-2(i+1)}ab^{-2x+i}(ab^{-1})^{t-2x-4}ab^{-2x+i}]^t\varepsilon^{i+2},$$

d'où, en transformant partout $ab^{-2x+i}a$,

$$e_x \equiv [ab^{-2x-2}ab^{2x-i}ab^{-2x+i-1}(ab^{-1})^{t-2x-6}ab^{-2x+i-1}ab^{2x-i}]^t\varepsilon^{i+2},$$

et généralement

$$\begin{aligned} e_x \equiv [& ab^{-2x-2}(ab^{-1})^n ab^{2x+n-i}ab^{-2x-n+i-1} \\ & \times (ab^{-1})^{t-2(x+n+3)}ab^{-2x-n+i-1}ab^{2x+n-i}(ab^{-1})^n]^t\varepsilon^{i+2}, \end{aligned}$$

d'où, pour $n = \tau - x - 3$,

$$\begin{aligned} e_x \equiv [& ab^{-2x-2}(ab^{-1})^{\tau-x-3}ab^{x+\tau-i-3}ab^{-x-\tau+i+2} \\ & \times ab^{-1}ab^{-x-\tau+i+2}ab^{x+\tau-i-3}(ab^{-1})^{\tau-x-3}]^t\varepsilon^{i+2}. \end{aligned}$$

En transformant partout $ab^{-x-\tau+i+2}a$, on obtient alors la formule (16) où i est changé en $i+2$.

On a donc, d'une manière générale, quel que soit x,

$$e_x \equiv e_{x+1}\varepsilon^x. \tag{18}$$

18. Nous avons supposé jusqu'ici $x \leqq \tau - 3$. *Soit maintenant* $x = \tau - 2$. On partira alors de la définition de e_x, qui jouera le rôle de (14), et qui s'écrit ici

$$e_{\tau-2} \equiv [ab^{-2\tau+4}(ab^{-1})^{t-2\tau+2}]^t \equiv [ab^5(ab^{-1})^3]^t\beta^{-t}.$$

On en déduit successivement par le même procédé

$$\begin{aligned} e_{\tau-2} &\equiv [ab^{-5}ab^{4}\quad ab^{-1}ab^{4}\quad]^t \beta^{-t}\varepsilon \\ &\equiv [ab^{7}\quad ab^{-4}ab^{3}\quad ab^{-4}]^t \beta^{-t}\varepsilon \\ &\equiv [ab^{-7}ab^{3}\quad ab^{3}\quad ab^{3}\quad]\ \beta^{-t} \\ &\equiv [ab^{9}\quad ab^{-3}ab^{-1}ab^{-3}]\ \beta^{-t} \\ &\equiv \ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

et généralement

$$\begin{aligned} e_{\tau-2} &\equiv [ab^{4n+1}\quad ab^{1-2n}\quad ab^{-1}ab^{1-2n}\quad]^t \beta^{-t} \\ &\equiv [ab^{-4n-1}\quad ab^{2n+2}\quad ab^{-1}ab^{2n+2}\quad]^t \beta^{-t}\varepsilon \\ &\equiv [ab^{4n+3}\quad ab^{-2n-2}\quad ab^{3}\quad ab^{-2n-2}\quad]^t \beta^{-t}\varepsilon \\ &\equiv [ab^{-4n-3}\quad ab^{2n+1}\quad ab^{3}\quad ab^{2n+1}\quad]^t \beta^{-t} \\ &\equiv [ab^{4(n+1)+1}ab^{1-2(n+1)}ab^{-1}ab^{1-2(n+1)}]\ \beta^{-t} \\ &\equiv \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

On s'arrêtera à la première formule où apparaît b^t. Cette formule s'écrit, quel que soit t,

$$e_{\tau-2} \equiv \beta^{-t}(ab^3ab^{-1})^t\varepsilon^\tau \equiv e_{\tau-1}\varepsilon^\tau \equiv e_{\tau-1}\varepsilon^{\tau-2}, \tag{19}$$

c'est-à-dire que la formule (18) s'applique encore pour $x = \tau - 2$.

19. *Soit* $x = \tau - 1$. C'est encore la définition de e_x qui jouera le rôle de (14). On partira donc de

$$e_{\tau-1} \equiv [ab^{-2\tau+2}(ab^{-1})^{t-2\tau}]^t \equiv [ab^3ab^{-1}]^t\beta^{-t},$$

d'où l'on déduit, toujours par le même procédé,

$$\begin{aligned} e_{\tau-1} &\equiv [ab^{-3}\quad ab^{5}\quad]^t \beta^{-t}\varepsilon \\ &\equiv [ab^{-5}\quad ab^{7}\quad]^t \beta^{-t} \\ &\equiv [ab^{-7}\quad ab^{9}\quad]^t \beta^{-t}\varepsilon \\ &\equiv \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\equiv [ab^{-4n-1}ab^{4n+3}]^t \beta^{-t} \\ &\equiv [ab^{-4n-3}ab^{4n+5}]^t \beta^{-t}\varepsilon \\ &\equiv \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\equiv [ab^{2-t}\quad ab^{t}\quad]^t \beta^{-t}\varepsilon^{\tau-1}. \end{aligned}$$

On a donc ici

$$e_{\tau-1} \equiv \beta^{2-t}\varepsilon^{\tau-1}. \tag{20}$$

Ainsi en multipliant les formules déduites de (18) pour $x = 2, \ldots, \tau - 3$, par (19) et (20),

(21) $$e_2 \equiv \beta^{2-t} \varepsilon^{\frac{\tau(\tau-1)}{2} - 1}.$$

Or $e_2 \equiv \beta(\gamma\varepsilon)^{-t} \equiv \beta\gamma^{-t}\varepsilon$ (**15**). Donc, en éliminant e_2,

$$\beta^{t-1}\gamma^{-t} \equiv \varepsilon^{\frac{\tau(\tau-1)}{2}}.$$

20. *Soit maintenant t pair $= 2\tau$, et supposons d'abord $x \leqq \tau - 3$.* La formule (13) donne, pour $n = \tau - x - 3$,

$$e_x \equiv [ab^{-2x-2}(ab^{-1})^{\tau-x-3}ab^{x+\tau-2}ab^{-x-\tau+1}ab^{-x-\tau+1}ab^{x+\tau-2}(ab^{-1})^{\tau-x-3}]^t,$$

d'où, en transformant le premier $ab^{-x-\tau+1}a$ du crochet,

$$e_x \equiv [ab^{-2x-2}(ab^{-1})^{\tau-x-2}ab^{x+\tau-1}ab^{-t-2x+2}ab^{x+\tau-2}(ab^{-1})^{\tau-x-3}]^t,$$

d'où, en transformant $ab^{-t-2x+2}a$,

$$e_x \equiv [ab^{-2x-2}(ab^{-1})^{\tau-x-2}ab^{-x-\tau+1}ab^{t+2x-2}ab^{-x-\tau}(ab^{-1})^{\tau-x-3}]^t.$$

Si $x = 1$, cette formule donne $e_1 \equiv e_2$. Donc e_1 est, comme e_2, dans A_0 (**15**). Supposons établie la formule plus générale

(22) $$e_x \equiv [ab^{-2x-2}(ab^{-1})^{\tau-x-2}ab^{-x-\tau+i}ab^{t+2x-2i}ab^{-x-\tau+i-1}(ab^{-1})^{\tau-x-3}]^t,$$

d'où, pour $x = i$, $e_i \equiv e_{i+1}$. On en tire, en transformant $ab^{-x-\tau+i}a$,

$$e_x \equiv [ab^{-2x-2}(ab^{-1})^{\tau-x-3}ab^{-x-\tau+i-1}ab^{x+\tau-i}ab^{x+\tau-i}ab^{-x-\tau+i-1}(ab^{-1})^{\tau-x-3}]^t,$$

d'où, en transformant partout $ab^{-x-\tau+i-1}$, et en introduisant $b^t b^{-t} b^t b^{-t}$,

$$e_x \equiv [ab^{-2x-2}(ab^{-1})^{\tau-x-4}ab^{\tau-x+i-2}ab^{x-\tau-i+1}$$
$$\times (ab^{-1})^2 ab^{x-\tau-i+1}ab^{\tau-x+i-2}(ab^{-1})^{\tau-x-4}]^t,$$

et généralement

$$e_x \equiv [ab^{-2x-2}(ab^{-1})^n ab^{n+i+2}ab^{-n-i-3}(ab^{-1})^{t-2(x+n+3)}ab^{-n-i-3}ab^{n+i+2}(ab^{-1})^n]^t,$$

d'où, en faisant $n = 0$, et en transformant partout $ab^{t+2}a$,

(23) $$e_x \equiv [ab^{-2x+2(i+1)}ab^{-i-2}(ab^{-1})^{t-2x-4}ab^{-i-2}]^t,$$

qui, pour $x = i + 1$, donne $e_{i+1} \equiv e_{i+2}$. En transformant $ab^{-2x+2(i+1)}a$,

on en tire

$$e_x \equiv [ab^{2x-2(i+1)}ab^{-2x+i}(ab^{-1})^{t-2x-4}ab^{-2x+i}]^t,$$

d'où, en transformant partout $ab^{-2x+i}a$,

$$e_x \equiv [ab^{-2x-2}ab^{2x-i}ab^{-2x+i-1}(ab^{-1})^{t-2x-6}ab^{-2x+i-1}ab^{2x-i}]^t,$$

et généralement

$$\begin{aligned} e_x \equiv [& ab^{-2x-2}(ab^{-1})^n ab^{2x+n-i} ab^{-2x-n+i-1} \\ & \times (ab^{-1})^{t-2(x+n+3)} ab^{-2x-n+i-1} ab^{2x+n-i}(ab^{-1})^n]^t, \end{aligned}$$

d'où, pour $n = \tau - x - 3$,

$$\begin{aligned} e_x \equiv [& ab^{-2x-2}(ab^{-1})^{\tau-x-3} ab^{x+\tau-i-3} \\ & \times ab^{-x-\tau+i+2} ab^{-x-\tau+i+2} ab^{x+\tau-i-3}(ab^{-1})^{\tau-x-3}]^t, \end{aligned}$$

et, en transformant le premier $ab^{-x-\tau+i+2}a$ du crochet,

$$e_x \equiv [ab^{-2x-2}(ab^{-1})^{\tau-x-2}ab^{x+\tau-i-2}ab^{-2x-t+2i+4}ab^{x+\tau-i-3}(ab^{-1})^{\tau-x-3}]^t.$$

En transformant $ab^{-2x-t+2i+4}a$, on en déduit la formule (22) où i est remplacé par $i+2$. On a donc généralement $e_x \equiv e_{x+1}$. Donc $e_1 \equiv e_{\tau-3}$.

21. *Soit maintenant* $x = \tau - 2$. La définition de e_x donne

$$e_{\tau-2} \equiv [ab^{-t+4}(ab^{-1})^2]^t \equiv [ab^4(ab^{-1})^2]^t \beta^{-t}.$$

On en déduit, en transformant ab^4a,

$$e_{\tau-2} \equiv [ab^{-4}ab^3ab^3]^t \beta^{-t},$$

d'où, en transformant le premier ab^3a, puis, par des transformations successives analogues,

$$\begin{aligned} e_{\tau-2} & \equiv [ab^{6} \quad ab^{-1} \quad ab^{-3} \quad]^t \beta^{-t} \\ & \equiv [ab^{-6} \quad ab^{5} \quad ab^{3} \quad]^t \beta^{-t} \\ & \equiv [ab^{8} \quad ab^{-1} \quad ab^{-5} \quad]^t \beta^{-t} \\ & \equiv [ab^{-8} \quad ab^{7} \quad ab^{3} \quad]^t \beta^{-t} \\ & \equiv \ldots\ldots\ldots\ldots \ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

et généralement

$$(24)\qquad \begin{aligned} e_{\tau-2} &\equiv [ab^{2n} \quad ab^{-1} \quad ab^{3-2n}]^t \beta^{-t} \\ e_{\tau-2} &\equiv [ab^{-2n} \quad ab^{2n-1}\, ab^{3}]^t \beta^{-t} \\ &\equiv [ab^{2(n+1)}\, ab^{-1} \quad ab^{3-2(n+1)}]^t \beta^{-t} \\ &\equiv \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

La formule (24) donne pour $n = \tau$

$$e_{\tau-2} \equiv (ab^2)^t \beta^{-t} \equiv e_{\tau-1}.$$

22. *Soit* $x = \tau - 1$, et $e_x = e_{\tau-1} = (ab^2)^t \beta^{-t}$. Posons $t = qt'$, t' étant impair, et $q = 2^\theta = 2q'$. Alors $e_{\tau-1} = [(ab^2)^q]^{t'} \beta^{-t}$. Transformons un des ab^2a du crochet. Il viendra

$$e_{\tau-1} \equiv [ab^4 ab^{-2} ab^4 (ab^2)^{q-3}]^{t'} \beta^{-t} \varepsilon,$$

d'où, en transformant partout ab^4a,

$$e_{\tau-1} \equiv [(ab^6 ab^{-4})^2 ab^6 (ab^2)^{q-5}]^{t'} \beta^{-t} \varepsilon,$$

et généralement

$$e_{\tau-1} \equiv [(ab^{2n+2} ab^{-2n})^n ab^{2n+2} (ab^2)^{q-2n-1}]^{t'} \beta^{-t} \varepsilon^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

On tire de là, pour $n = q' - 1$,

$$e_{\tau-1} \equiv [(ab^q ab^{2-q})^{q'-1} ab^q ab^2]^{t'} \beta^{-t} \varepsilon^{\frac{q'(q'-1)}{2}}.$$

Si t est $> q$, on continuera en transformant partout $ab^q a$, ce qui donne

$$e_{\tau-1} \equiv [ab^{2q+2} ab^{-q} (ab^{q+2} ab^{-q})^{q'-1}]^{t'} \beta^{-t} \varepsilon^{\frac{q'(q'+1)}{2}},$$

d'où, en transformant partout $ab^{q+2}a$ et $ab^{2q+2}a$,

$$e_{\tau-1} \equiv [ab^{2q+4} ab^{-2q-2} ab^{2q+4} ab^{-q-2} (ab^{q+4} ab^{-q-2})^{q'-2}]^{t'} \beta^{-t} \varepsilon^{\frac{(q'+1)(q'+2)}{2}+1},$$

et généralement

$$\begin{aligned} e_{\tau-1} \equiv [(ab^{2q+2n+2} ab^{-2q-2n})^n ab^{2q+2n+2} ab^{-q-2n} \\ \times (ab^{q+2n+2} ab^{-q-2n})^{q'-n-1}]^{t'} \beta^{-t} \varepsilon^{\frac{(q'+n)(q'+n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2}}, \end{aligned}$$

d'où, pour $n = q' - 1$,

$$e_{\tau-1} \equiv [(ab^{3q}ab^{2-3q})^{q'-1}ab^{3q}ab^{-2q+2}]^{t'}\beta^{-t}\varepsilon^{\frac{3q'(3q'-1)}{2}},$$

et généralement, *pour n impair*),

$$e_{\tau-1} \equiv [(ab^{nq}ab^{2-nq})^{q'-1}ab^{nq}ab^{-(n-1)q+2}]^{t'}\beta^{-t}\varepsilon^{\frac{nq'(nq'-1)}{2}},$$

d'où, pour $n = t'$,

$$e_{\tau-1} \equiv [(ab^{t}ab^{2-t})^{q'-1}ab^{t}ab^{-t+q+2}]^{t'}\beta^{-t}\varepsilon^{\frac{t'(t'-1)}{2}} = \beta^{2-t}\varepsilon^{\frac{\tau(\tau-1)}{2}}.$$

Donc

$$e_2 \equiv e_{\tau-1} \equiv \beta^{2-t}\varepsilon^{\frac{\tau(\tau-1)}{2}}.$$

Or $e_2 \equiv \beta\gamma^{-t}$ (**15**). Donc, en éliminant e_2,

$$\beta^{t-1}\gamma^{-t} \equiv \varepsilon^{\frac{\tau(\tau-1)}{2}}.$$

23. On a donc, quel que soit t,

(25) $$\beta^{1-t}\gamma^{t}\varepsilon^{l}\alpha^{m} = 1, \qquad l = \frac{\tau(\tau-1)}{2},$$

m étant encore inconnu. Cette relation étant une conséquence de $\beta^{1-t}\gamma^{t} = \alpha^{\frac{t(t-1)}{2}}$, $\varepsilon = \alpha^2$ (**14**), son premier membre est de la forme

(26) $$\left(\beta^{1-t}\gamma^{t}\alpha^{-\frac{t(t-1)}{2}}\right)^{x}(\varepsilon\alpha^{-2})^{y}.$$

Donc $x = 1$, $y = l$, et

(27) $$m = -\frac{t(t-1)}{2} - 2l = -\frac{t(t-1)}{2} - \tau(\tau-1).$$

Il est clair qu'on aurait pu déterminer m, mais plus péniblement, en conservant α dans les calculs qui ont fourni $\beta^{t-1}\gamma^{-t} \equiv \varepsilon^{l}$.

24. *Toute conséquence des équations* (3) *entre* α, β, γ, ε *résulte de celles qui ont été trouvées.*

En effet, une telle conséquence $\Phi = 1$, devant résulter de $\beta^{1-t}\gamma^{t} = \alpha^{\frac{t(t-1)}{2}}$, $\varepsilon = \alpha^2$ (**14**), a un premier membre Φ de la forme (26).

Mais $\beta^{1-t}\gamma^{t}\varepsilon^{l}\alpha^{m}$ ayant aussi cette forme, $\Phi = 1$ se ramène, en vertu des relations trouvées, à la forme $(\alpha^{-2}\varepsilon)^x = 1$ ($x = 0$ ou 1). Il s'agit de montrer que, dans toute conséquence de cette forme, x est nécessairement nul. Il suffit pour cela de construire un groupe d'ordre $2(t!)$ défini par

$$(28)\quad \left\{\begin{array}{l} a^2 = 1, \quad b^t = \beta, \quad (ab)^{t-1} = \gamma, \quad (ab^{-1}ab)^3 = \delta, \\ (ab^{-j}ab^j)^2 = \varepsilon, \quad (j = 2, \ldots, \tau), \quad \varepsilon^2 = 1; \\ \delta = 1 \text{ si } t \text{ est impair}; \quad \delta = \varepsilon \text{ si } t \text{ est pair}; \quad \beta, \gamma \text{ sont dans } \{\varepsilon\} = \mathrm{E}. \end{array}\right.$$

Admettons l'existence d'un tel groupe abstrait X, et cherchons à construire un groupe analogue $\overline{\mathrm{X}}$ où t soit remplacé par $t+1$. Je désignerai par $\bar{\tau}$, $\bar{\varepsilon}$, $\overline{\mathrm{E}}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$, $\bar{\delta}$, ... les objets analogues à τ, ε, ... et relatifs à $\overline{\mathrm{X}}$.

Soit G la représentation régulière de X et S_t le symétrique de champ $1, \ldots, t$. $\mathrm{X}|\mathrm{E} \equiv \mathrm{S}_t$ est représenté régulièrement par le plus petit commun multiple Γ des substitutions $(\mathrm{E}a) = (\mathrm{E}x, \mathrm{E}xa)$, (*S.*, 57) et $(\mathrm{E}b) = (\mathrm{E}x, \mathrm{E}xb)$, $\mathrm{E}x$ parcourant $\mathrm{X}|\mathrm{E}$: je supposerai que $(\mathrm{E}a)$ répond à la substitution (12) et $(\mathrm{E}b)$ à $(12\ldots t)$; je désignerai d'une manière générale par $(\mathrm{E}z)$ la substitution de Γ qui répond à l'élément $\mathrm{E}z$ de $\mathrm{X}|\mathrm{E}$, et par (z) la substitution de G qui répond à z de X.

Les éléments de $\mathrm{X}|\mathrm{E}$ se partagent en couples tels que $\mathrm{E}x$, $\mathrm{E}xa$. Désignons par $\mathrm{E}x$ un élément arbitrairement choisi dans chacun de ces couples et par x un élément arbitrairement choisi dans $\mathrm{E}x$. Alors les x et les xa formeront un système déterminé R_1 de restes de X mod E, et les εx et les εxa un autre système de restes R_2. On pourra donc écrire

$$(\varepsilon) = (x_1, x_2)(x_2, x_1)$$

$$(x_i \text{ parcourant } \mathrm{R}_i. \text{ et } x_j \equiv x_i\varepsilon \text{ si } j \neq i;\ i, j \equiv 0, 1 \bmod 2);$$

$$(a) = a_1a_2, \qquad a_1 = (x_1, x_1a), \qquad a_2 = (x_2, x_2a),$$

$$(b) = (x_1, x_1b)(x_2, x_2b).$$

Soit $x_ib\varepsilon^{f(x_i,b)}$ celui des deux éléments de $\mathrm{E}x_ib$ qui est dans R_i, et posons $(x_i, x_ib\varepsilon^{f(x_i,b)}) = b_i$, $b_1b_2 = b_0$. (b) se déduit de b_0 en remplaçant les ε^f par 1. Si $b^t = \varepsilon^\theta$, $(b)^t = (x_1, x_1b^t)(x_2, x_2b^t)$ se

réduit à $(\varepsilon)^0$. Si $(E a^{\lambda_1} b^{\mu_1} a^{\lambda_2} b^{\mu_2} \ldots a^{\lambda_k} b^{\mu_k})$ remplace $E x_i$ par $E y_i$, y_i étant dans R_i, il est clair que $a_i^{\lambda_1} b_i^{\mu_1} \ldots a_i^{\lambda_k} b_i^{\mu_k}$ remplace x_i par y_i, et inversement. Donc $\Gamma_i = |a_i, b_i|$ est semblable à Γ.

Considérons maintenant un groupe $\overline{G}$ ayant $t+1$ constituants transitifs $G^{(0)}, \ldots, G^{(t)}$ semblables à $G^{(0)} = G$. Soit en général $\overline{s} = \Pi_0^t s^{(k)}$ la substitution de G qui répond aux substitutions $s^{(0)}, \ldots, s^{t}$ de $G^{(0)}, \ldots, G^{(t)}$. Désignons par $a^{(k)}$, $a_i^{(k)}$, $\varepsilon^{(k)}$, $\Gamma_i^{(k)}, \ldots$ les objets jouant relativement à $G^{(k)}$ le rôle de $(a) = a^{(0)}$, $a_i = a_i^{(0)}$, $(\varepsilon) = \varepsilon^{(0)}$, $\Gamma_i = \Gamma_i^{(0)}$ relativement à $G = G^{(0)}$. Soit $\overline{a}_i = \Pi_0^t a_i^{(k)}$, $\overline{b}_i = \Pi_0^t b_i^{(k)}$ et $\overline{\Gamma}_i = |\overline{a}_i, \overline{b}_i|$. Soit K_i une représentation régulière du symétrique S_{t+1} de champ $1, \ldots, t+1$ dans le champ de $\overline{\Gamma}_i$. Soit c_i la $s_2^{(t+1)!}$ de K_i qui répond à $(t, t+1)$ de S_{t+1}, et $c = c_1 c_2$. On peut supposer que $K_i = |\overline{\Gamma}_i, c_i|$. Soit K le groupe ayant pour constituants K_1 et K_2, et où la substitution s qui répond à s_i de K_i est $s_1 s_2$. Soit $\overline{\Gamma}$ le diviseur de K qui a pour constituants $\overline{\Gamma}_1$ et $\overline{\Gamma}_2$. Toute substitution $\overline{a}^\lambda \overline{b}_0^\mu c^\nu \overline{a}^{\lambda'} \overline{b}_0^{\mu'} c^{\nu'} \ldots$ de K étrangère à $\overline{\Gamma}$ est régulière et remplace chaque $x_i^{(k)}$ par un $x_i^{(k)}$ d'indice *supérieur* différent (¹). Donc la substitution correspondante $\overline{a}^\lambda \overline{b}^\mu c^\nu \overline{a}^{\lambda'} \overline{b}^{\mu'} c^{\nu'} \ldots$ de $|\overline{G}, c|$, qui ne s'en distingue qu'en ce que certaines séquences de la forme $x_i^{(k)} x_i^{(l)}$ $(l \neq k)$ sont remplacées par $x_i^{(k)} x_j^{(l)}$ $(j \neq i)$, déplace aussi tous les symboles. De plus $|\overline{G}, c|$ est transitif, puisque K_i l'est entre $x_i^{(0)}, \ldots, x_i^{t}$, et que $\overline{G}$ contient $(\overline{\varepsilon})$. *Donc* $|\overline{G}, c|$ *est régulier*. D'ailleurs $(\overline{\varepsilon})\, c\, (\overline{\varepsilon}) = c_1 c_2 = c$. Donc $(\overline{\varepsilon})$, permutable à $\overline{a}$ et à $\overline{b}$, est normale dans $|\overline{G}, c|$.

$(c\overline{b}_0)^{t+1}$, qui correspond dans K à $(1, \ldots, t+1)^{t+1}$, est égale à 1. Donc $(c\overline{b})^{t+1}$ est un produit de transpositions de la forme $(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})$, et, comme $|\overline{G}, c|$ est régulier, $(c\overline{b})^{t+1}$ contient toutes ces transpositions, ou se réduit à 1. De même, $(\overline{a} c \overline{b}_0)^t$, qui correspond à $[(12)(1, \ldots, t+1)]^t$, étant égale à 1, $(\overline{a} c \overline{b})^t$ est dans $|(\overline{\varepsilon})|$.

(¹) Soit, en général, $A = \Sigma a$ un diviseur d'un groupe $G = \Sigma g = \Sigma x = \Sigma z A$, et $\Sigma(x, xg)$ la représentation régulière de G où la substitution (x, xg) répond à g. Si g est hors de A, tout élément za d'un complexe quelconque zA sera remplacé par un élément zag d'un complexe $zAg \neq zA$.

Pour $1 \leqq i \leqq \tau$, $(c\overline{b}_0)^{-i}\,\overline{a}\,(c\overline{b}_0)^i$, qui correspond à la transformée de (12) par $(1, 2, \ldots, t+1)^i$, coïncide avec $\overline{b}_0^{-i}\,\overline{a}\,\overline{b}_0^i$, qui correspond à la transformée de (12) par $(12 \ldots t)^i$. D'après la règle usuelle de transformation, il est dès lors évident que les transformées de $\overline{a}$ par $(c\overline{b})^i$ et par $\overline{b}^i$ coïncident. Donc $\overline{a}\,(c\overline{b})^{-i}\,\overline{a}\,(c\overline{b})^i$ coïncide avec $\overline{a}\,\overline{b}^{-i}\,\overline{a}\,\overline{b}^i$.

Si $t = 2\tau + 1$, $\overline{\tau} = \tau + 1$. Mais $(\overline{a}\,(c\overline{b})^{-\tau-1}\,\overline{a}(c\overline{b})^{\tau+1})^2$ est égale à $(\overline{\varepsilon})$ ou à 1 en même temps que $(\overline{a}(c\overline{b})^{-2}\,\overline{a}\,(c\overline{b})^2)^2$: cela résulte des équations que vérifie $\{\overline{G}, c\}$ (**14**).

Donc $\{\overline{G}, c\}$ est une représentation régulière de $\overline{X}$, qui, par suite, existe quand X existe.

Il reste à montrer que X existe pour $t = 4$. Or considérons le groupe L (2, 3) des substitutions $\begin{vmatrix} \lambda\xi + \mu\eta \\ \lambda'\xi + \mu'\eta \end{vmatrix}$ mod 3. En posant

$$\begin{vmatrix} \xi \\ \xi - \eta \end{vmatrix} = a, \qquad \begin{vmatrix} -\xi + \eta \\ -\xi - \eta \end{vmatrix} = b, \qquad \begin{vmatrix} -\xi \\ -\eta \end{vmatrix} = \varepsilon,$$

on a

$$a^2 = 1, \qquad b^4 = \varepsilon, \qquad (ba)^3 = \varepsilon, \qquad (ab^{-1}ab)^3 = \varepsilon, \qquad (ab^{-2}ab^2)^2 = \varepsilon.$$

25. En posant $\alpha = \alpha'$, $\beta\gamma^{-1} = \beta'$, $\beta^{1-t}\gamma^t\varepsilon^l\alpha^m = \gamma'$ (d'où $\beta'^t\gamma' = \beta\varepsilon^l\alpha^m$, $\beta'^{t-1}\gamma' = \gamma\varepsilon^l\alpha^m$), $\alpha^{-2}\varepsilon = \varepsilon'$, les équations de $\mathcal{A}_0$ deviennent $\gamma' = 1$, $\varepsilon'^2 = 1$, α' et β' restant indéterminés. Donc le multiplicateur $\mathfrak{M}$ de Γ est d'ordre $\mu = 2$. Les divers groupes infinis, dont le produit direct par $\mathcal{A} = \{\varepsilon'\}\,(\equiv \mathfrak{M})$ est $\mathcal{A}_0$, sont contenus dans la formule

$$\mathcal{A}_1 = \{\alpha'\varepsilon'^x, (\alpha'\varepsilon'^x)^{-1}, \beta'\varepsilon'^y, (\beta'\varepsilon'^y)^{-1}\},$$

où x et y peuvent être pris indépendamment l'un de l'autre égaux à 0 ou à 1 (2). Les divers figuratifs de Γ, qui s'obtiennent en faisant $\mathcal{A}_1 = 1$, sont donc fournis par les équations (3) où l'on fait (après avoir remplacé δ par α^3 si t est impair, par $\alpha\varepsilon$ si t est pair)

(29) $$\alpha' = \varepsilon'^{-x}, \qquad \beta' = \varepsilon'^{-y}, \qquad \gamma' = 1, \qquad \varepsilon'^2 = 1,$$

c'est-à-dire, en réduisant les exposants de ε' mod 2, et en remarquant que $\varepsilon' = \varepsilon$ (puisque $\alpha^2 = \alpha'^2 = 1$) et que $m \equiv \frac{t(t-1)}{2}$ mod 2,

(30) $$\alpha = \varepsilon^x, \qquad \beta = \varepsilon^{\frac{t(t-1)}{2}x + ty + t}, \qquad \gamma = \beta\varepsilon^y, \qquad \delta = \varepsilon^{x+t+1}.$$

En prenant au besoin $b\varepsilon^y$ pour b, on peut toujours annuler y. *On a donc au plus deux figuratifs répondant aux choix* $x = 0, 1$.

Le symétrique étant complet pour $t \neq 6$ (¹), il résulte des nᵒˢ **9** et **10** que ces figuratifs sont distincts si $t \neq 6$. Mais on peut le voir directement, et même pour $t = 6$, comme il suit.

Soient $\mathcal{G}$ un quelconque de ces figuratifs, et $\mathfrak{S}$ son commutant (isomorphe au $\mathfrak{g}^t$ alterné). $\mathcal{A}\ (< \mathfrak{S})$ est le central de $\mathcal{G}$, et, dans l'homomorphisme de $\mathcal{G}$ à Γ, $\mathfrak{S}$ répond au commutant $K\ (\equiv C)$ de Γ. Les transpositions de Γ sont toutes conjuguées, et à chacune d'elles répondent deux éléments de $\mathcal{G}$ situés hors de $\mathfrak{S}$ et ayant pour carré $a^2 = \alpha$. Donc tous les éléments de $\mathcal{G}$ répondant aux s_2 impaires de Γ ont pour carré α, c'est-à-dire que, si $\mathfrak{S}Y$ est le système des e_2 de $\mathcal{G} | \mathfrak{S}$, tous les e_2 de $\mathcal{G}$ qui figurent dans $\mathfrak{S}Y$ ont pour carré α. *Donc les deux déterminations de* $\mathcal{G}$, dans lesquelles α est un élément distinct de $\mathcal{A}$, *sont elles-mêmes distinctes.*

26. Avant de faire une application aux cas $t = 4, 5$, je dois rappeler quelques résultats généraux.

Soit $\Gamma(2, \pi)$ ($\pi = p^M$; p premier, M entier) le groupe des substitutions $\begin{vmatrix} \lambda\xi + \mu\eta \\ \lambda'\xi + \mu'\eta \end{vmatrix}$, λ, μ, λ' μ' parcourant le champ de Galois C_π d'ordre π; $U(2, \pi)$ le diviseur de $L(2, \pi)$ formé des substitutions de $L(2, \pi)$ dont le déterminant est 1; $\mathfrak{L}(2, \pi)$ le groupe des substitutions $\left(\dfrac{\lambda\zeta + \mu}{\lambda'\zeta + \mu'}\right)$ où λ, μ, λ', μ', parcourent C_π et ∞; $\mathfrak{V}(2, \pi)$ le diviseur de $\mathfrak{L}(2, \pi)$ formé des substitutions dont le déterminant est un carré.

Soit i une racine primitive de C_π. M. Schur a démontré (*Cr.*, t. 132, p. 113-123) *que les diviseurs de* $L(2, \pi^2)$ *de la forme* $G^{(\rho)} = \{U(2, \pi), |\rho\xi, \rho i^{-1}\eta| = s\}$ *pour lesquels* s^2 *est dans* $U(2, \pi)$, *c'est-à-dire pour lesquels* $\rho^4 = i^2$, *sont des figuratifs de* $\mathfrak{L}(2, \pi)$. Comme $U(2, \pi)$, contient $|-\xi, -\eta|$, $G^{(\rho)}$ a au plus deux déterminations, l'une $G'_\pi = G'$ répondant à $\rho^2 = i$, l'autre $G''_\pi = G''$ répondant à $\rho^2 = -i$ (d'où $\rho i^{-1} = -\rho^{-1}$). G' est dans $U(2, \pi^2)$ et n'a par suite qu'un e_2. G'' a plusieurs e_2; car, pour que $\begin{vmatrix} \lambda\xi + \mu\eta & \rho\xi \\ \lambda'\xi + \mu'\eta & -\rho^{-1}\eta \end{vmatrix}$ $(\lambda\mu' - \mu\lambda' = 1)$ soit

(¹) Hölder, *M. A.*, t. XLVI, 1895, p. 333-345.

d'ordre 2, $\lambda, \mu, \lambda' \mu'$ étant dans C_π, il faut et suffit, on le voit directement, ou que $\mu\lambda'$ soit $\neq 0$ avec $\mu' = -i\lambda$ et $\mu\lambda' = -1 - i\lambda^2$, ou que $\mu = \lambda' = 0$ avec $\mu' = \lambda^{-1}$ et $i\lambda^2 = -1$ (ce qui exige que -1 soit non carré, donc que $\pi \equiv 3 \bmod 4$) (¹).

Si $\pi \equiv 1 \bmod 4$, $L(2, \pi)$ *a un diviseur* Λ *formé des substitutions de déterminant* ± 1, *dans lequel* $U(2, \pi)$ *est aussi d'indice* 2. *Mais* A *n'est pas un figuratif de* $\mathfrak{L}(2, \pi)$. En effet, -1 étant ici carré, $-1 - i\lambda^2$ est $\neq 0$, quel que soit λ, G'' a $\pi(\pi-1)e_2$, et G' un seul, tandis que A en a $\pi + 2$, comme on le voit aussi directement. *Si* $\pi \equiv 3$ *mod* 4, $-i$ est carré, et $\rho^2 = -i$ est résoluble dans C_π; G'' est alors identique au groupe $\{U(2, \pi), |\xi, -\eta|\}$.

Pour $t = 4\,[\tau = 2;\ \Gamma \equiv \mathfrak{L}(2,3)]$, $L(2,3) = U'_3 = G''_3$ est le figuratif de Γ répondant au choix $x = 0$ (**24**). Celui répondant à $x = 1$ est $G'_3\,(i = -1,\ \rho^2 = -1)$ (alors $i = -1$ et $\rho^2 = -1$). Car, en posant

$$b = \begin{vmatrix} -\rho\xi + \rho\eta \\ -\rho\xi - \rho\eta \end{vmatrix}, \qquad a = \begin{vmatrix} \rho\xi + \rho\eta \\ -\rho\eta \end{vmatrix} \qquad \left(\text{si } u = \begin{vmatrix} \xi + \eta \\ \eta \end{vmatrix}, a = u^{-1} s u\right),$$

on a

$$a^2 = \varepsilon, \qquad b^4 = \varepsilon, \qquad (ab)^3 = \varepsilon, \qquad (ab^{-1}ab)^3 = 1, \qquad (ab^{-2}ab^2)^2 = \varepsilon.$$

Pour $t = 5\,[\tau = 2;\ \Gamma \equiv \mathfrak{L}(2,5)]$, G'_5, qui n'a qu'un e_2, répond à $x = 1$, et G''_5 à $x = 0$. On obtient des représentations des figuratifs dans C_5 en prenant

$$b = \begin{vmatrix} -\xi \\ -\xi - \eta \end{vmatrix}, \qquad \varepsilon = \begin{vmatrix} -\xi \\ -\eta \end{vmatrix}, \qquad a = \rho \begin{vmatrix} \lambda\xi + \theta\eta \\ \lambda'\xi - \lambda\eta \end{vmatrix}$$
$$(\theta = \pm 1,\ \lambda' = -\theta(\lambda^2 + 3);$$

pour $\rho^2 = 2$, le figuratif obtenu est G'_5; pour $\rho^2 = 3$, il est G''_5.

Aucun $g_{2.120}$ X du $g_{4.120}$ $L(2,5)$ n'est isomorphe à G'_5 ou à G''_5. En effet, soit A le $g_{2.120}$ de $L(2,5)$ formé des substitutions de déterminant ± 1. X et A sont normaux dans L, et le plus grand commun diviseur Δ de X et de A est un g_{120} normal dans L. Donc Δ coïncide avec U, sans quoi leur plus grand commun diviseur serait normal dans L et d'ordre > 2, ce qui ne se peut. Donc X contient U. Mais

(¹) Schur, *loc. cit.*

L | U, qui est un g_4 cyclique, n'a qu'un g_2. Donc $\Lambda = A$. Or on a vu que A n'est pas un figuratif de $\mathfrak{L}(2, 5)$.

27. $\mathfrak{S} | \mathfrak{A}$ est isomorphe au g^t alterné, et $\mathfrak{S}$ contient $\mathfrak{A}$. Donc $\mathfrak{S}$ est une extension normale du g^t alterné (**8**). Donc *le multiplicateur du g^t alterné est d'ordre* $\geqq 2$.

28. L'alterné Γ *de degré* $n \geqq 4$ est défini, $t = n - 2$ étant sa transitivité, par les équations (*S.*, 70).

$$(31)\quad \begin{cases} b^t = c^3 = a^2 = (ba)^{t-1} = (ac)^3 = (ab^{-1}ab)^3 = (ab^{-j}ab^j)^2 = (cb^{-k}ab^k)^2 = 1; \\ j = 2, \ldots, \tau,\ \tau \text{ étant le plus grand entier } \leqq \dfrac{t}{2};\ k = 1, \ldots, t-2 = n-4; \\ \text{si } n \leqq 5, \text{ il faut supprimer l'équation } (ab^{-j}ab^j)^2 = 1; \\ \text{si } n = 4, \text{ il faut en outre supprimer } (ab^{-1}ab)^3 = 1 \text{ et } (cb^{-k}ab^k)^2 = 1. \end{cases}$$

On en a une représentation A_n dans les symboles $1, \ldots, n$, en prenant $a = 12.34$, $c = 132 = 12.23$, et $b = 34\ldots n$, si n est impair, $b = 12.34\ldots n$, si n est pair. $\{b, c\}$, contenant $123, 124, \ldots, 12n$, coïncide avec A_n (*S.*, 38) : on vérifie d'ailleurs directement que $a = cb^{-1}cbc$ pour n pair, et que $a = c^2b^{-1}cbc^2$ pour n impair.

Nous avons à considérer ici le groupe $\mathcal{G}_0$ défini par les équations

$$(32)\quad \begin{cases} a^2 = \alpha, \quad b^t = \beta, \quad (ba)^{t-1} = \gamma, \quad c^3 = \varkappa, \quad (ac)^3 = \zeta, \\ (ab^{-1}ab)^3 = \delta, \quad (ab^{-j}ab^j)^2 = \varepsilon_j, \quad (cb^{-k}ab^k)^2 = \eta_k, \\ \alpha, \beta, \gamma, \varkappa, \zeta, \delta, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\tau, \eta_1, \ldots, \eta_{t-2} \text{ sont permutables à } a, b, c \text{ (donc} \\ \text{entre eux); } j = 2, \ldots, \tau;\ k = 1, \ldots, t-2; \text{ si } n \leqq 5, \text{ il faut supprimer} \\ \text{l'équation } (ab^{-j}ab^j)^2 = \varepsilon_j; \text{ si } n = 4, \text{ il faut en outre supprimer} \\ (ab^{-1}ab)^3 = \delta \text{ et } (cb^{-k}ab^k)^2 = \eta_k. \end{cases}$$

Je désignerai par $\mathfrak{A}_0$ le plus petit commun multiple de $\alpha, \beta, \gamma, \varkappa, \zeta, \delta, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\tau, \eta_1, \ldots, \eta_{t-2}$. Comme au n° **12** on a, en posant $(ab^{-h}ab^h)^{\rho_h} = \varepsilon_h$ (h étant pris mod t; $\rho_h = 3$, si $h \equiv \pm 1$; $\rho_h = 2$, si $\rho \not\equiv \pm 1$), $\varepsilon_h = \varepsilon_{-h}$. J'emploierai aussi dans le même sens l'expression « transformer $ab^h a$ ». Je dirai de même « transformer $cb^k a$ » pour « remplacer $cb^{-k}a$ par $b^{-k}a^{-1}b^kc^{-1}b^{-k}\eta_k = b^{-k}ab^kc^2b^{-k}\eta_k\alpha^{-1}\varkappa^{-1}$ ». Comme $c^2b^{-k}ab^k = c.cb^{-k}ab^k$ devient, en transformant $cb^{-k}a$, $cb^{-k}ab^{-k}c^2\eta_k\alpha^{-1}\varkappa^{-1}$ et, en transformant de nouveau $cb^{-k}a$,

$b^{-k}ab^kcb^{-k}\eta_k^2\alpha^{-2}\varkappa^{-1}$, je dirai encore « transformer $c^2b^{-k}a$ » pour « remplacer $c^2b^{-k}a$ par $b^{-k}ab^kcb^{-k}\eta_k^2\alpha_k^{-2}\varkappa^{-1}$ ».

Γ *étant parfait, on sait à priori qu'il n'a qu'un figuratif* (**8**).

29. Considérons un instant le groupe $\mathcal{G}'_0$ défini par les équations (32 *bis*) formées des équations (32) jointes à $ab = ba$, $ac = ca$, $bc = cb$. Des équations de $\mathcal{G}'_0$ résultent, entre α, β, γ, $\varkappa$, ζ, δ, $\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\tau$, $\eta_1, \ldots, \eta_{t-2}$ les équations (4) et, en outre,

$$(33) \qquad \eta_1 = \eta_2 = \ldots = \eta_{t-2}, \qquad \eta_1^3 = \zeta^2 = \alpha^3\varkappa^2.$$

Toute conséquence des équations de $\mathcal{G}'_0$ entre $\alpha, \ldots, \eta_{t-2}$ peut s'écrire, en tenant compte de $\delta = \alpha^3$, $\varepsilon_j = \alpha^2$, $\eta_k = \eta_1$,

$$\alpha^X\beta^Y\gamma^Z\varkappa^x\eta_1^y\zeta^z = 1$$

et a une forme typique (*E.*, 17) où la somme $-2y-3z-2X$ des exposants de a et celle $-2y-3x-3z$ des exposants de c sont nulles. Donc $y \equiv 0 \bmod 3$, et $x \equiv z \equiv 0 \bmod 2$. Donc la conséquence considérée se ramène, en vertu de (33), à une conséquence entre α, β, γ, η_1 seuls, et celle-ci se ramène à son tour, comme au n° **15**, à la forme

$$\left(\alpha^{\frac{t(t-1)}{2}}\beta^{t-1}\gamma^{-t}\right)^\lambda \alpha^{-3u}\eta_1^{3u} = 1,$$

ou, d'après (4), à $\eta_1^{3u} = \alpha^{3u}$, ou, en remplaçant η_1^3 par $\alpha^3\varkappa^2$, à $\varkappa^{2u} = 1$. Or, dans une telle conséquence mise sous forme typique, la somme des exposants de c est $-6u$. Donc $u = 0$. Donc les conséquences des équations de $\mathcal{G}'_0$ entre $\alpha, \ldots, \eta_{t-2}$ coïncident avec les conséquences de (4) et de (33).

30. Revenons maintenant à $\mathcal{G}_0$. Des équations $a^2 = \alpha$, $b^t = \beta$, $(ba)^{t-1} = \gamma$, $(ab^{-1}ab)^3 = \delta$, $(ab^{-j}ab^j)^2 = \varepsilon_j$, qui font partie de (32), on déduit d'abord comme précédemment

$$(34) \quad \begin{cases} \varepsilon_j = \varepsilon_2 \text{ soit } = \varepsilon; \quad \varepsilon^2 = \alpha^4; \quad \delta = \alpha^3 \text{ pour } n \text{ impair}; \quad \delta = \alpha\varepsilon \text{ pour } n \text{ pair}; \\ \beta^{1-t}\gamma^t\varepsilon^l\alpha^m = 1, \qquad l = \dfrac{\tau(\tau-1)}{2}, \qquad m = -\dfrac{t(t-1)}{2} - 2l. \end{cases}$$

On a ensuite

$$(35) \; \eta_k^3 = \eta_k c^{-1}\eta_k c.c^{-2}\eta_k c^2 = (cb^{-k}ab^k)^2c^{-1}(cb^{-k}ab^k)^2.c^{-1}(cb^{-k}ab^k)^2c^2 = \alpha^3\varkappa^2.$$

A la relation $(24)(56).(123).(24)(56) = (143)$ de $\mathfrak{A}_n$ répond dans $\mathcal{G}_0$ (24.56 est la transformée de 34.56 par 132)

$$(36) \qquad (c^{-1}ab^{-2}ab^2c)^{-1}.c^2.(c^{-1}ab^{-2}ab^2c) = ca\xi,$$

ξ étant dans $\mathcal{A}_0$, ou

$$\alpha^{-2}c^{-1}b^{-2}ab^2ac^2ab^{-2}ab^2c = ca\xi,$$

ou, en remplaçant ac^2a par $cac\zeta^{-1}\alpha^2\varkappa$, et en multipliant à droite par $a\alpha^{-1}$ et à gauche par c^{-1},

$$\alpha^{-1}\zeta^{-1}cb^{-2}ab^2cacb^{-2}ab^2ca = \xi,$$

ou, en remplaçant deux fois $cb^{-2}ab^2$ par $\eta_2 b^{-2}ab^2c^{-1}\varkappa^{-1}$,

$$\alpha^{-3}\zeta^{-1}\eta_2^2 b^{-2}ab^2ab^{-2}ab^2a = \xi$$

ou

$$\alpha^{-3}\zeta^{-1}\eta_2^2\varepsilon = \xi.$$

Or le cube de (36) est $\varkappa^2 = \zeta\xi^3$. Donc

$$\varkappa^2 = \zeta\alpha^{-9}\zeta^{-3}\eta_2^6\varepsilon^3 = \alpha^{-3}\varepsilon^3\varkappa^4\zeta^{-2}$$

ou

$$(37) \qquad \zeta^2 = \alpha\varepsilon\varkappa^2 = \eta_2^3(\alpha^{-2}\varepsilon).$$

On voit que *les équations de $\mathcal{G}_0$ ne peuvent entraîner la conséquence* $\zeta^2 = \eta_2^3$, car elles entraîneraient aussi la conséquence $\varepsilon = \alpha^2$ contrairement à l'exemple construit au n° 24.

31. *Supposons maintenant n impair.* On aura d'abord (cf. **28**)

$$a = \varkappa^{-1}a\varkappa = \varkappa^{-2}c^2.cac.c^2 = \alpha^{-2}\zeta\varkappa^{-3}c^2.ac^2a.c^2.$$

Or de $(b^{-k}ab^kc)^2 = \eta_k$ on déduit

$$c^2 = \eta_k^{-1}\varkappa b^{-k}ab^kcb^{-k}ab^k \qquad \text{et} \qquad c = \alpha^{-2}\eta_k\varkappa^{-1}b^{-k}ab^kc^2b^{-k}ab^k.$$

Donc

$$c^2 = \alpha^{-2}\eta_k^{-1}\eta_{k+1}b^{-k}ab^k.b^{-k-1}ab^{k+1}c^2b^{-k-1}ab^{k+1}.b^{-k}ab^k.$$

Par suite, en répétant la transformation pour $k = 1, 3, 5, \ldots, n-6$,

$$\begin{aligned} a &= \alpha^{-2}\zeta\varkappa^{-3}\eta_1^{-1}\varkappa c^2.a.b^{-1}ab.b^{-2}ab^2.c^2b^{-2}ab^2.b^{-1}ab.a.c^2 \\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= \alpha^{-2}\zeta\varkappa^{-3}\eta_1^{-1}\eta_2\eta_3^{-1}\eta_4\ldots\eta_{n-6}^{-1}\eta_{n-5}\eta_{n-4}^{-1}\alpha^{5-n}\varkappa \\ &\quad\times c^2.a.b^{-1}ab.b^{-2}ab^2\ldots b^{4-n}ab^{n-4}.c.b^{4-n}ab^{n-4}\ldots b^{-2}ab^2.b^{-1}ab.a.c^2, \end{aligned}$$

ou, en posant

$$\eta_1\eta_2^{-1}\eta_3\eta_4^{-1}\ldots\eta_{n-6}\eta_{n-5}^{-1}\eta_{n-4} = \theta \qquad (\theta^3 = \alpha^3\varkappa^2),$$

$$a = \alpha^{3-n}\zeta\varkappa^{-2}\theta^{-1}c^2(ab^{-1})^{n-3}b^{n-3}cb^{3-n}(ba)^{n-3}c^2 = \zeta\varkappa^{-2}\theta^{-1}c^2b^{-1}cbc^2$$

ou

(38) $$c^2b^{-1}cbc^2a^{-1} = \zeta^{-1}\varkappa^2\theta.$$

Or, à la relation

$$\begin{aligned} &[(12)(45\ldots n)]^{-1}.(13)(k+3, k+4).(12)(45\ldots n) \\ &\quad = (132)^{-1}.(13)(k+4, k+5).(132) \end{aligned}$$

entre les substitutions de A_n, répond dans $\mathcal{G}_0$

(39) $$(ba)^{-1}cb^{-k}ab^k.ba = c^{-1}.cb^{-k-1}ab^{k+1}c\xi_k, \quad \xi_k \text{ étant dans } \mathfrak{H}_0,$$

ou, en transformant $ab^{k+1}a$ au premier membre,

$$\alpha^{-2}\varepsilon a^{-1}b^{-1}cbab^{-k-1}ab^{k+1} = b^{-k-1}ab^{k+1}\xi_k,$$

ou, en se servant de $(b^{-k-1}ab^{k+1}c)^2 = \eta_{k+1}$,

$$\alpha^{-2}\varepsilon a^{-1}b^{-1}cba = \alpha^{-1}c^{-1}\eta_{k+1}\xi_k,$$

ou

$$\alpha^{-2}\varepsilon b^{-1}cbaca = \eta_{k+1}\xi_k,$$

ou, en se servant de $(ac)^3 = \zeta$,

$$\alpha^{-2}\varepsilon\varkappa^{-2}\zeta.b^{-1}cbc^2a^{-1}c^2 = \eta_{k+1}\xi_k.$$

ou, d'après (38),

$$\xi_k = \alpha^{-2}\varepsilon\theta\eta_{k+1}^{-1}.$$

Or l'équation (39), élevée au carré, donne $\eta_k = \eta_{k+1}\xi_k^2$. Donc

$$\eta_k = \eta_{k+1}\alpha^{-4}\varepsilon^2\theta^2\eta_{k+1}^{-2} = \eta_{k+1}^{-1}\theta^2,$$

De même

$$\eta_{k+1} = \eta_{k+2}^{-1}\,\theta^2.$$

Donc

$$\eta_k = \eta_{k+2} \qquad \text{ou} \qquad \eta_1 = \eta_3 = \ldots = \eta_{n-4}; \qquad \eta_2 = \eta_4 = \ldots = \eta_{n-5}.$$

Donc, d'après la définition de θ,

$$\theta = (\eta_1 \eta_2^{-1})^{\frac{n-5}{2}}\,\eta_1.$$

Si $n - 5 \equiv 0 \bmod 3$, on a donc $\theta = \eta_1$ et, puisque $\eta_2 = \eta_3^{-1}\theta^2 = \eta_1^{-1}\theta^2$, $\eta_2 = \eta_1$.

Si $n - 5 \equiv 1 \bmod 3$, on a $\theta^2 = \eta_1\,\eta_2^{-1}\,\eta_1^2$ ou, puisque $\eta_1^3 = \theta^3$, $\theta = \eta_2$ et, comme $\eta_1 = \eta_2^{-1}\,\theta^2$, $\eta_1 = \eta_2$.

Si $n - 5 \equiv 2 \bmod 3$ (ou $n \equiv 1 \bmod 6$), on a $\theta = \eta_1^2\,\eta_2^{-1}$ qui, jointe à $\theta^2 = \eta_1\,\eta_2$, ne donne rien de nouveau. Mais l'analyse suivante, qui s'applique d'ailleurs quel que soit n impair $\neq 7$, va nous conduire au même résultat (sauf peut-être si $n = 7$).

$b^{-k}acb^k$, qui correspond à $(2, 3+k, 4+k)$ $(k \leqq n-4)$ de A_n, est permutable mod $\mathcal{A}_0$, pour $k \geqq 3$, à $cb^{-1}ab$, qui correspond à 13.45. On a donc une égalité de la forme

$$b^{-k}acb^k . cb^{-1}ab . (b^{-k}acb^k)^{-1} = cb^{-1}ab\,\omega \qquad (3 \leqq k \leqq n-4;\ \omega \text{ dans } \mathcal{A}_0)$$

dont le carré est $\omega^2 = 1$. Écrivons-la

$$b^{-k}acb^k cb^{-1}ab = cb^{-1}ab^{-k+1}acb^k\omega.$$

ou, en transformant $ab^{-k+1}a$,

$$b^{-k}acb^k cb^{-1}ab = cb^{-k}ab^{k-1}ab^{-k+1}cb^k\omega\alpha^2\varepsilon.$$

On en tire, en transformant $cb^{-k}a$ et en divisant à gauche par $b^{-k}a$,

$$cb^k cb^{-1}ab = b^k c^2 b^{-1}ab^{-k+1}cb^k\omega\eta_k\alpha^{-3}\chi^{-1}\varepsilon.$$

ou, en transformant $cb^{-1}a$ et $c^2b^{-1}a$,

$$cb^{k-1}abc^2 = b^{k-1}abcb^{-k}cb^k\omega\eta_k\eta_1\alpha^{-4}\chi^{-1}\varepsilon.$$

ou, en faisant passer tous les a, b, c dans le premier membre

$$cb^{k-1}abc^2b^{-k}c^2b^kc^2b^{-1}ab^{-k+1} = \omega\eta_k\eta_1\alpha^{-3}\chi\varepsilon.$$

ou, en transformant $c^2 b^{-1} a$, puis en transformant par cb^{k-1},

(40) $$abc^2 b^{-k} c^2 b^{k-1} abcb^{-k} cb^{k-1} = \omega \eta_k \eta_1^{-1} \alpha^{-1} \varkappa^2 \varepsilon.$$

ou, en transformant $b^{-1} c^2 b$ et $b^{-1} cb$ (dans $b^{-k} c^2 b^{k-1}$ et $b^{-k} cb^{k-1}$) d'après (38).

$$abc^2 b^{-k+1} c^2 ac^2 b^{k-2} abcb^{-k+1} cacb^{k-2} = \omega \eta_k \eta_1^{-1} \varkappa^3 \varepsilon,$$

ou, en transformant $c^2 ac^2$ et cac d'après $(ca)^3 = \zeta$,

$$abc^2 b^{-k+1} acab^{k-2} abcb^{-k+1} ac^2 ab^{k-2} = \omega \eta_k \eta_1^{-1} \alpha \varkappa^2 \varepsilon,$$

ou, en transformant $c^2 b^{-k+1} a$ et $cb^{-k+1} a$, et en employant $\eta_{k-1}^3 = \alpha^3 k^2$,

$$ab^{-k+2} ab^{k-1} cb^{-k+1} cab^{k-2} ab^{-k+2} ab^{k-1} c^2 b^{-k+1} c^2 ab^{k-2} = \omega \eta_k \eta_1^{-1} \alpha \varkappa^2 \varepsilon.$$

ou, en transformant par $ab^{-k+2} ab^{k-2}$,

(41) $$bcb^{-k+1} cab^{k-2} ab^{-k+2} ab^{k-1} c^2 b^{-k+1} c^2 ab^{k-2} ab^{-k+2} ab^{k-2} = \omega \eta_k \eta_1^{-1} \alpha \varkappa^2 \varepsilon,$$

ou, *en supposant d'abord* $k - 2 \geqq 2$ (donc $n > 7$, puisque k est $\leqq n - 4$), et en transformant les deux $ab^{k-2} a$,

$$bcb^{-k+1} cb^{k-2} abc^2 b^{-k+1} c^2 b^{k-2} a = \omega \eta_k \eta_1^{-1} \alpha^3 \varkappa^2 \varepsilon^{-1}.$$

En transformant par $bcb^{-k+1} cb^{k-2}$, et en employant $\varepsilon^2 = \alpha^4$, on obtient une équation qui ne diffère de (40) qu'en ce que, *au premier membre*, k est remplacé par $k - 1$. On pourra répéter l'opération tant que, dans l'équation (41), $k - 2$ sera > 1. Quand $k - 2$ sera égal à 1 ($n \geqq 7$), l'équation (41) s'écrit (le second membre n'ayant pas changé)

(42) $$bcb^{-2} cabab^{-1} ab^2 c^2 b^{-2} c^2 abab^{-1} ab = \omega \eta_k \eta_1^{-1} \alpha \varkappa^2 \varepsilon.$$

On en tire, en transformant les deux aba, et en employant $\delta^2 = \alpha^6$,

$$bcb^{-2} cbab^{-1} ababc^2 b^{-2} c^2 bab^{-1} aba = \omega \eta_k \eta_1^{-1} \alpha \varkappa^2 \varepsilon,$$

ou, en transformant $b^{-1} cb$ et $b^{-1} c^2 b$ (dans $b^{-2} cb$ et $b^{-2} c^2 b$) d'après (38),

$$bcb^{-1} cacab^{-1} ababc^2 b^{-1} c^2 ac^2 ab^{-1} aba = \omega \eta_k \eta_1^{-1} \alpha^2 \varkappa^3 \varepsilon,$$

ou, en transformant $caca$ et $c^2 ac^2 a$ d'après $(ca)^3 = \zeta$,

$$bcb^{-1} ac^2 b^{-1} ababc^2 b^{-1} acb^{-1} aba = \omega \eta_k \eta_1^{-1} \alpha \varkappa^3 \varepsilon.$$

ou, en transformant $c^2b^{-1}a$ et $cb^{-1}a$,

$$bcb^{-1}ab^{-1}abcabc^2b^{-1}ab^{-1}abc^2a=\omega\eta_k\eta_1^{-1}\alpha\varkappa^2\varepsilon,$$

ou, en transformant encore $cb^{-1}a$ et $c^2b^{-1}a$, puis en transformant par a et en simplifiant,

$$bc^2b^{-2}abcbcb^{-2}abc^2=\omega\eta_k\eta_1^{-1}\alpha^{-1}\varkappa^2\varepsilon.$$

ou, en transformant $c^2b^{-2}a$,

$$b^{-1}ab^2cb^{-1}cbcb^{-2}abc^2=\omega\eta_k\eta_1^{-1}\eta_2^{-2}\alpha\varkappa^3\varepsilon.$$

ou, en transformant $b^{-1}cb$ d'après (38), en transformant par c^{-2} et en employant $(ca)^3=\zeta$, $\zeta^2=\alpha\varepsilon\varkappa^2$, $\varepsilon^2=\varkappa^4$,

$$c^2b^{-1}ab^2acab^{-2}ab=\omega\eta_k\eta_1^{-1}\eta_2^{-2}\theta^{-1}\alpha^5\varkappa^3.$$

ou, en transformant $c^2b^{-1}a$, en employant $\eta_1^3=\alpha^3\varkappa^2$, et en transformant par $b^{-1}a^{-1}b^2$,

$$b^{-1}cbaca=\omega\eta_k\eta_2^{-2}\theta^{-1}\alpha^3\varkappa^2.$$

ou, en transformant $b^{-1}cb$ d'après (38), et en employant $(ca)^3=\zeta$, $\theta^2=\eta_1\eta_2$, $\eta_2^3=\alpha^3\varkappa^2$,

$$\omega=\eta_k^{-1}\eta_1.$$

Or $\omega^2=1$. Donc $\eta_k^2=\eta_1^2$. Or $\eta_k^3=\eta_1^3$. Donc

$$\eta_k=\eta_1 \qquad \text{pour} \qquad k\geqq 3 \quad (^1).$$

Donc $\eta_1=\eta_2=\eta_3=\ldots=\eta_{t-2}$ $(t-2=n-4)$, *sauf peut-être si* $n=7$. *On verra d'ailleurs bientôt que le cas* $n=7$ *ne constitue pas une exception.*

D'ailleurs on va voir que si n est de la forme $6h>6$, les équations (32) entraînent $\eta_k=\eta_1$, et, d'autre part, que l'ordre μ du multiplicateur $\mathfrak{M}$ de A_n est 2 ou 6 selon que (32) entraîne $\eta_k=\eta_1$ ou non. On peut en conclure *a priori* que, si $n=6h+1>7$, (32) entraîne $\eta_k=\eta_1$. Car, sans cela, μ serait égal à 6. Or, 6 étant premier à l'indice $6h+1$ de A_{6h} dans A_{6h+1}, il résulte d'un théorème de M. Schur

(1) On aurait pu, dans le calcul précédent, négliger $\alpha, \zeta, \varkappa, \varepsilon$; car une relation de la forme $\eta_k\equiv\eta_1 \bmod \{\alpha, \beta, \gamma, \zeta, \varkappa, \varepsilon\}$ entraîne nécessairement $\eta_k=\eta_1$, puisqu'elle doit résulter de (4) et de (33).

($Cr.$, t. 127, p. 49) que $\mathfrak{M}$ serait isomorphe à un diviseur du multiplicateur de A_{6h}. Or ce multiplicateur est d'ordre 2.

32. *Soit maintenant n pair $= 2n'$.* On a d'abord

(43) $$a = ca.c.ac\alpha\zeta^{-1}.$$

Or, de $(b^{-k}ab^k c)^2 = \eta_k$ on déduit

$$c = \alpha^{-2}\eta_k \varkappa^{-1} b^{-k}ab^k c^2 b^{-k}ab^k, \qquad c^2 = \eta_k^{-1}\varkappa b^{-k}ab^k cb^{-k}ab^k.$$

donc

$$c = \alpha^{-2}\eta_k\eta_{k+1}^{1} b^{-k}ab^k.b^{-k-1}ab^{k+1}cb^{-k-1}ab^{k+1}b^{-k}ab^k.$$

Remplaçant par cette valeur le second c de (43) en faisant $k = 1$, puis répétant une substitution analogue avec $k = 3, 5, \dots, n-5$, on obtient

$$a = c.a.b^{-1}ab.b^{-2}ab^2\dots b^{-n+5}ab^{n-5}.b^{-n+4}ab^{n-4}.c.b^{-n+4}ab^{n-4}\dots b^{-1}ab.a.c$$
$$\times \alpha\zeta^{-1}\alpha^{4-n}\eta_1\eta_2^{-1}\eta_3\eta_4^{-1}\dots\eta_{n-5}\eta_{n-4}^{-1}.$$

ou, en posant $\theta = \eta_1\eta_2^{-1}\eta_3\eta_4^{-1}\dots\eta_{n-5}\eta_{n-4}^{-1}$ (d'où $\theta^3 = 1$),

$$a = c(ab^{-1})^{n-3}b^{n-3}cb^{3-n}(ba)^{n-3}c\alpha^{3-n}\zeta^{-1}\theta = \alpha^2\zeta^{-1}\theta cb^{-1}cbc$$

ou

(44) $$cb^{-1}cbca^{-1} = \alpha^{-2}\zeta\theta^{-1} = \alpha^{-2}\zeta\theta^2.$$

Or à la relation

$$(45\dots n)^{-1}.(13)(k+3, k+4).(45\dots n) = (13)(k+4, k+5)$$

de A_n répond dans $\mathcal{G}_0$

(45) $$(ba)^{-1}.cb^{-k}ab^k.ba = cb^{-k-1}ab^{k+1}\xi_k, \qquad \xi_k \text{ étant dans } \mathcal{A}_0.$$

ou, en transformant $ab^{k+1}a$,

$$\varepsilon\alpha^{-2}a^{-1}b^{-1}cba = c\xi_k,$$

ou

$$b^{-1}cbac^2a\alpha^{-3}\varepsilon\varkappa^{-1} = \xi_k.$$

ou, en remplaçant ac^2a par $cac\zeta^{-1}\varkappa\alpha^2$, et en employant (44),

$$\alpha^{-2}\varepsilon\theta^2 = \xi_k.$$

Mais le carré de (45) est $\eta_k = \eta_{k+1}\,\xi_k^2$. Donc

$$\eta_k = \eta_{k+1}\theta, \qquad \text{donc} \qquad \eta_k = \eta_{k+2}\theta^2 = \eta_{k+3}.$$

Le produit des relations $\eta_1\eta_2^{-1} = \theta$, $\eta_3\eta_4^{-1} = \theta$, ..., $\eta_{n-3}\eta_{n-4}^{-1} = \theta$ donne donc

$$\theta = \theta^{\frac{n-4}{2}} \qquad \text{ou} \qquad \theta^{\frac{n}{2}-3} = 1 \qquad \text{ou} \qquad \theta^{n'} = 1.$$

Donc, si n est $\not\equiv 0$ *mod* 3, $\theta = 1$, *et* $\eta_1 = \eta_2 = \ldots = \eta_{n-4}$.

Si $n \equiv 0$ mod 3 (*donc* $\equiv 0$ mod 6) est > 6, le produit des relations $\eta_1 = \eta_2\theta$, $\eta_2 = \eta_3\theta$, ..., $\eta_{n-3} = \eta_{n-4}\theta$ donne $\eta_1 = \eta_{n-4}\theta^{n-3} = \eta_{n-4}$. D'ailleurs $\eta_1 = \eta_4 = \ldots = \eta_{3h+1}$, et $\eta_2 = \eta_5 = \ldots = \eta_{3h+2}$. Comme ici $n - 4 \equiv 2$ mod 3, on a donc $\eta_1 = \eta_2$. Donc tous les η_k où k est $\not\equiv 0$ mod 3 sont égaux à η_1 et tous les η_k où $k \equiv 0$ mod 3 sont égaux à η_3. Donc

$$(46) \qquad \theta = (\eta_3\eta_4^{-1}\eta_5\eta_6^{-1})(\eta_9\eta_{10}^{-1}\eta_{11}\eta_{12}^{-1})\ldots \times (\eta_{6h+3}\eta_{6h+4}^{-1}\eta_{6h+5}\eta_{6h+6}^{-1})\ldots(\eta_{n-9}\eta_{n-8}^{-1}\eta_{n-7}\eta_{n-6}^{-1}) = 1.$$

Donc on a encore

$$\eta_1 = \eta_2 = \ldots = \eta_{n-4}.$$

Si $n = 6$, $n - 4 = 2$, et l'on n'a que $\eta_1 = \eta_2\theta$ qui est une identité, la définition de θ étant ici $\theta = \eta_1\eta_2^{-1}$. On ne peut donc rien conclure. *On verra bientôt* (**54**) *que, pour* $n = 6$, *les équations* (32) *n'entraînent pas* $\eta_1 = \eta_2$.

53. *Ainsi, en exceptant les cas* $n = 6, 7$, *et en posant* $\varepsilon_1 = \varepsilon$, $\eta_1 = \eta$, *on a obtenu les conséquences suivantes de* (32) *entre* $\alpha, \ldots, \eta_{n-4}$

$$(47) \left\{ \begin{array}{l} \beta^{1-t}\gamma^t\varepsilon^t\alpha^m = 1, \quad t = \dfrac{\tau(\tau-1)}{2}, \quad m = -\dfrac{t(t-1)}{2} - 2t; \quad \varepsilon_i = \varepsilon; \quad \varepsilon^2 = \alpha^4; \\ \delta = \alpha^3, \text{ si } n \text{ est impair}; \qquad \delta = \alpha\varepsilon, \text{ si } n \text{ est pair}; \\ \eta_i = \eta; \qquad \eta^3 = \alpha^3\varkappa^2; \qquad \zeta^2 = \eta^3\varepsilon\alpha^{-2}. \end{array} \right.$$

Les conséquences de (32) *entre* $\alpha, \ldots, \eta_{n-4}$ *résultent toutes de celles-là*. Car elles résultent toutes de (4) et de (33), et une conséquence de (4) et de (33) qui ne résulte pas de (47) se ramène évidemment (*E.*, 17) à la forme $\zeta^2 = \eta^3$. Or on a vu (**50**) que cette équation ne résulte pas de (32).

On peut donc supposer que, dans les équations (32), δ *est remplacé par* α^3, *si* n *est impair, par* $\alpha\varepsilon$, *si* n *est pair, et que* ε_i *est remplacé par* ε *et* η_i *par* η. *On pourra alors omettre dans* (47) *les relations* $\varepsilon_i = \varepsilon$, $\eta_i = \eta$, $\delta = \alpha^3$ ou $\alpha\varepsilon$. C'est ce que je ferai désormais.

Posons maintenant

$$(48)\left\{\begin{array}{l} \beta\gamma^{-1} = \beta', \qquad \beta^{1-t}\gamma^t\varepsilon^l\alpha^m = \gamma' \qquad (\text{d'où } \beta'^t\gamma' = \beta\varepsilon^l\alpha^m,\ \beta'^{t-1}\gamma' = \gamma\varepsilon^l\alpha^m), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \alpha^{-2}\varepsilon = \varepsilon'. \\ \zeta^2\eta^{-3} = \varepsilon'\zeta', \qquad \zeta\eta^{-1} = \eta' \qquad [\text{d'où } \zeta = (\varepsilon'\zeta')^{-1}\eta'^3,\ \eta = (\varepsilon'\zeta')^{-1}\eta'^2]. \\ \qquad\qquad \alpha^3\varkappa^2\eta^{-3} = \varkappa', \qquad \alpha\varkappa = \alpha' \\ \qquad (\text{d'où } \alpha\eta^{-3} = \alpha'^{-2}\varkappa',\ \varkappa\eta^3 = \alpha'^3\varkappa'^{-1};\ \text{donc } \alpha = \alpha'^{-2}(\varepsilon'\zeta')^{-3}\eta'^6\varkappa'). \end{array}\right.$$

Les relations (47) s'écrivent, avec les générateurs α', β', γ', ε', ζ', η', $\varkappa'$,

$$(49) \qquad \varepsilon'^2 = 1, \qquad \gamma' = \zeta' = \varkappa' = 1, \qquad \alpha', \beta', \eta' \text{ restant indéterminés.}$$

Donc $\mathcal{A}_0$ est le produit direct de $\mathcal{A} = \{\varepsilon'\}$ d'ordre $\mu = 2$ et d'un groupe $\mathcal{A}_1$ dont les diverses déterminations sont données par

$$\mathcal{A}_1 = \{\alpha'\varepsilon'^x,\ (\alpha'\varepsilon'^x)^{-1},\ \beta'\varepsilon'^y,\ (\beta'\varepsilon'^y)^{-1},\ \eta'\varepsilon'^z,\ (\eta'\varepsilon'^z)^{-1}\} \qquad (x, y, z = 0 \text{ ou } 1).$$

Les divers figuratifs de Γ [on sait *a priori* qu'il n'y en a qu'un (**28**) : mais nous allons le retrouver], qui s'obtiennent en faisant $\mathcal{A}_2 = 1$, sont fournis par (32) et (48) où l'on fait

$$\alpha' = \varepsilon'^{-x}, \qquad \beta' = \varepsilon'^{-y}, \qquad \eta' = \varepsilon'^{-z}, \qquad \gamma' = \zeta' = \varkappa' = 1, \qquad \varepsilon'^2 = 1,$$

c'est-à-dire, en réduisant les exposants de ε' mod 2, et en remarquant que $\varepsilon' = \varepsilon$ (car $\varepsilon' = \alpha^{-2}\varepsilon$, et les équations précédentes jointes à (48) entraînent $\alpha^2 = 1$), et que $m \equiv \dfrac{t(t-1)}{2}$ mod 2,

$$(50) \quad \alpha = \varepsilon, \quad \beta = \varepsilon^{\frac{t(t-1)}{2}+l+ty}, \quad \gamma = \beta\varepsilon^y, \quad \delta = \varepsilon^l, \quad \zeta = \varepsilon^{1+z}, \quad \eta = \varepsilon, \quad \varkappa = \varepsilon^{1+x}.$$

En prenant au besoin $b\,\varepsilon^y$ pour b, $c\,\varepsilon^{x+1}$ pour c et $a\,\varepsilon^{x+z}$ pour a, *on peut annuler* x, y *et* z.

34. *Si* $n = 6$, et si les équations (32) n'entraînent pas la conséquence $\eta_2 = \eta_1$ (on verra tout à l'heure que c'est le cas), il faut, en continuant à poser $\eta_1 = \eta$, remplacer dans (47) l'équation $\eta_2 = \eta$

par $\eta_{12}^3 = \alpha^3 \varkappa^2$. J'écrirai λ pour η_{12}, et je poserai

$$\lambda \varepsilon' \eta'^{-2} = \lambda'. \tag{51}$$

Il faudra alors ajouter à (49) l'équation

$$\lambda'^3 = 1 \tag{52}$$

[qui équivaut à $\lambda^3 = \alpha^3 \varkappa^2$ en vertu de (48) et (49)]. $\mathcal{A}_0$ est ici le produit direct de $\mathcal{A} = \{ \varepsilon', \lambda' \}$ et de

$$\mathcal{A}_1 = \{ \alpha' \varepsilon'^x \lambda'^{x'}.\ (\alpha' \varepsilon'^x \lambda'^{x'})^{-1}.\ \beta' \varepsilon'^y \lambda'^{y'}.\ (\beta' \varepsilon'^y \lambda'^{y'})^{-1}.\ \eta' \varepsilon'^z \lambda'^{z'}.\ (\eta' \varepsilon'^z \lambda'^{z'})^{-1} \}$$
$$(x, y, z = 0 \text{ ou } 1\,;\ x', y', z' = 0, 1, 2).$$

Les divers figuratifs de Γ, qui s'obtiennent en faisant $\mathcal{A}_2 = 1$, sont fournis par (32), (48) et (51) où l'on fait

$$(53) \quad \begin{cases} \alpha' = \varepsilon'^{-x} \lambda'^{-x'}, \quad \beta' = \varepsilon'^{-y} \lambda'^{-y'}, \quad \eta' = \varepsilon'^{-z} \lambda'^{-z'}, \\ \gamma' = \zeta' = \varkappa' = 1, \quad \varepsilon'^2 = 1, \quad \lambda'^3 = 1, \end{cases}$$

c'est-à-dire, en réduisant les exposants de ε' mod 2 et ceux de λ' mod 3 (ici $t = 4$, $l = 1$, $m = -8$),

$$(54) \begin{cases} \alpha = \varepsilon' \lambda'^{-x'}, \quad \beta = \varepsilon' \lambda'^{-y'}, \quad \gamma = \varepsilon'^{1+y}, \quad \delta = 1, \quad \varepsilon = \varepsilon' \lambda'^{x'}, \\ \zeta = \varepsilon'^{1+z}, \quad \eta = \varepsilon' \lambda'^{z'}, \quad \varkappa = \varepsilon'^{1+x}, \quad \lambda = \varepsilon' \lambda'^{1+z'}, \quad \varepsilon'^2 = 1, \quad \lambda'^3 = 1. \end{cases}$$

En prenant au besoin $a \varepsilon'^z \lambda'^{-x'}$ pour a, $b \varepsilon'^y \lambda'^{y'}$ pour b, $c \varepsilon'^x \lambda'^{1-z'}$ pour c, *on peut annuler* x, y, z, x', y', z'.

Il reste à s'assurer que, pour $n = 6$, le multiplicateur est bien d'ordre 6. Or le groupe X défini par (32), (53) et $\varepsilon' = 1$ est d'ordre 3.360, et son central est $\Lambda = \{ \lambda \}$. $X | \Lambda$ est isomorphe au g^6 alterné et contient un g_{60}^5 auquel répond dans X un $g_{3.60}$. Or un tel groupe est nécessairement le produit direct d'un $g_{60}\Lambda$ par Λ (¹), et X est représentable relativement à Λ en g^{18} transitif. Dans cette représentation (avec laquelle j'identifierai désormais X), Λ est invariant et intransitif. Donc X est imprimitif et a 6 systèmes de degré 3. Soient $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\,; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2\,; \ldots\,; \alpha_6, \beta_6, \gamma_6$ ces systèmes et $\lambda = \Pi_1^6 \sigma_i$, σ_i désignant la substitution $(\alpha_i \beta_i \gamma_i)$. L'action de $X | \Lambda$ sur les 6 systèmes est

---

(¹) *Voir* Hölder, *M. A.*, t. XLVI, 1895, p. 354-355; *S.*, 93.

celle du g^6 alterné. Posons

$$a_\alpha = \alpha_1\alpha_2.\alpha_3\alpha_4, \qquad b_\alpha = \alpha_1\alpha_2.\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6, \qquad c_\alpha = \alpha_1\alpha_3\alpha_2.$$

et soient a_β, b_β, c_β; a_γ, b_γ, c_γ les substitutions déduites de a_α, b_α, c_α en y remplaçant α_i par β_i ou γ_i. Posons encore

$$a_0 = a_\alpha a_\beta a_\gamma, \qquad b_0 = b_\alpha b_\beta b_\gamma, \qquad c_0 = c_\alpha c_\beta c_\gamma;$$
$$x = \Pi_1^6 \sigma_i^{x_i}, \quad y = \Pi_1^6 \sigma_i^{y_i}, \quad z = \Pi_1^6 \sigma_i^{z_i}; \quad a = a_0 x, \quad b = b_0 y, \quad c = c_0 z.$$

Si X existe, il doit y avoir des valeurs de x_i, y_i, z_i mod 3 telles que a, b, c vérifient les équations

$$b^4 = 1, \quad a^2 = 1, \quad (ba)^3 = 1, \quad (ab^{-1}ab)^3 = 1, \quad (ab^{-2}ab^2)^2 = 1, \quad (ab^{-3}ab^3)^2 = 1,$$
$$c^3 = 1, \qquad (ca)^3 = 1, \qquad (cb^{-1}ab)^2 = 1, \qquad (cb^{-2}ab^2)^2 = \lambda.$$

On peut toujours supposer les y_i nuls. Car si b a la séquence $\alpha_i\beta_k$, elle doit avoir, pour être permutable à λ, les séquences $\beta_i\gamma_k$ et $\gamma_i\alpha_k$. Mais alors, dans $\sigma_k^{-1} b \sigma_k$, ces séquences sont remplacées respectivement par $\alpha_i\alpha_k$, $\beta_i\beta_k$, $\gamma_i\gamma_k$ [ceci suppose $k \neq i$; or c'est bien le cas, sans quoi b aurait le cycle $(\alpha_i\beta_i\gamma_i)$ et ne serait pas d'ordre 4] (¹).

Remarquons maintenant que, si s_α est une substitution quelconque des α_i, et s le produit de s_α, $s_\beta = \lambda^{-1}s_\alpha\lambda$, $s_\gamma = \lambda^{-2}s_\alpha\lambda^2$, $s^{-1}xs$ se déduit de x, soit en laissant les x_i à leurs places et en opérant sur les σ_i la substitution s_σ qui se déduit de s en y écrivant σ_i pour α_i, soit en laissant les σ_i à leurs places et en opérant sur les x_i, la substitution s_x^{-1},

---

(¹) Au point de vue abstrait, cette observation se présente comme il suit. Il s'agit de trouver une substitution $u = \Pi_1^6 \sigma_i^{u_i}$ telle que $ub_0yu^{-1} = b_0$. Or soit b_u ce que devient b_α quand on y remplace α_i par u_i, et supposons que b_u^{-1} remplace u_i par u_{h_i}. Cette équation devient (d'après la remarque qui suit dans le texte) $u_{h_i} + y_i - u_i \equiv 0 \pmod 3$. Or, soit $(u_1, \ldots, u_m)$ un cycle de b_u^{-1}. Les équations correspondantes sont

$$u_1 - u_2 \equiv -y_1, \qquad u_2 - u_3 \equiv -y_2, \qquad \ldots, \qquad u_m - u_1 \equiv -y_m \pmod 3.$$

Elles sont résolubles toujours et seulement si $\Sigma_1^m y_i \equiv 0$. Or m divise l'ordre $t = mq$ de $b_0 y$, et la condition $(b_0 y)^t = 1$ ou

$$b_0^t . b_0^{-t+1} y\, b_0^{t-1} . b_0^{-t+2} y\, b_0^{t-2} \ldots b_0^{-1} y\, b_0 . y = 1$$

donne $q\Sigma_1^m y_i \equiv 0$, d'où $\Sigma_1^m y_i \equiv 0$, puisque ici $t = 4$ est premier.

s_x se déduisant de s_α par le changement de α_i en x_i : car si s remplace α_i par α_k, elle transforme σ_i en σ_k, donc $\sigma_i^{x_i}$ en $\sigma_k^{x_i}$ et remplace par suite x_k par x_i dans $\Pi_1^6 \sigma_i^{x_i}$.

L'équation $a^2 = 1$ ou $a_0 x a_0 x = 1$ donne donc (en sous-entendant le module 3)

$$x_1 + x_2 \equiv 0, \qquad x_3 + x_4 \equiv 0, \qquad x_5 \equiv 0, \qquad x_6 \equiv 0.$$

Les 6 équations fournies par $(ba)^3 = 1$ ou $ba_0 x ba_0 x ba_0 x = 1$ se réduisent à

$$x_4 \equiv 0.$$

Celles fournies par $(b^{-2}ab^2a)^2 = 1$ ou $b_0^2 a_0 x b_0^2 a_0 x b_0^2 a_0 x b_0^2 a_0 x = 1$ et par $(bab^{-1}a)^3 = 1$ ou $b_0 a_0 x b_0^{-1} a_0 x b_0 a_0 x b_0^{-1} a_0 x b_0 a_0 x b_0^{-1} a_0 x = 1$ ne donnent rien de nouveau.

Celles fournies par $c^3 = 1$ ou $c_0 z c_0 z c_0 z = 1$ se réduisent à

$$z_1 + z_2 + z_3 \equiv 0.$$

Celles fournies par $(ca)^3 = 1$ ou $c_0 z a_0 x c_0 z a_0 x c_0 z a_0 x = 1$ se réduisent à

$$z_1 - z_4 \equiv x_1.$$

Celles fournies par $(cb^{-1}ab)^2 = 1$ ou $b_0 c_0 z b_0^{-1} a_0 x b_0 c_0 z b_0^{-1} a_0 x = 1$ se réduisent à

$$z_1 \equiv x_2, \qquad z_6 \equiv 0.$$

Enfin celles fournies par $(cb^{-2}ab^2)^2 = \lambda$ ou $b_0^2 c_0 z b_0^{-2} a_0 x b_0^2 c_0 z b_0^{-2} a_0 x = \lambda$ se réduisent à

$$x_1 \equiv 1 + z_1, \qquad z_4 \equiv -1, \qquad z_5 \equiv 1.$$

Donc

$$x_1 \equiv -x_2 \equiv -1, \quad x_3 \equiv x_4 \equiv x_5 \equiv x_6 \equiv 0, \quad z_1 \equiv -z_3 \equiv -z_4 \equiv z_5 \equiv 1, \quad z_6 \equiv 0,$$

et l'on peut faire $z_2 \equiv 0$. On obtient ainsi

$$b = (\alpha_1\alpha_2)(\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6)(\beta_1\beta_2)(\beta_3\beta_4\beta_5\beta_6)(\gamma_1\gamma_2)(\gamma_3\gamma_4\gamma_5\gamma_6),$$
$$a = (\alpha_1\beta_2)(\beta_1\gamma_2)(\gamma_1\alpha_2)(\alpha_3\alpha_4)(\beta_3\beta_4)(\gamma_3\gamma_4),$$
$$c = (\alpha_1\gamma_3\gamma_2)(\beta_1\alpha_3\alpha_2)(\gamma_1\beta_3\beta_2)(\alpha_4\gamma_4\beta_4)(\alpha_5\beta_5\gamma_5).$$

Donc X existe.

35. Au lieu de partir de la représentation de X relative au g_{60} A, on pourrait partir de celle relative au g_{24} $S = \{a, b\}$ défini par $a^2 = 1$, $b^4 = 1$, $(ab)^3 = 1$, $(ab^{-1}ab)^3 = 1$, $(ab^{-2}ab^2)^2 = 1$, isomorphe au g^4 symétrique. X contient S, sans quoi les équations de X établiraient entre a et b des relations autres que les conséquences des équations de S, relations qui résulteraient évidemment aussi des équations de X où l'on fait $\lambda = 1$; or cela n'a pas lieu, puisque le groupe ainsi obtenu est isomorphe au g^6 alterné de champ 1, 2, 3, 4, 5, 6, qui contient le g^4 symétrique $\{12.3456, 12.34\}$. S ne peut contenir A, puisque le g^4 symétrique n'a pas d'e_3 normal. Donc X est représentable, relativement à S, en g^{45} imprimitif admettant 15 systèmes de degré 3. L'action de X|A sur ces systèmes est semblable à l'action du g^6 alterné de champ 1, 2, 3, 4, 5, 6 sur les 15 combinaisons de symboles 2 à 2

12, 13, 14, 15, 16, 23, 24, 25, 26, 34, 35, 36, 45, 46, 56,

que je désignerai respectivement par

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8, \alpha_9, \alpha_{10}, \alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{14}, \alpha_{15}$.

L'action de la substitution 12.34, correspondant à a, sur ces combinaisons est

$$a_\alpha = \alpha_1 . \alpha_{10} . \alpha_{15} . \alpha_2\alpha_7 . \alpha_3\alpha_6 . \alpha_4\alpha_8 . \alpha_5\alpha_9 . \alpha_{11}\alpha_{13} . \alpha_{12}\alpha_{14}.$$

Celle de 12.3456, répondant à b, est

$$b_\alpha = \alpha_1 . \alpha_2\alpha_7\alpha_4\alpha_9 . \alpha_3\alpha_8\alpha_5\alpha_6 . \alpha_{10}\alpha_{13}\alpha_{15}\alpha_{12} . \alpha_{11}\alpha_{14}.$$

Celle de 132, répondant à c, est

$$c_\alpha = \alpha_{13} . \alpha_{14} . \alpha_{15} . \alpha_1\alpha_2\alpha_6 . \alpha_3\alpha_{10}\alpha_7 . \alpha_4\alpha_{11}\alpha_8 . \alpha_5\alpha_{12}\alpha_9.$$

Soient encore a_β, b_β, c_β ; a_γ, b_γ, c_γ les substitutions déduites de a_α, b_α, c_α en y remplaçant α_i par β_i ou γ_i, et

$$a_0 = a_\alpha a_\beta a_\gamma. \qquad b_0 = b_\alpha b_\beta b_\gamma. \qquad c_0 = c_\alpha c_\beta c_\gamma.$$

$$\sigma_i = (\alpha_i \beta_i \gamma_i). \qquad \lambda = \Pi_1^{15} \sigma_i. \qquad x = \Pi_1^{15} \sigma_i^{x_i}. \qquad y = \Pi_1^{15} \sigma_i^{y_i}. \qquad z = \Pi_1^{15} \sigma_i^{z_i}.$$

$$a = a_0 x. \qquad b = b_0. \qquad c = c_0 z.$$

Les équations analogues à celles obtenues dans la représentation pré-

cédente permettent d'annuler x_4, x_{14}, z_4, z_8. Elles donnent alors

$$x_1 \equiv x_4 \equiv x_8 \equiv x_{10} \equiv x_{11} \equiv x_{12} \equiv x_{13} \equiv x_{14} \equiv x_{15} \equiv 0,$$
$$x_2 \equiv x_3 \equiv x_9 \equiv 1, \qquad x_5 \equiv x_6 \equiv x_7 \equiv -1;$$
$$z_1 \equiv z_4 \equiv z_5 \equiv z_8 \equiv z_9 \equiv z_{11} \equiv z_{12} \equiv z_{13} \equiv 0,$$
$$z_2 \equiv z_3 \equiv z_7 \equiv z_{10} \equiv z_{14} \equiv 1, \qquad z_6 \equiv z_{15} \equiv -1.$$

Donc

$$b = b_0.$$

$$\begin{aligned} a = {} & (\alpha_1)(\beta_1)(\gamma_1)(\alpha_{10})(\beta_{10})(\gamma_{10})(\alpha_{15})(\beta_{15})(\gamma_{15}) \\ & \times (\alpha_2\gamma_7)(\beta_2\alpha_7)(\gamma_2\beta_7)(\alpha_3\gamma_6)(\beta_3\alpha_6)(\gamma_3\beta_6)(\alpha_5\beta_9)(\beta_5\alpha_9)(\gamma_5\beta_9) \\ & \times (\alpha_4\alpha_8)(\beta_4\beta_8)(\gamma_4\gamma_8)(\alpha_{11}\alpha_{13})(\beta_{11}\beta_{13})(\gamma_{11}\gamma_{13})(\alpha_{12}\alpha_{14})(\beta_{12}\beta_{14})(\gamma_{12}\gamma_{14}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c = {} & (\alpha_{13})(\beta_{13})(\gamma_{13})(\alpha_1\beta_2\alpha_6)(\beta_1\gamma_2\beta_6)(\gamma_1\alpha_2\gamma_6)(\alpha_3\beta_{10}\gamma_7)(\beta_3\gamma_{10}\alpha_7)(\gamma_3\alpha_{10}\beta_7) \\ & \times (\alpha_4\alpha_{11}\alpha_8)(\beta_4\beta_{11}\beta_8)(\gamma_4\gamma_{11}\gamma_8) \\ & \times (\alpha_5\alpha_{12}\alpha_9)(\beta_5\beta_{12}\beta_9)(\gamma_5\gamma_{12}\gamma_9)(\alpha_{14}\beta_{14}\gamma_{14})(\alpha_{15}\gamma_{15}\beta_{15}). \end{aligned}$$

56. *Soit* $n = 7$. Si (32) n'entraîne pas $\eta_2 = \eta_1$, je poserai encore $\eta_1 = \eta$, $\eta_2 = \lambda$. Il faut remplacer, dans (47), $\eta_2 = \eta$ par $\lambda^3 = \alpha^3\varkappa^2$. On voit, comme au début du n° **54**, que les divers figuratifs de Γ sont fournis par (32), (48), (51) et (53), c'est-à-dire, en réduisant les exposants de ε' mod 2 et ceux de λ' mod 3 (ici $t = 5$, $l = 1$, $m = -12$)

$$(55) \left\{ \begin{array}{llllll} \alpha = \varepsilon'\lambda'^{-x'}, & \beta = \varepsilon'^{1+y}\lambda'^{y'-x'}, & \gamma = \varepsilon'^{-x-y}, & \delta = \varepsilon', & \varepsilon = \varepsilon'\lambda'^{x'}, \\ \zeta = \varepsilon'^{1+z}, & \eta = \varepsilon'\lambda'^{z'}, & \varkappa = \varepsilon'^{1+x}, & \lambda = \varepsilon'\lambda'^{1+z'}, & \varepsilon'^2 = 1, & \lambda'^3 = 1. \end{array} \right.$$

En prenant au besoin $a\varepsilon'^{x+z}\lambda'^{-x'}$ pour a, $b\varepsilon'^{y}\lambda'^{y'-x'}$ pour b, $c\varepsilon'^{x}\lambda'^{x'+z'}$ pour c, *on peut annuler* x, y, z, x', y', z'.

Il reste à chercher si, pour $n = 7$, le multiplicateur est bien d'ordre 6. Faisons $\varepsilon = 1$, et cherchons à construire un groupe X d'ordre $\frac{3}{2}(7!)$ ayant pour central $\Lambda = \{\lambda\}$. X contient $S = \{a, b\}$ défini par $a^2 = b^5 = (ba)^4 = 1$, $(ab^{-1}ab)^3 = 1$, $(ab^{-2}ab^2)^2 = 1$, donc isomorphe au g^5_{120} symétrique et premier à Λ. Considérons la représentation de X relative à S. Elle a 21 systèmes d'imprimitivité de degré 3, et, en identifiant X avec cette représentation, l'action de $X|\Lambda$ sur les 21 systèmes est semblable à celle du g^7 alterné sur les 21 combinaisons 2 à 2

12, 13, 14, 15, 16, 17, 23, 24, 25, 26, 27,
34, 35, 36, 37, 45, 46, 47, 56, 57, 67,

que je désignerai respectivement par

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3, \quad \alpha_4, \quad \alpha_5, \quad \alpha_6, \quad \alpha_7, \quad \alpha_8, \quad \alpha_9, \quad \alpha_{10}, \quad \alpha_{11},$$
$$\alpha_{12}, \quad \alpha_{13}, \quad \alpha_{14}, \quad \alpha_{15}, \quad \alpha_{16}, \quad \alpha_{17}, \quad \alpha_{18}, \quad \alpha_{19}, \quad \alpha_{20}, \quad \alpha_{21}.$$

L'action de 12.34, qui répond à a, sur ces combinaisons, est

$$a_\alpha = \alpha_1 . \alpha_{12} . \alpha_{19} . \alpha_2 \alpha_8 . \alpha_3 \alpha_7 . \alpha_4 \alpha_9 . \alpha_5 \alpha_{10} . \alpha_6 \alpha_{11} . \alpha_{13} \alpha_{16} . \alpha_{14} \alpha_{17} . \alpha_{15} \alpha_{18} . \alpha_{20} \alpha_{21};$$

celle de 34567, qui répond à b, est

$$b_\alpha = \alpha_1 . \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 \alpha_6 . \alpha_7 \alpha_8 \alpha_9 \alpha_{10} \alpha_{11} . \alpha_{12} \alpha_{16} \alpha_{19} \alpha_{21} \alpha_{15} . \alpha_{13} \alpha_{17} \alpha_{20} \alpha_{14} \alpha_{18};$$

celle de 132, qui répond à c, est

$$c_\alpha = \alpha_{16} . \alpha_{17} . \alpha_{18} . \alpha_{19} . \alpha_{20} . \alpha_{21} . \alpha_1 \alpha_2 \alpha_7 . \alpha_3 \alpha_{12} \alpha_8 . \alpha_4 \alpha_{13} \alpha_9 . \alpha_5 \alpha_{14} \alpha_{10} . \alpha_6 \alpha_{15} \alpha_{11}.$$

Posons comme précédemment

$$a_0 = a_\alpha a_\beta a_\gamma, \qquad b_0 = b_\alpha b_\beta b_\gamma, \qquad c_0 = c_\alpha c_\beta c_\gamma;$$
$$\sigma_i = (\alpha_i \beta_i \gamma_i), \qquad \lambda = \Pi_1^{21} \sigma_i, \qquad x = \Pi_1^{21} \sigma_i^{x_i}, \qquad y = \Pi_1^{21} \sigma_i^{y_i}, \qquad z = \Pi_1^{21} \sigma_i^{z_i};$$
$$a = a_0 x, \qquad b = b_0, \qquad c = c_0 z.$$

Les conditions $a^2 = 1$, $b^5 = 1$, $(ba)^4 = 1$, $(ab^{-1}ab)^3 = 1$, $(ab^{-2}ab^2)^2 = 1$ donnent

$$(56) \quad \begin{cases} x_1 \equiv x_{12} \equiv x_{13} \equiv x_{14} \equiv x_{15} \equiv x_{16} \equiv x_{17} \equiv x_{18} \equiv x_{19} \equiv x_{20} \equiv x_{21} \equiv 0, \\ x_2 \equiv x_3 \equiv x_4 \equiv x_5 \equiv x_6 \equiv -x_7 \equiv -x_8 \equiv -x_9 \equiv -x_{10} \equiv -x_{11}. \end{cases}$$

Mais les conditions $(cb^{-1}ab)^2 = 1$, $(cb^{-2}ab^2)^2 = \lambda$ donnent respectivement (entre autres) les deux congruences

$$(57) \qquad x_1 + z_1 + x_{11} + z_2 \equiv 0, \qquad x_1 + z_1 + x_{10} + z_2 \equiv 1$$

qui contredisent (56).

Donc X n'existe pas. *Donc les équations* (32) *entraînent la conséquence* $\eta_2 = \eta$.

37. On aurait pu, comme dans le cas $n = 6$, considérer la représentation de X en g^{45} relative à un des g_{168} simples qu'il contient; mais la représentation correspondante Λ du g^7 alterné en g^{15} est moins facile à former, et la contradiction apparaît moins vite.

Je vais ici former Λ, non pour montrer comment cette contradiction

se présente, mais pour montrer *comment* $\eta_2 = \eta_1$ résulte de (32), et pour obtenir incidemment de nouvelles équations de A_7. Soient 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 les symboles de A_7 et α_1 son g_{168} simple engendré par

(58) $$x = 124.365, \qquad y = 7123456, \qquad z = 24.56$$

et défini par

$$y^7 = z^2 = (y^2 z)^3 = (yz)^4 = 1 \qquad (x = zy^6 zy^3 zy^6) \quad (^1).$$

A_7 contient les 30 conjugués de α_1 dans le symétrique S_7 de champ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 [α_1 est maximum dans S_7 (²)] : mais ils forment dans A_7 deux systèmes conjugués de 15 g_{168}. Les 15 conjugués de α_1 sont, en posant $\sigma = 71234$,

$$\alpha_1, \qquad \alpha_2 = \sigma^{-1}\alpha_1\sigma.$$
$$\alpha_3 = x^{-1}\alpha_2 x, \qquad \alpha_4 = x^{-2}\alpha_2 x^2, \qquad \alpha_5 = x^{-3}\alpha_2 x^3,$$
$$\alpha_6 = x^{-4}\alpha_2 x^4, \qquad \alpha_7 = x^{-5}\alpha_2 x^5, \qquad \alpha_8 = x^{-6}\alpha_2 x^6,$$
$$\alpha_9 = \sigma\alpha_1\sigma^{-1}.$$
$$\alpha_{10} = x^{-1}\alpha_9 x, \qquad \alpha_{11} = x^{-2}\alpha_9 x^2, \qquad \alpha_{12} = x^{-3}\alpha_9 x^3,$$
$$\alpha_{13} = x^{-4}\alpha_9 x^4, \qquad \alpha_{14} = x^{-5}\alpha_9 x^5, \qquad \alpha_{15} = x^{-6}\alpha_9 x^6$$

(on vérifie directement que ces 15 α_i sont distincts, en formant leurs g_7 conjugués de ceux de α_1). En écrivant maintenant

$a, \quad b, \quad c, \quad d, \quad e, \quad f, \quad g, \quad h, \quad i, \quad k, \quad l, \quad m, \quad n, \quad o, \quad p$

pour

$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3, \quad \alpha_4, \quad \alpha_5, \quad \alpha_6, \quad \alpha_7, \quad \alpha_8, \quad \alpha_9, \quad \alpha_{10}, \quad \alpha_{11}, \quad \alpha_{12}, \quad \alpha_{13}, \quad \alpha_{14}, \quad \alpha_{15}$

et en identifiant chaque substitution ξ de A_7, avec la substitution $(\alpha_i, \xi^{-1}\alpha_i\xi)$ que subissent les α_i quand on les transforme par ξ, c'est-à-dire avec la substitution correspondante de A, on obtient

$$a_0 = 12.34 = am.bo.ch.ep.fn.gk.d.i.l.$$
$$b_0 = 34567 = aehfm.bpdng.cloki.$$
$$c_0 = 132 = aen.bfh.cpk.dli.gmo$$

(¹) Voir *J. M.*, 1902, p. 275-276, où le symbole 7 est seulement remplacé par 0.

(²) *Loc. cit.*, p. 284.

(a_0, b_0, c_0 correspondent respectivement à a, b, c de $\mathcal{G}_0$). α_6, qui fixe f est engendré par

$$e_0 = (c_0 b_0)^{-1} = 1237654 = ageniph.bodclkm.f.$$
$$f_0 = c_0 b_0^{-3} a_0 b_0^3 = 13.67 = ap.bh.ce.il.kn.mo.d.f.g;$$

car e_0 et f_0 satisfont aux équations $e_0^7 = f_0^2 = (e_0^2 f_0)^3 = (e_0 f_0)^4 = 1$ qui définissent α_6.

Les substitutions

$$e'_0 = e_0^{-1} \qquad \text{et} \qquad f'_0 = a_0 c_0 b_0^{-2} a_0 b_0^2 a_0 = 24.56 = bk.cm.dl.eg.fo.np.a.i.h$$

engendrent aussi un g_{168} défini par $e_0'^7 = f_0'^2 = (e_0'^2 f'_0)^3 = (e'_0 f'_0)^4 = 1$; mais, comme il déplace tous les symboles, il appartient à l'autre système conjugué.

On voit que α_6 est transitif dans son champ. Le g^{13} F qui y fixe o est engendré par

$$u_0 = f_0 e_0^2 = 165.274 = bgn.cim.dlh.ekp.a.f.o,$$
$$v_0 = e_0 f_0 e_0^{-1} = 24.37 = bk.cn.dg.el.hi.mp.a.f.o.$$
$$w_0 = u_0^{-1} v_0 u_0 = 27.34 = bi.ce.dm.gp.hk.ln.a.f.o.$$

On voit que F est un g_{12}^{12} tétraédral régulier, défini par $u_0^3 = v_0^2 = w_0^2 = 1$, $v_0 w_0 = w_0 v_0$, $u_0^{-1} v_0 u_0 = w_0$, et que A *est un* g^{15} 2 *fois transitif de classe* 12.

Adjoignons à α_6 la substitution $s_0 = f'_0$ *qui a le cycle fo*. Elle vérifie les équations

$$s_0^2 = 1, \quad s_0 v_0 s_0 = v_0, \quad s_0 w_0 s_0 = v_0 w_0, \quad s_0 u_0 s_0 = u_0^2, \quad s_0 e_0 s_0 = e_0^3 s_0 v_0 u_0^2 v_0 e_0^3,$$

et, comme e_0 F contient un système de restes de α_6 (modd F, 1) (F étant transitif dans son champ, e F contient des substitutions remplaçant o par un symbole quelconque autre que o du champ de α_6), *ces équations, jointes à celles de* α_6, *définissent* A_7 (¹).

Négligeons maintenant $|\alpha, \beta, \gamma, \zeta, \varkappa| = \mathcal{B}$ ou, ce qui revient au même, réduisons-le à 1 ($\mathcal{B}_0$ est alors d'ordre 3), et posons

$$e = (cb)^{-1}, \qquad f = cb^{-3} ab^3,$$
$$u = fe^2 = cb^{-3} ab^2 c^2 b^{-1} c^2, \quad v = efe^{-1} = bab^3 cb, \quad w = u^{-1} vu, \quad s = acb^{-2} ab^2 a,$$

(¹) *J. M.*, 1902, p. 259.

d'où

(59) $$v^2 = w^2 = f^2 = \eta_1, \qquad s^2 = \eta_2^2.$$

Les éléments de $\mathcal{G}_0 | \mathcal{A}_0$ qui répondent à u, v sont $\mathcal{A}_0 cb^{-3}ab^2c^2b^{-1}c^2$, $\mathcal{A}_0 bab^3cb$. Donc à la relation $v_0w_0 = w_0v_0$ répond, dans $\mathcal{G}_0$, une relation de la forme

$$vw = wv\omega, \qquad \omega \text{ étant dans } \mathcal{A}_0,$$

ou

$$vu^{-1}vu \,.\, v^{-1}u^{-1}v^{-1}u = \omega,$$

ou

(60) $$bab^3cb \,.\, cbcb^{-2}ab^3c^2 \,.\, bab^3cb \,.\, cb^{-3}ab^2c^2b^{-1}c^2 \,.$$
$$\times\, b^{-1}c^2b^2ab^{-1} \,.\, cbcb^{-2}ab^3c^2 \,.\, b^{-1}c^2b^2ab^{-1} \,.\, cb^{-3}ab^2c^2b^{-1}c^2 = \omega.$$

Calculons ω. Les transformations que je vais employer étant les mêmes que précédemment [en y joignant $(ba)^5 = 1$], je me bornerai à indiquer les parties des formules que je transforme en les soulignant, et à séparer par un trait vertical les produits situés à droite ou à gauche du premier membre (ce premier membre sera toujours dans $\mathcal{A}_0$) que je ferai passer à gauche ou à droite. On obtient ainsi successivement, en faisant d'abord passer à gauche la fin $c^2b^{-1}c^2$ du premier membre,

$$c^2\underline{b^{-1}c^2}bab^3cbcbcb^{-2}ab^4c^2bab^3cb\underline{cb^{-3}ab^2}c^2b^{-1}c^2b^{-1}c^2b^2a\underline{b^{-1}cb}cb^{-2}ab^3c^2\underline{b^{-1}c^2b^2}a\underline{b^{-1}cb^2}ab^2 = \omega.$$

$$c^2ac\underline{b^3cb}cbcb^{-2}ab^3c^2bab^3cb^{-2}ab^3c^2\underline{b^{-2}c^2b^{-1}}c^2\underline{b^{-1}c^2b^2}c^2acb^{-2}ab^3cac^2bc^2\underline{abab^2} = \omega\eta_1^{-1}.$$

$$c^2ac\underline{b^{-1}c(bb^{-1})}a(b\underline{b^{-1})c^2b}cb^{-2}ab^3c^2bab^3\underline{cb^{-2}ab^3}cac^2b^{-2}\underline{ca}(b\underline{b^{-1})c^2}bc^2acb^{-2}ab^3cac^2bc^2b^{-1}ab^{-1}ab = \omega\theta\eta_1^{-1}.$$

$$\underline{ac^2b^{-1}ab}c^2ab^{-2}a\underline{b^3c^2b}aba\underline{b^2c^2b}cac^2b^{-2}ac^2a(b\underline{b^{-1})c^2b}cab^{-2}ab^3cac^2bc^2b^{-1}ab^{-1}ab = \omega\theta^{-1}\eta_1^{-1}\eta_2^{-1}.$$

$$ab^{-1}abab^{-2}ab^{-1}a(\underline{bb^{-1})cb}a\underline{b^{-2}cb^{-2}}ac^2ab\underline{c^2b^{-2}}ab^3cac^2bc^2 \,|\, b^{-1}ab^{-1}ab = \omega\theta^{-1}\eta_2^{-1}.$$

$$b^{-1}\underline{(ab^{-1}ab)}^2ab^{-2}ab^{-1}abac^2\underline{b^{-1}c(}bb^{-1})acb^2ac^2ab^{-1}a\underline{b^2cb}cac^2bc^2 = \omega.$$

$$b^{-2}a\underline{b^{-1}cb}ac^2ab^{-1}ab^{-2}c^2abc^2 = \omega\eta_1^{-1},$$

$$\underline{b^{-2}c(b}b^{-1})ab^{-1}ab^{-2}c^2abc^2 = \omega\theta^{-1}\eta_1^{-1}.$$

$$\underline{b^{-1}c(bb^{-1})}ac\underline{b^{-1}ab^{-1}ab^{-2}}c^2ab \,|\, c^2 = \omega\theta\eta_1^{-1}.$$

$$a\underline{cb^{-1}a(b}\,\underline{b^{-1})c(bb^{-1})}abab^{-1}c^2ab = \omega\eta_1^{-1}.$$

$$ab^{-1}aba\underline{cb^{-1}ab}a\underline{b^{-1}c^2(bb^{-1})}ab = \omega\theta^{-1}\eta_1.$$

$$1 = \omega.$$

Donc $vw = wv$. Donc $(vw)^2 = v^2w^2 = \eta_1^2$.

A la relation $s_0^{-1} w_0 s_0 = v_0 w_0$ répond, dans $\mathcal{G}_0$, une relation de la forme

(61) $$s^{-1} w s = v w \varphi, \qquad \varphi \text{ étant dans } \mathcal{A}_0.$$

dont le carré donne $\varphi^2 = \eta_1^2$. Or l'équation (61), qui s'écrit

$$s^{-1} u^{-1} v u s u^{-1} v^{-1} u v^{-1} = \varphi,$$

donne successivement (avec les mêmes notations)

$$ab^{-2}ab^2c^2a.cbcb^{-2}ab^3c^2.bab^3cb.cb^{-3}ab^2c^2b^{-1}c^2.$$
$$\times acb^{-2}ab^2a.cbcb^{-2}ab^3c^2.b^{-1}c^2b^2ab^{-1}.cb^{-3}ab^2c^2b^{-1}c^2.b^{-1}c^2b^2ab^{-1}=\varphi,$$
$$b^{-2}ab^2cac^2bcb^{-2}ab^{-1}acb^{-1}cac^2b^2ab^2c^2b^{-1}c^2acb^{-2}ab^2acb^{-1}ab^2c^2bcac^2bc^2abab^2c^2b^{-1}cac^2bab^{-1}=\varphi\theta\eta_2^{-1}.$$
$$b^{-2}ab^2cac^2bcb^{-1}ababcb^{-1}cac^2b^2ab^2c^2b^{-1}c^2acb^{-2}ab^2acb^{-1}ab^{-2}cbc^2abab^2c^2b^{-1}cac^2bab^{-1}=\varphi\theta^{-1}\eta_2^{-1},$$
$$b^{-2}ab^2c^2acbc^2abcb^{-1}cac^2b^2ab^2c^2b^{-1}c^2acb^{-2}ab^2acb^{-1}ab^{-1}cbab^2c^2b^{-1}ca\,|\,c^2bab^{-1}=\varphi\theta\eta_1^{-1}\eta_2^{-1},$$
$$c^2bab^{-1}cb^{-2}ab^2a(bb^{-1})cbc^2abcb^{-1}c(bb^{-1})ac^2b^2ab^2c^2b^{-1}c^2acb^{-2}ab^2acb^{-1}c^2b^2c^2b^{-1}ca=\varphi\eta_1^{-1}.$$
$$c^2bc^2ab^2ab^2abcbc^2acb^{-1}ac^2b^2ab^2c^2b^{-1}c^2acb^{-2}ab^2c^2bc^2b^{-1}ca=\varphi\theta\eta_1^{-1}.$$
$$c^2bc^2ab^2ab^2ab^2c^2b^{-1}a(bb^{-1})c^2b^2ab^2c^2b^{-1}c^2ab^{-2}ab^2cbc^2b^{-1}ca=\varphi\eta_1^{-1}\eta_2^{-1},$$
$$c^2bc^2ab^2ab^2ababac^2bab^2c^2b^{-1}c^2ab^{-2}ab^{-2}cab^{-1}c(bb^{-1})a=\varphi\eta_2^{-1},$$
$$c^2bc^2ab^2abab^{-1}c^2bab^2c^2b^{-1}c^2b^{-2}ab^2abab^{-1}a=\varphi\theta^{-1}\eta_2^{-1}.$$
$$c^2bc^2ab^2abcb^2c^2b^2ab^2cabab^{-1}a=\varphi,$$
$$c^2bc^2ab^2abcb^2c^2b^2ab^2cbab^{-1}abab^{-1}=\varphi.$$
$$c^2bc^2ab^2abcb^2c^2b^2ab^{-2}ac^2b^{-1}abab^{-1}=\varphi\theta^{-1},$$
$$c^2bc^2ab^2abcb^{-1}ab^3cab^{-1}ab\,|\,cab^{-1}=\varphi\theta^{-1}\eta_1\eta_2.$$
$$acb^3c^2b^2cb^{-1}abab^{-1}ab\,|\,a=\varphi\eta_2.$$
$$cb^{-1}a(bb^{-1})cbc^2ab^{-1}ab=\varphi\theta\eta_1^{-1}\eta_2.$$
$$\eta_1=\varphi\eta_1^{-1}\eta_2.$$

Comme $\varphi^2=\eta_1^2$, le carré de cette équation donne $\eta_2^2=\eta_1^2$ et, puisque $\eta_2^3=\eta_1^3$, $\eta_2=\eta_1$.

58. Maschke a donné [1] une représentation homogène du g^7

---

[1] *M. A.*, t. LI, 1899, p. 290.

alterné A de champ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, où

$$132, \quad 12.34, \quad 12.45, \quad 12.56, \quad 12.67$$

sont représentées respectivement par

$$c_0 = \left|\begin{matrix} \omega^2 x_1 \\ \omega^2 x_2 \\ \omega\, x_3 \\ \omega\, x_4 \end{matrix}\right|, \quad a_0 = \left|\begin{matrix} x_1 + \sqrt{2}\, x_4 \\ x_2 + \sqrt{2}\, x_3 \\ \sqrt{2}\, x_2 - x_3 \\ \sqrt{2}\, x_1 - x_4 \end{matrix}\right|, \quad f = \left|\begin{matrix} \sigma\, x_4 \\ \sigma' x_3 \\ \sigma\, x_2 \\ \sigma' x_1 \end{matrix}\right|, \quad g = \left|\begin{matrix} \sqrt{3}\, x_3 + i\sqrt{2}\, x_4 \\ -i\sqrt{2}\, x_3 - \sqrt{3}\, x_4 \\ \sqrt{3}\, x_1 + i\sqrt{2}\, x_2 \\ i\sqrt{2}\, x_1 - \sqrt{3}\, x_2 \end{matrix}\right|, \quad h = \left|\begin{matrix} \rho\, x_3 \\ -\rho' x_4 \\ \rho\, x_1 \\ -\rho' x_2 \end{matrix}\right|,$$

$$\omega^2 + \omega + 1 = 0.$$

$$\rho = \sqrt{\frac{5}{12}} + i\sqrt{\frac{7}{12}}, \qquad \sigma = \sqrt{\frac{3}{8}} + i\sqrt{\frac{5}{8}},$$

$$\rho' = \sqrt{\frac{5}{12}} - i\sqrt{\frac{7}{12}}, \qquad \sigma' = \sqrt{\frac{3}{8}} - i\sqrt{\frac{5}{8}}.$$

Soit G le figuratif $|a, b, c, \varepsilon|$ de A, et $|\varepsilon| = \mathrm{E}$. c_0 répond à $\mathrm{E}c$, a_0 à $\mathrm{E}a$, f à $\mathrm{E}ab^{-1}ab$, g à $\mathrm{E}ab^{-2}ab^2$, h à $\mathrm{E}ab^{-3}ab^3$, et comme

$$(12)(67).(12)(56).(12)(45).(12)(34) = (34567).$$

la substitution

$$b_0 = hgfa_0 = \left|\begin{matrix} \rho'\sigma'\sqrt{6}\, x_1 - 2i\rho\sigma' x_2 - i\rho\sigma\sqrt{2}\, x_3 + \rho'\sigma\sqrt{3}\, x_4 \\ -2i\rho'\sigma x_1 + \rho\sigma\sqrt{6}\, x_2 + \rho\sigma'\sqrt{3}\, x_3 - i\rho'\sigma'\sqrt{2}\, x_4 \\ i\rho'\sigma\sqrt{2}\, x_1 - \rho\sigma\sqrt{3}\, x_2 + \rho\sigma'\sqrt{6}\, x_3 - 2i\rho'\sigma' x_4 \\ -\rho'\sigma'\sqrt{3}\, x_1 + i\rho\sigma'\sqrt{2}\, x_2 - 2i\rho\sigma x_3 + \rho'\sigma\sqrt{6}\, x_4 \end{matrix}\right|.$$

répond à $\mathrm{E}b$.

Considérons désormais les variables comme non homogènes, et posons

$$u = \left|\frac{x_1}{\sqrt{3}}, \frac{x_2}{\sqrt{3}}, \frac{x_3}{\sqrt{3}}, \frac{x_4}{\sqrt{3}}\right|, \quad v = \left|\frac{x_1}{\sqrt{5}}, \frac{x_2}{\sqrt{5}}, \frac{x_3}{\sqrt{5}}, \frac{x_4}{\sqrt{5}}\right|, \quad w = |ix_1, ix_2, ix_3, ix_4|.$$

Les déterminants de c_0, ua_0, f, vg, h, uvb_0 sont égaux à 1. On vérifie d'ailleurs directement les équations

$$(62) \quad \left\{ \begin{matrix} (a_0 u)^2 = 1, \quad c_0^3 = 1, \quad (c_0 a_0 u)^3 = w^3, \quad (a_0 b_0^{-1} a_0 b_0 u)^3 = 1, \\ (a_0 b_0^{-2} a_0 b_0^2 u^2)^2 = w^2. \\ (c_0 b_0^{-1} a_0 b_0 u)^2 = (c_0 b_0^{-2} a_0 b_0^2 u)^2 = (c_0 b_0^{-3} a_0 b_0^3 u)^3 = 1. \end{matrix} \right.$$

Comme l'équation caractéristique de b_0 est $\frac{s^5+1}{s+1}=0$, on a $b_0^5=\varpi^2$. Le déterminant de $b_0 a_0$ étant égal à 1, $(b_0 a_0)^4=\gamma_0$, qui est une similitude à quatre variables, est dans $\{\varpi\}$. Or, à la conséquence $\beta^{1-t}\gamma^t\varepsilon^l\alpha^m=1$ des équations (32) répond, pour les équations (62) jointes à $b_0^5=\varpi^2$. la conséquence $\gamma_0^5\varpi^2=1$ ou, puisque γ_0 est dans $\{\varpi\}$, $\gamma_0=\varpi^2$. Donc, en posant

$$a_1=a_0 u\varpi, \qquad c_1=c_0\varpi^2, \qquad b_1=b_0,$$

on aura

$$a_1^2=c_1^3=b_1^5=(b_1 a_1)^4=(a_1 b_1^{-1} a_1 b_1)^3=(a_1 b_1^{-2} a_1 b_1^2)^2=\varpi^2,$$
$$(c_1 a_1)^3=(c_1 b_1^{-1} a_1 b_1)^2=(c_1 b_1^{-2} a_1 b_1^2)^2=(c_1 b_1^{-3} a_1 b_1^3)^2=\varpi^2$$

et a_1, b_1, c_1 fournissant une représentation du figuratif (correspondant à $x=y=z=x'=y'=z'=0$) où a_1 répond à a, b_1 à b, c_1 à c, ϖ^2 à ε:

TABLE DES MATIÈRES.

SIXIÈME SÉRIE. — TOME VI.

Les indications qui précèdent le titre de chaque Mémoire de cette Table sont celles adoptées par le Congrès international de Bibliographie des Sciences mathématiques en 1889.

(*Note de la Rédaction.*)

FIN DU TOME VI DE LA SIXIÈME SÉRIE.

